La formule sommatoire de Poisson

Abdellah Bechata

www.mathematiques.ht.st

Table des matières

Résumé

L'objectif de cette section n'est pas de développer la théorie de la transformation de Fourier (qui sera établi dans un autre article) mais uniquement la définir afin de démontrer une formule fondamentale, la formule sommatoire de Poisson ainsi qu'une relation fonctionnelle. Nous appliquerons ces résultats au prolongement de la fonction zêta.

1 La formule sommatoire de Poisson

Définition 1

Soit u une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, intégrable sur $\mathbb{R}$. On appelle transformée de Fourier de u la fonction $\mathcal{F}u$ définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ (\mathcal{F}u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-2\pi i x\xi}\ dx.$$

La tranformée de Fourier de u se note également $\widehat{u}$.

En général, la transformée de Fourier d'une fonction intégrable n'est pas intégrable (ce fait sera établit sur des exemples explicites en exercices).Elle est par contre toujours bornée comme on peut s'en convaincre par l'inégalité triangulaire. La transformée de Fourier intervient

- en physique, par exemple, dans les théories suivantes
  - en électricité, la fonction de transfert d'un système est le quotient de la transformée de Fourier du signal de sortie par la transformée de Fourier du signal d'entrée
  - en optique physique
  - en théorie du signal (imagerie, etc.), l'ensemble fréquentiel est simplement le support de la transformée de Fourier du signal (le support d'une fonction est l'adhérence des points qui n'annulent pas la fonction).
- en probabilité, la généralisation de la formule des probabilités totales se généralisent à des variables continues. Elle fait intervenir des produits de convolution que l'on calcule à l'aide de la transformée de Fourier.
- en mathématiques dans tous les domaines de l'analyse et dont la généralisation est l'un des problèmes majeurs de la théorie des représentations des groupes.
- en informatique via la transformation de Fourier rapide (par exemple, la multiplication des polynômes)

Théorème 1 (Formule sommatoire de Poisson)

Soit $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que, pour $k = 0, 1, 2$, les fonctions $x \mapsto (1 + x^2)u^{(k)}(x)$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. Alors les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u(n)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}u)(n)$ sont sommables et l'identité suivante est vérifiée :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}u)(n) \tag{1}$$

Preuve :
Si C_k désigne le nombre réel (fini) $\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)\left|u^{(k)}(x)\right|$, la majoration

$$\left|u^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{C_k}{1+x^2} \tag{2}$$

est satifaite pour tout réel x. : en particulier $u^{(k)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $u^{(k)}(x) \underset{x\mapsto\pm\infty}{\rightarrow} 0$ et $\mathcal{F}u^{(k)}$ est une fonction bornée.
On introduit la fonction $g(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} u(x+n)$. Les majorations 2 montrent que, pour tout entier $k = 0, 1, 2$, les séries de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u^{(k)}(.+n)$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$: par conséquent la famille $(u(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. Le théorème de dérivation des séries de fonctions montrent que la fonction g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u^{(k)}(x+n).$$

En outre, cette fonction g est clairement 1-périodique donc on peut la développer en série de Fourier. Calculons ses coefficients $c_m(g)$ (car g est à priori à valeurs complexes).

$$c_m(g) = \int_0^1 g(x)e^{-2\pi imx}\ dx = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(x+n)e^{-2\pi imx}\ dx.$$

La majoration 2 pour $k = 0$ montre que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left|u(x+n)e^{-2\pi imx}\right|\ dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 |u(x+n)|\ dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} |u(x)|\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|\ dx < +\infty.$$

Nous pouvons alors appliquer le théorème de permutation des séries et intégrales de Lebesgue à $c_m(g)$.

$$c_m(g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 u(x+n)e^{-2\pi imx}\ dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} u(x)e^{-2\pi imx}\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-2\pi imx}\ dx = (\mathcal{F}u)(m).$$

Le théorème de Dirichlet appliqué à g qui, rappelons-le, est de classe C^2 montre que la série

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(g) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}u)(m)$$

est sommable et que l'identité suivante est vérifiée :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)e^{2\pi inx} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}u)(n)e^{2\pi inx}.$$

L'identité souhaitée en découle en prenant $x = 0$. ∎

2 Transformée de Fourier de la gaussienne

La Gaussienne est la fonction $x \overset{\Phi}{\mapsto} \exp(-\pi x^2)$.
Elle joue un rôle extrêmement important en mathématiques. Elle intervient en particulier

- en probabilité : la loi normale (ou loi de Gauss) a pour densité la gaussienne (convenablement normalisée) et certains théorèmes montrent que, sous certaines hypothèses, les moyennes de Césaro de variables aléatoires convergent vers une variable aléatoire suivant une certaine loi normale (loi des grands nombres)
- en physique statistique : sous des hypothèses naturelles (isotropie, etc.), on montre que la distribution des vitesses des atomes suit une loi normale. On en déduit la loi des gaz parfaits, des équations de diffusion, de nombreuses contantes thermodynamiques. N'hésitez pas à de demander de plus amples renseignements à votre prof de physique, il sera ravi de vous en parler.
- en physique quantique : l'analogue du bon vieux ressort de la physique classique s'appelle l'oscillateur harmonique dont l'état d'énergie minimal est associé à la Gaussienne.

– en mathématiques : elle fournit de sympathiques approximations de l'unité, elle intervient dans la résolution de l'équation de la chaleur et, de façon plus fondamentale, elle est intrinsèquement associée à certains sous-espaces particulièrement important de représentations de $SL(2,\mathbb{R})$, ce qui implique son intervention en analyse et en physique.

Théorème 2 (Transformée de la gaussienne)
Si $\Phi(x) = \exp(-\pi x^2)$ *alors* $(\mathcal{F}\Phi) = \Phi$.

Preuve :
Pour expliciter $(\mathcal{F}\Phi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x^2)e^{-2\pi i x\xi}dx$, nous allons montrer qu'elle satisfait à une équation différentielle du premier ordre.
La fonction $(x,\xi) \mapsto \exp(-\pi x^2)e^{-2\pi i x\xi}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. En outre, les inégalités suivantes sont vérifiées

$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^2 \quad \left|\exp(-\pi x^2)e^{-2\pi i x\xi}\right| \leqslant \exp(-\pi x^2) \quad \text{et} \quad \left|\frac{d}{d\xi}(\exp(-\pi x^2)e^{-2\pi i x\xi})\right| \leqslant 2\pi x \exp(-\pi x^2).$$

Pour appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$, il suffit de jusitifer que les fonctions $x \mapsto \exp(-\pi x^2)$ et $x \mapsto x\exp(-\pi x^2)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Je le laisse en exercice (au voisinage de ∞, les comparer à $\frac{1}{\xi^2}$).
La fonction $\xi \mapsto (\mathcal{F}\Phi)(\xi)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$\frac{d}{d\xi}(\mathcal{F}\Phi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi}(\exp(-\pi x^2)e^{-2\pi i x\xi})dx = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x\exp(-\pi x^2)e^{-2\pi i x\xi}dx.$$

Nous sommes tentés par une intégration par partie mais elle n'est valable (à priori) que sur les segments. Pour contourner le problème, on intègre sur un segment $[-A, A]$, on effectue l'intégration par partie (en intégrant $x \mapsto -2\pi x \exp(-\pi x^2)$) puis on fait tendre A vers $+\infty$. On obtient alors

$$\frac{d}{d\xi}(\mathcal{F}\Phi)(\xi) = 2\pi\xi \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x^2)e^{-2\pi i x\xi}dx = 2\pi\xi(\mathcal{F}\Phi)(\xi).$$

Cette équation différentielle se résoud traditionnellement d'où, pour une certaine constante C,

$$(\mathcal{F}\Phi)(\xi) = C\exp(-\pi\xi^2).$$

Pour déterminer C, nous évaluons cette identité en $\xi = 0$ donc $C = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x^2)dx = 1$ (on utilise que $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)dx = \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ce qui a été démontré dans l'article sur la fonction Γ) ce qui achève la preuve. ∎

3 Application

On introduit une nouvelle fonction d'une variable réelle, notée Θ, définie par

$$\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-n^2\pi x). \tag{3}$$

– Si $x < 0$, le terme général $\exp(-n^2 x)$ diverge grossièrement,
– si $x = 0$ il est constant et égale à 1,
– si $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} n^2\exp(-n^2 x) = 0$ donc la famille $(\exp(-n^2 x))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

Cette fonction Θ est donc définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ et elle correspond au membre de gauche de la formule sommatoire de Poisson (cf. formule 1) pour la fonction $y \overset{u}{\mapsto} \exp(-y^2 x)$. Calculons la transformée de Fourier de u.

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}u)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2\pi x)\exp(-2\pi i y\xi)dy = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi y^2)\exp(-2\pi i\frac{y}{\sqrt{x}}\xi)dy \quad (y' = y\sqrt{x})\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi y^2)\exp(-2\pi i y\frac{\xi}{\sqrt{x}})dy = \frac{1}{\sqrt{x}}(\mathcal{F}\Phi)(\frac{\xi}{\sqrt{x}})\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\exp(-\pi\frac{\xi^2}{x}).\end{aligned}$$

On en déduit (par la formule sommatoire de Poisson) la belle relation fonctionnelle

$$\forall x > 0 \quad \Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta(\frac{1}{x}). \tag{4}$$

4 Exercices

Exercice 1 (Régularité de la fonction Θ)
Θ désigne la fonction définie par la formule 3

1. Montrer que Θ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^\times$ et caculer sa dérivée $n^{ème}$ (on pourra s'inspirer de la preuve pour la focntion zêta).
2. Déterminer la limite quand $x \to +\infty$ de Θ.
3. En déduire un équivalent de Θ en 0 (on utiliser à profit l'équation fonctionnelle 4)
4. Pour x fixé, encadrer $\Theta(x)$ par la méthode de comparaison série-intégrale appliquée à la fonction

$$y \overset{u}{\mapsto} \exp(-y^2 x).$$

   Retrouver ainsi l'équivalent de la fonction précédente.

Exercice 2
Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$ possède une transformée de Fourier et la calculer.
(on connait les primitives des fonctions $x \mapsto e^{ax}$ si $a \in \mathbb{C}$).