La fonction zéta

Abdellah Bechata

www.mathematiques.ht.st

Table des matières

Résumé

Nous définissons la fonction zêta sur la bande $\text{Re}(s) > 1$ et montrons qu'elle définit une fonction C^∞ (resp. holomorphe) sur cette bande. Nous démontrons également son développement Eulérien ainsi que certains développements asymptotiques

1 Définition

Définition 1

Soit s un nombre complexe, on définit pour tout nombre réel positif x, la fonction puissance $x \mapsto x^s$ par

$$x^s \underset{\text{par definition}}{=} e^{s \ln x}.$$

Bien entendu, cette fonction puissance satisfait à toutes les propriétés des fonctions puissances réelles.

Proposition 1

Si s est un comlexe tel que $\text{Re}\, s > 1$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^s}$ converge.

Preuve :

La série converge en fait absolument puisque le module de son terme général $\left|\dfrac{1}{n^s}\right| = \dfrac{1}{n^{\text{Re}(s)}}$ n'est autre que le terme général d'une série de Riemann convergente. ■

Définition 2

On appelle fonction zéta de Riemann la fonction définie sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(s) > 1\}$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Lemme 1

Quelques soient les réels α et β tels que $\alpha > 1$ et $\beta \geqslant 0$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\ln^\beta n}{n^\alpha}$ converge.

Preuve :

On sait que quelque soit $\beta \geqslant 0$, $\ln^\beta n \underset{n \to +\infty}{=} o(n^{-\frac{\alpha-1}{2}})$ donc $\dfrac{\ln^\beta n}{n^\alpha} \underset{n \to +\infty}{=} o(n^{-\frac{\alpha+1}{2}})$. La série $n^{-\frac{\alpha+1}{2}}$ est une série de Riemann absolument convergente puisque $\dfrac{\alpha+1}{2} > \dfrac{1+1}{2} = 1$ ce qui implique, par les critères usuelles de domination des séries, la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\ln^\beta n}{n^\alpha}$. ■

Proposition 2

1. *La fonction zéta restreinte à* $]1,+\infty[$ *est une fonction de classe* C^∞ *et sa dérivée* $k^{\text{ème}}$ *est donnée par*

$$\zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln^k n}{n^s}. \tag{1}$$

En outre, pour tout entier $k \geqslant 0$, *la convergence de la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^k \ln^k n}{n^s}$ *est normale sur tout intervalle de la forme* $[a,+\infty[$ *avec* $a > 1$.

2. *Plus généralement la fonction zéta est une fonction holomorphe sur le demi-plan* $\{s \in \mathbb{C}$ *tel que* $\mathrm{Re}(s) > 1\}$.*et sa dérivée* $k^{\text{ème}}$ *est donnée par la formule 1. La convergence de la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^k \ln^k n}{n^s}$ *est normale sur tout demi-plan* $\{s \in \mathbb{C}$ *tel que* $\mathrm{Re}(s) \geqslant a\}$ *avec* $a > 1$.

Preuve :

1. On procède par récurrence.. On considère un réel $a > 1$ et on pose $\mathcal{H}_k$:

$$\zeta \text{ est de classe } C^k \text{ sur } [a,+\infty[\text{ et } \zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln^k n}{n^s}.$$

$\mathcal{H}_0$ est trivialement vérifiée. Supposons que $\mathcal{H}_k$ soit vérifiée et posons $u_{n,k}(s) = \dfrac{(-1)^k \ln^k n}{n^s}$.
La fonction $s \mapsto n^{-s} = e^{-s\ln n}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $s \mapsto -(\ln n)e^{-s\ln n} = \dfrac{-\ln n}{n^s}$ donc la fonction $s \mapsto u_{n,k}(s)$ est de classe C^1 et sa dérivée est donnée par

$$u'_{n,k}(s) = \frac{(-1)^{k+1} \ln^{k+1} n}{n^s} = u_{n,k+1}.$$

Pour tout réel s tel que $s \geqslant a$, on a

$$|u_{n,k}(s)| \leqslant |u_{n,k}(a)| \tag{2}$$

et le lemme 1 montre que la série $\sum_{n\geqslant 1} |u_{n,k}(a)|$ converge, ce qui justifie la convergence normale sur $[a,+\infty[$ des séries $\sum_{n\geqslant 1} u_{n,k}(s)$ et $\sum_{n\geqslant 1} u'_{n,k}(s) = \sum_{n\geqslant 1} u_{n,k+1}(s)$. Le théorème de dérivation des fonctions de classe C^1 montre que la fonction $\zeta^{(k)}$ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et que sa dérivée est

$$(\zeta^{(k)})'(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_{n,k}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \ln^{k+1} n}{n^s}.$$

Ainsi la fonction ζ est de classe C^{k+1} sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée $(k+1)^{\text{ème}}$ est égale à $\zeta^{(k+1)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1} \ln^{k+1} n}{n^s}$, ce qui demontre la véracité de la propriété $\mathcal{H}_{k+1}$ et achève la récurrence.
La fonction ζ est de classe C^∞ sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ $(a > 1)$ donc elle de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$.

2. La convergence normale de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^k \ln^k n}{n^s}$ sur tout demi-plan $\{s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) \geqslant a\}$ avec $a > 1$ ce démontre avec la formule 2 et le lemme 1. Pour tout entier n, la fonction $u_n(s) = \dfrac{1}{n^s}$ est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) \geqslant a\}$ donc sa somme ζ est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) \geqslant a\}$ quelque $a > 1$ ce qui achève la preuve.

■

Lemme 2
$\zeta(s)$ tend vers $+\infty$ lorsque s tend vers 1^+ dans $\mathbb{R}$.

Preuve :
La fonction $s \mapsto \zeta(s)$ est une fonction décroissante à valeurs positives (comme somme de fonctions décroissantes) donc elle admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Supposons que cette limite L soit finie. Pour tout entier N et tout réel $s > 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leqslant \zeta(s) \leqslant L.$$

Pour N fixé, on fait tendre s vers 1, ce qui nous fourni l'inégalité $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leqslant L$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est à termes positifs donc la suite de ces sommes partielles est croissante. L'inégalité précédente montre que cette suite est bornée donc elle converge, ce qui implique que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est convergente, ce qui est faux. Ainsi $\lim\limits_{s\in\mathbb{R},\ s\to 1^+} \zeta(s) = +\infty$. ■

2 Développement eulérien

Proposition 3 (Développement eulérien)
Soient $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers de $\mathbb{N}$ et s un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$.
Le produit $\prod\limits_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$ converge uniformément sur tout demi-plan de la forme $\{s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) \geqslant a\}$ avec $a > 1$.et

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > 1,\ \zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}. \tag{3}$$

Preuve :
Pour tout entier $n \geqslant 1$, p_n désigne le $n^{\grave{e}me}$ nombre premier. On introduit la suite u définie par $u_n(s) = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1-p_k^{-s}}$.
Pour tout entier k, on a $\left|p_k^{-s}\right| = p_k^{-\mathrm{Re}(s)} < \frac{1}{p_k} < \frac{1}{2}$ ce qui nous fournit l'égalité $\frac{1}{1-p_k^{-s}} = \sum\limits_{j_l=0}^{+\infty} p_k^{-j_k s}$. Cette dernière série est sommable et en réinjectant cette identité dans u_n, on obtient, à l'aide des propriétés usuelles des séries sommables, l'identité suivante :

$$u_n(s) = \prod_{k=1}^{n} \sum_{j_l=0}^{+\infty} p_k^{-j_k s} = \sum_{(j_1,..,j_n)\in\mathbb{N}^n} p_1^{-j_1 s}..p_n^{-j_n s} = \sum_{(j_1,..,j_n)\in\mathbb{N}^n} (p_1^{j_1}..p_n^{j_n})^s$$

Lorsque $(j_1, .., j_n)$ décrit $\mathbb{N}^n$, l'entier $p_1^{j_1}..p_n^{j_n}$ décrit tous les nombres entiers dont les seuls diviseurs premiers sont parmi la famille $\{p_1, .., p_n\}$. La différence entre $\zeta(s)$ et $u_n(s)$ est de la forme $\sum\limits_{m} \frac{1}{m^s}$ où la sommation porte sur tous les entiers qui possède un diviseur n'appartenant pas à $\{p_1, .., p_n\}$. En particulier, tous ces entiers sont supérieurs ou égaux à $p_{n+1} \geqslant n+1$ ce qui justifie que pour tout $a > 1$, on a :

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) \geqslant a,\ \ |\zeta(s) - u_n(s)| \leqslant \sum_{m\geqslant p_{n+1}} \left|\frac{1}{m^s}\right| = \sum_{m\geqslant n+1} \frac{1}{m^{\mathrm{Re}(s)}} \leqslant . \sum_{m\geqslant n+1} \frac{1}{m^a}$$

La somme $\sum\limits_{m\geqslant n+1} \frac{1}{m^a}$ est le reste partiel d'ordre n de la série de Riemann de paramètre $a > 1$ donc $\sum\limits_{m\geqslant n+1} \frac{1}{m^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$ 0. La suite (u_n) converge uniformément sur tout demi-plan $\{s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) \geqslant a\}$ vers ζ et

$$\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty} u_n(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

■

Corollaire 1
Quel que soit le nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\zeta(s) \neq 0$.

Preuve :
Pour tout nombre premier p, l'inégalité triangulaire montre que $|1 - p^{-s}| \leqslant 1 + p^{-\mathrm{Re}(s)}$ donc $|\zeta(s)| \geqslant \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1+p^{-\mathrm{Re}(s)}}$.
Soit $w_n(s) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+p_k^{-\mathrm{Re}(s)}}$. Ce produit n'est jamais nul et nous pouvons considérer son logarithme :$-\ln w_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+p_k^{-\mathrm{Re}(s)})$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \ln(1+p_n^{-\mathrm{Re}(s)})$ est une série à termes positifs et, puisque $p_n^{-\mathrm{Re}(s)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on obtient l'équivalent suivant : $\ln(1+p_n^{-\mathrm{Re}(s)}) \underset{n\to+\infty}{\sim} p_n^{-\mathrm{Re}(s)}$. La nature de la la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln(1+p_n^{-\mathrm{Re}(s)})$ est la même que la série $\sum_{n\geqslant 1} p_n^{-\mathrm{Re}(s)}$. Il est évident que $p_n \geqslant n$ donc on a la majoration : $p_n^{-\mathrm{Re}(s)} \leqslant n^{-\mathrm{Re}(s)}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} n^{-\mathrm{Re}(s)}$ est une série de Riemann convergente. On en déduit que les séries $\sum_{n\geqslant 1} p_n^{-\mathrm{Re}(s)}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \ln(1+p_k^{-\mathrm{Re}(s)})$ convergent. Si S désigne la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln(1+p_k^{-\mathrm{Re}(s)})$, la suite w converge vers $e^{-S} > 0$ donc $|\zeta(s)| > 0$ $\forall s$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$. ∎

Corollaire 2
On a le développement asymptotique suivant

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \underset{s\in\mathbb{R},\ s\to 1^+}{=} -\ln(s-1) + A + o(1)$$

où A est une certaine constante réelle. En particulier, la série $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$ diverge.

Preuve :
Soit $s > 1$ un nombre réel , le corollaire 1 nous permet de considérer $\ln\zeta(s)$. Il est aisé de vérifier que

$$\ln\zeta(s) = -\sum_{p\in\mathcal{P}} \ln(1-p^{-s}) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^{-ns}}{n}$$

(par le développement en série entière de $-\ln(1-x)$. La famille $(\frac{p^{-ns}}{n})_{p\in\mathcal{P},n\geqslant 1}$ est sommable donc l'égalité suivante est vérifiée :

$$\ln\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{p^{-ns}}{n} = \sum_{p\in\mathcal{P}} p^{-s} + \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{p^{-ns}}{n}.$$

Pour tout nombre premier p,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{p^{-ns}}{n} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} p^{-ns} = \frac{1}{2} \frac{p^{-2s}}{1-p^{-s}} \leqslant \frac{1}{2} \frac{p^{-2s}}{1-p^{-1}} \leqslant p^{-2s}$$

donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{p^{-ns}}{n} = \sum_{p\in\mathcal{P}} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{p^{-ns}}{n} \leqslant \sum_{p\in\mathcal{P}} p^{-2s} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2s} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} = \zeta(2)$$

La fonction $s \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{p^{-ns}}{n}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$ et est majorée donc elle possède une limite finie A' lorsque s tend vers 1. En particulier,

$$\ln\zeta(s) \underset{s\in\mathbb{R},\ s\to 1^+}{=} \sum_{p\in\mathcal{P}} p^{-s} + A' + o(s-1) \tag{4}$$

L'exercice 1 montre que $\zeta(s) \underset{s\in\mathbb{R},\, s\to 1^+}{=} \dfrac{1}{s-1} + O(1)$ donc

$$\ln\zeta(s) \underset{s\in\mathbb{R},\, s\to 1^+}{=} \ln\left(\frac{1}{s-1} + O(1)\right) = -\ln(s-1) + \ln(1+O(s-1)) = -\ln(s-1) + o(s-1). \tag{5}$$

Les identités 4 et 5 démontrent le développement asymptotique de $\sum\limits_{p\in\mathcal{P}} \dfrac{1}{p^s}$.

Si la série $\sum\limits_{p\in\mathcal{P}} \dfrac{1}{p}$ converge alors quelque soit $s > 1$,

$$-\ln(s-1) + A + o(1) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \leqslant \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$$

et en faisant tendre s vers 1, on obtient $+\infty \leqslant \sum\limits_{p\in\mathcal{P}} \dfrac{1}{p}$! ■

3 Exercices

Exercice 1
A l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $\zeta(s) \underset{s\in\mathbb{R},\, s\to 1^+}{=} \dfrac{1}{s-1} + O(1)$.

Si vous aimez manipuler les familles sommables, c'est le moment ou jamais.

Exercice 2 (Issu de W.F. Ellison Prime Number)
Démontrer les égalités suivantes

1. $\zeta^2(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{d_n}{n^s}$ si $\mathrm{Re}(s) > 1$ et où d_n désigne la somme des diviseurs de n ($d_n = \sum\limits_{d|n} d$).
2. $\zeta(s)\zeta(s-a) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sigma_a(n)}{n^s}$ où a est un réel, $\mathrm{Re}(s) > a+1$ et $\sigma_a(n) = \sum\limits_{d|n} d^a$

Exercice 3 (Issu de W.F. Ellison Prime Number)
A l'aide du développement eulérien de ζ (cf. proposition 3) et développement en série convenable, démontrer les identités remarquables suivantes

1. $\dfrac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|\mu(n)|}{n^s}$ où $\mathrm{Re}(s) > 1$ et μ désigne la fonction de Möbius (ce n'est pas le célèbre dessinateur !) définie par
$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n = p_1..p_r \text{ où les } p_i \text{ sonr des nombres premiers deux à deux distincts} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$
2. $\dfrac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^{\nu(n)}}{n^s}$ où $\nu(n)$ est le nombre de facteurs distincts divisant n et $\mathrm{Re}(s) > 1$.
3. $\dfrac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{d_n^2}{n^s}$ où $d_n = \sum\limits_{d|n} d$ et $\mathrm{Re}(s) > 1$.
4. $\dfrac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\lambda(n)}{n^s}$ où $\mathrm{Re}(s) > 1$et $\lambda(n) = (-1)^r$ si n est le produit de r nombres premiers distincts (par exemple $\lambda(1575\,000) = \lambda(2^3 \times 3^2 \times 5^5 \times 7) = 4$).
5. $\dfrac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\varphi(n)}{n^s}$ où $\mathrm{Re}(s) > 2$ et φ désigne la fonction d'Euler définie par $\varphi(n) = card(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)$.