Une approche heuristique de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta

Abdellah Bechata
www.mathematiques.ht.st

Table des matières

Résumé

Nous introduisons dans cet article, la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$ ainsi que la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^\times$ qui, si elle est restreinte aux fonctions paires n'est autre que la transformation de Mellin. A l'aide de ces outils, on montre formelle l'équation fonctionnelle de la fonction zêta et nous parlons des conjectures de Riemann. La méthode développée ici a été élaborée par André Unterberger dans l'étude des formes automorphes, ce qui lui a permis de retrouver les équations fonctionnelles des séries d'Eisenstein ainsi que leurs prongements. Elle est très jolie

1 Les caractères du groupe $(\mathbb{R},+)$

Dans l'article consacré à l'analyse de Fourier sur les groupes finis commutatifs, nous avons défini le dual unitaire d'un groupe G commutatif fini.
Si nous extrapolons cette définition au groupe commutatif $\mathbb{R}$, nous appelerions "caractère" de $\mathbb{R}$ tout morphisme de groupe de $(\mathbb{R},+)$ dans $(S^1,\times)$ (où $S^1=\{z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|=1\}$, c'est-à-dire toute application de $\mathbb{R}$ dans S^1 telle que

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\quad f(x+y)=f(x)f(y). \tag{1}$$

Soit g une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\quad g(x+y)=g(x)+g(y) \tag{2}$$

alors la fonction $f(x)=\exp(2\pi i f(x))$ satisfait bien à l'équation 1 donc f est un "caractère" de $(\mathbb{R},+)$.
Cherchons pour commencer à déterminer toutes les applications satisfaisant à 2.

Première étape : $g(0)=g(0+0)=g(0)+g(0)$ donc $g(0)=0$.

Soit x un nombre réel, on a

$$g(x+(-x))=g(x)+g(-x)\Leftrightarrow g(0)=g(x)+g(-x)$$

donc $g(-x)=-g(x)$, ce qui implique que la fonction g est impaire

Deuxième étape : Soit x un réel et n un entier positif.

$$g((n+1)x)=g(nx+x)=g(nx)+g(x)$$

On montre alors par récurrence que $\forall n\geqslant 0$, $g(nx)=ng(x)$, puis par imparité que $g(nx)=ng(x)$ $\forall n\leqslant 0$. Par conséquent

$$\forall x\in\mathbb{R} \text{ et } \forall n\in\mathbb{R}, \text{ on a : } g(nx)=ng(x)$$

Troisème étape : Soit x un nombre réel et $\frac{p}{q}$ un rationnel. Les égalités suivantes sont vérifiées

$$pg(x) = g(px) = g(q \times \frac{p}{q}x) = qg(\frac{p}{q}x)$$

donc $g(\frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}g(x)$, ce qui implique que pour tout rationnel a,

$$g(ax) = ag(x) \tag{3}$$

.En particulier, pour tout rationnel a, on

$$g(a) = ag(1)$$

.

Quatrième étape : Nous savons maintenant que la fonction g coïncide sur $\mathbb{Q}$ avec la fonction $x \mapsto xg(1)$.

Si g est continue, on conclut que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = xg(1)$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Malheuresement, ce n'est pas à priori le cas. En fait, si l'on émet aucune autre hypothèse sur g, les formules 2 et 3 montrent que g n'est rien d'autre d'une application linéaire du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Nous admettons que tout espace vectoriel E sur un corps quelconque k admet une base (sans être nécessairement de dimension fini) : la preuve est basé sur un postulat (indispensable) qui porte le nom de "lemme de Zorn"

Notons $\mathcal{B}$ une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ étant non dénombrable et $\mathbb{Q}$ étant dénombrable, on en déduit que la base $\mathcal{B}$ est d'ordinal continu (i.e. $\mathcal{B}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$, modulo l'hypothèse du continu !).

Tout le monde sait que la connaissance de l'image d'une base par une application linéaire caractérise cette application linéaire.Par conséquent, la connaissance de g se réduit à la connaissance d'une application quelconque de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire,à peu de chose près, à n'importe quoi. Plus exactement l'ensemble des applications g satisfaisant à 2 est en bijection avec l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ouf) qui est beaucoup plus gros que $\mathbb{R}$:au sens des bijections, il existe une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mais il n'existe pas d'injection de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Comme nous venons de le voir, ne pas imposer de conditions de continuité à g revient à obtenir à peu près n'importe quelle fonction. On peut obtenir également n'importe quoi comme caractère de $\mathbb{R}$. Il suffit pour cela de considérer que g est à valeur dans $]0,1[$, qui est bijection avec $\mathbb{R}$, et l'application $f = \exp(2\pi g)$ est un caractère de $(\mathbb{R},+)$ non trivial. Cette situation est peu satisfaisant par rapport à la situation des groupes finis commutatifs (et elle interviendra souvent dans le passge du cas fini au cas non fini). C'est pour cela que nous devons imposer la continuité des caractères ce qui nous amène à la définition

Définition 1

On appelle caractère additif de $\mathbb{R}$ tout morphisme continu de $(\mathbb{R},+)$ dans $(S^1,\times)$ c'est-à-dire toute application continue de $\mathbb{R}$ dans S^1 telle que

$$\forall x,y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x)f(y) \tag{4}$$

On note $\widehat{\mathbb{R}}$ le dual unitaire du groupe $(\mathbb{R},+)$ c'est-à-dire le groupe multiplicatif des caractères additifs de $\mathbb{R}$.

Théorème 1

Tout caractère additif de $\mathbb{R}$ est de la forme $t \mapsto \exp(2\pi iax)$ où $a \in \mathbb{R}$ et le groupe $(\widehat{\mathbb{R}},\times)$ est isomorphe à $(\mathbb{R},+)$

Preuve :

Pour commencer $f(0+0) = f(0)^2$ donc $f(0) = 1$ ou $f(0) = 0$. Si $f(0) = 0$ alors $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$ ce qui absurde car $f(x) \in S^1$.

Le caractère f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle possède donc des primitives : notons F la primitive qui s'annule en 0 i.e. $F(s) = \int_0^s f(x)dx$. Intégrons maintenant l'équation 4 relativement à la variable x sur l'intervalle $[0,s]$:

$$\int_0^s f(x+y)dx = f(y)\int_0^s f(x)dx \Leftrightarrow \int_y^{s+y} f(x)dx = f(y)\int_0^s f(x)dx$$

donc

$$\forall y, s \in \mathbb{R} \qquad F(s+y) - F(y) = f(y)F(s). \tag{5}$$

Nous avons envie de diviser par $F(y)$ mais il faut néanmoins montrer que si s est suffisamment petit et non nul alors $F(s) \neq 0$.
On sait que $f(0) = 1$ donc par continuité de f en 0 et en choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|s| < \alpha \Rightarrow |f(s) - 1| < \dfrac{1}{2}$. Ainsi, si $|s| < \dfrac{1}{2}$, on a

$$|F(s) - s| = \left| \int_0^s (f(x) - 1) dx \right| \leqslant \int_0^{|s|} |f(x) - 1| \, dx \leqslant \int_0^{|s|} \frac{1}{2} = \frac{|s|}{2}$$

d'où

$$|s| \leqslant |(F(s) - s) + F(s)| \leqslant |F(s) - s| + |F(s)| \leqslant \frac{|s|}{2} + |F(s)|$$

ce qui permet d'obtenir $\forall s$ tel que $|s| < \alpha$, $|F(s)| \geqslant \dfrac{|s|}{2} > 0$ si $s \neq 0$. Fixons un tel s. L'égalité 5 montre que la fonction $y \mapsto f(y) = \dfrac{F(s+y) - F(y)}{F(s)}$ est égale à la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ce qui implique que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
En dérivant, relativement à la variable x, l'identité 4, on obtient l'équation

$$f'(x+y) = f(y)f'(x)$$

et nous fixons $x = 0$, ce qui nous donnel'équation différentielle

$$f'(y) = f'(0)f(y)$$

dont les solutions sont de la forme $f(x) = C\exp(f'(0)x)$. On sait que $f(0) = 1$ donc $C = 1$ et la fonction f est de la forme $x \mapsto \exp(f'(0)x)$.
Or, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = 1$ et $|\exp(f'(0)x)| = \exp(\mathrm{Re}(f'(0))$ donc $f'(0)$ est nécessairement un imaginaire pur, que l'on peut écrire sous la forme $2\pi i a$.
En conclusion, tous les caractères de $\mathbb{R}$ sont de la forme $x \mapsto \exp(2\pi i a x)$, où a est un nombre réel et toutes les fonctions de ce type sont des caractères (je vous le laisse vérifier).
Pour l'isomorphisme, il suffit de considérer $T : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}} \\ a \mapsto (x \mapsto \exp(2\pi i a x)) \end{array} \right.$. Je vous laisse vérifier qu'il s'agit bien d'un morphisme $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\widehat{\mathbb{R}}, \times)$. La surjectivité provient de la première partie du théorème.
Soit $a \in \ker T$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(2\pi i a x) = 1$. On fixe $x = 1$ donc $a \in \mathbb{Z}$ puis $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $a \in \sqrt{2}\mathbb{Z}$. Or $\mathbb{Z} \cap \sqrt{2}\mathbb{Z} = [0\}$ donc $x = 0$, ce qui prouve l'injectivité. ■

2 La transformée de Fourier sur $(\mathbb{R}, +)$

Par analogie avec le cas des groupes finis commutatifs, on se dit que l'on peut définir la transformation de Fourier d'une fonction u par

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \frac{1}{|\mathbb{R}|^{\frac{1}{2}}} \sum_{x \in \mathbb{R}} u(x) \overline{\exp(2\pi i x \xi)} = \frac{1}{|\mathbb{R}|^{\frac{1}{2}}} \sum_{x \in \mathbb{R}} u(x) \exp(-2\pi i x \xi)$$

ce qui, après réflexion peut sembler saugrenu ! Comme vous l'avez surement remarqué en physique ou en math, lorsque l'on veut sommer

- sur une partie infinie dénombrable on remplace, le symbole somme par la somme d'une série
- sur une partie infinie continue, on remplace le symbole somme par le symbole intégrale.

C'est une première ébauche mais que faire de $\dfrac{1}{|\mathbb{R}|^{\frac{1}{2}}}$!

Dans le cas des groupes finis, on somme nos termes sur tous les éléments du groupe mais en pondérant par un terme constant tel que, la formule de Parseval soit vérifiée. On se dit alors qu'une bonne définition de la transformation de Fourier serait

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = C \int\limits_{\mathbb{R}} u(x) \exp(-2\pi i x\xi) dx$$

où C est une constante permettant d'obtenir l'égalité de Parseval i.e.,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}u|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} |u|^2 \tag{6}$$

Bizarre, bizarre, j'ai l'impression d'avoir déjà vu cela quelque part, par exemplepeut-être dans l'article sur la formule de Poisson. Dans cet article, on a justement montrer que $\mathcal{F}u = u$ si $u(x) = \exp(-\pi x^2)$. Nous appliquons cette dernière identité à l'égalité de Parseval 6, ce qui donne $C = 1$ (car on peut supposer $C > 0$)

Définition 2
On appelle transformée de Fourier d'une fonction $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $\mathcal{F}u$ définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad (\mathcal{F}u)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} u(x) \exp(-2\pi i x\xi) dx$$

Maintenant que l'on a une définition de la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$, à quelle condition sur u peut-on définir sa transformée de Fourier ? Il est impératif que u soit intégrable sur $\mathbb{R}$ ainsi que son carré (pour avoir une formule de Parseval).
Cette condition est nécessaire et suffisante (je ne le ferais pas dans cet article) et il est résumé dans le théorème suivant qui est l'analogue (presque parfait) du théorème de Fourier des groupes finis.

Théorème 2
La transformation de Fourier est une isométrie de $L^1(\mathbb{R}, dx) \cap L^2(\mathbb{R}, dx)$ sur lui-même.
L'espace $L^1(\mathbb{R}, dx) \cap L^2(\mathbb{R}, dx)$ étant dense dans $L^2(\mathbb{R}, dx)$, muni de sa norme naturel, la transformation de Fourier se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R}, dx)$ sur lui-même.
En outre, on a la formule d'inversion de Fourier donné par

$$\forall u \in L^1(\mathbb{R}, dx) \cap L^2(\mathbb{R}, dx) \quad u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} u(\xi) \exp(2\pi i \xi x) dx \tag{7}$$

Rappel : pour tout réel $p \geqslant 0$, l'espace $L^p(\mathbb{R}, dx)$ désigne l'espace des fonctions f tels que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx < +\infty$.

Remarque : il est naturel que le second terme de l'égalité 7, le terme $\exp(2\pi i \xi x)$ apparaisse plutôt que $\exp(-2\pi i \xi x)$. Dans le cas des groupes, finis commutatifs, la formule d'inversion fait intervenir les caractères alors que la transformation de Fourier fait intervenir leurs conjugués

3 Les caractères du groupe $(\mathbb{R}^\times, \times)$

Nous ne refairons pas toutes les explications sur régularité des caractères de $\mathbb{R}^\times$.

Définition 3
On appelle caractère multiplicatif de $(\mathbb{R}_+^\times, \times)$ (ou encore caractère multiplicatif de $\mathbb{R}$) toute application continue de $\mathbb{R}^\times$ dans S^1 telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^\times \quad f(xy) = f(x)f(y). \tag{8}$$

L'ensemble des caractères multiplicatifs de $\mathbb{R}$ est noté $\widehat{\mathbb{R}^\times}$:il s'agit du dual unitaire de $\mathbb{R}^\times$ qui est un groupe multiplicatif (la multiplication étant la multiplication des fonctions).

Il existe deux exemples fondamentaux de caractères multiplicatifs de $\mathbb{R}$

- $t \mapsto |t|^{i\alpha}$ où α est un nombre réel
- $t \mapsto \mathrm{sgn}(t)$ où $\mathrm{sgn}(t) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } t > 0 \\ -1 \text{ si } t < 0 \end{array} \right.$. Il s'agit simplement de la fonction signe

Théorème 3

Tout caractère muliplicatif de $\mathbb{R}$ *est de la forme* $t \mapsto \mathrm{sgn}(t)^\delta |t|^{i\alpha}$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\delta \in \{\pm 1\}$ *et le groupe* $(\widehat{\mathbb{R}^\times}, \times)$ *est isomorphe à* $(\mathbb{R}, +) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Preuve :

$f(1^2) = (f(1))^2$ donc $f(1) = 0$ ou 1. Si $f(1) = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}^\times$, $f(x) = f(x.1) = f(x)f(1) = 0$ ce qui est absurde ($|f(x)| = 1$).

On introduit la primitive F de f qui s'annule en 1 i.e. $F(s) = \int\limits_1^s f(t)dt$.

Par le même type d'argument que dans la preuve du théorème 1, on obtient l'existence d'un s peti, non nul, tel que $f(y) = \dfrac{F(ys)}{yF(s)}$ si $y \neq 0$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$. On dérive, par rapport à x, l'équation 8, puis on fixe $x = 1$ ce qui donne

$$yf'(y) = f'(1)f(y)$$

donc les solutions sont de la forme

$$f(y) = \left\{ \begin{array}{ll} C_1 |y|^\alpha & \text{si } y > 0 \\ C_2 |y|^\alpha & \text{si } y < 0 \end{array} \right.$$

où $\alpha = f'(1)$ (Attention :dérivée nulle sur une union d'intervalle implique que la fonction est constante sur chaque intervalle mais la constante n'est pas nécessairement la même).

Or $C_2 = f(-1) = f(-1 \times 1) = f(-1)C_1$ et $1 = f(1) = C_1$donc

$$f(y) = \left\{ \begin{array}{rl} |y|^\alpha & \text{si } y > 0 \\ f(-1)\,|y|^\alpha & \text{si } y < 0 \end{array} \right.$$

Si $f(-1) = 1$ alors $f(y) = |y|^\alpha \ \forall y \neq 0$ et si $f(-1) = -1$ alors $f(y) = \mathrm{sgn}(y)\,|y|^\alpha \ \forall y \neq 0$.

Pour que f soit à valeurs dans S^1, il est nécessaire et suffisant que $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$.

L'isomorphisme est laisser au lecteur qui étudira $T : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \rightarrow & \widehat{\mathbb{R}^\times} \\ (\alpha, \delta) & \mapsto & (t \mapsto \mathrm{sgn}(t)^\delta |t|^\alpha) \end{array} \right.$

(en remarquant que $\delta = 0 \bmod 2$ alors $\mathrm{sgn}(t)^\delta = 1$ et $\delta = 1 \bmod 2$ alors $\mathrm{sgn}(t)^\delta = \mathrm{sgn}(t)$) ■

Remarque : voici le premier exemple de groupe (en l'occurence $\mathbb{R}^\times$) qui n'est pas isomorphe à son dual.

Contrairement aux cas des groupes finis, les morphismes continus d'un groupe dans $(\mathbb{C}^\times, \times)$ ne sont pas nécessairement unitaires. Par exemple : $t \mapsto t^2$ est un caractère non unitaire de $(\mathbb{R}^\times, \times)$. On appellera désormais quasi-caractère d'un groupe, tout morphisme continu de ce groupe à valeurs dans $(\mathbb{C}^\times, \times)$

Théorème 4

Tout quasi-caractère de $\mathbb{R}$ *est de la forme* $t \mapsto \mathrm{sgn}(t)^\delta |t|^\alpha$ *où* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\delta \in \{\pm 1\}$ *et le groupe* $(\widehat{\mathbb{R}^\times}, \times)$ *est isomorphe à* $(\mathbb{C}, +) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Preuve :

La preuve découle quasiment immédiatement de la preuve du théorème 8 ■

4 La transformation de Fourier (resp. Mellin) sur $(\mathbb{R}^\times, \times)$

Comme pour la transformation de Fourier sur $(\mathbb{R}, +)$, une définition naturelle est possibble pour la transformation de Fourier sur $(\mathbb{R}^\times, \times)$.

Naturellement la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^\times$ ne peut être notée $\mathcal{F}$ (c'est une marque réservée) : elle sera notée $\mathcal{M}_p$ (en l'hommage de .... Mellin ! et p pour partiel ! !). En voici, une définition plausible.

$$\forall(a,\delta)\in\mathbb{R}\times\{\pm1\}\quad (\mathcal{M}_p u)(a,\delta)=\int\limits_{\mathbb{R}^\times} u(x)\,\mathrm{sgn}(x)^\delta\,|x|^{-i\alpha}\,dx$$

Cette formule a néanmoins un inconvénient majeur.

– Dans le cas des groupes finis, nous effectuons le changement de variable $g' = gh$ (associé à la loi de groupe)dans les sommations et celles-ci sont invariantes par cette transformation

$$\forall h\in G \text{ et pour toute fonction } u \quad \sum_{g\in G} u(gh)=\sum_{g\in G} u(g)$$

où G est muni d'une loi multiplicative.

– Dans le cas de $(\mathbb{R},+)$, dans les intégrales nous pouvons effectuer le changement de variable $x' = x + y$ (associé à la loi de groupe) sans modifier les intégrales

$$\forall y\in\mathbb{R} \text{ et pour toute fonction } u \quad \int\limits_{\mathbb{R}} u(x+y)dx=\int\limits_{\mathbb{R}} u(x)dx$$

Par contre, sur $(\mathbb{R},\times)$, si l'on effectue un changement de variable $x' = xy$ (associé à la loi de groupe), l'intégrale est modifiée

$$\int\limits_{\mathbb{R}^\times} u(xy)dx=\frac{1}{y}\int\limits_{\mathbb{R}^\times} u(x)dx\neq\int\limits_{\mathbb{R}^\times} u(x)dx.$$

Nous n'y avons jamais préter attention jusqu'à maintenant mais ces formules jouent un rôle majeur dans toutes les preuves (je laisse le soin au lecteur de revoir en détail toutes les preuves).
La "mesure" dx n'est pas la bonne "mesure" pour le groupe $(\mathbb{R}^\times,\times)$ car elle ne tient pas compte de la structure du groupe. Par contre, la mesure $\dfrac{dx}{x}$ est invariante par dilatation i.e.

$$\forall y\in\mathbb{R} \text{ et pour toute fonction } u \quad \int\limits_{\mathbb{R}} u(xy)\frac{dx}{x}=\int\limits_{\mathbb{R}} u(x)\frac{dx}{x}$$

N.B : Sur un groupe G (muni d'une loi multiplicative), on dit qu'une "mesure" dg est une mesure de Haar ssi

$$\forall y\in G \text{ et pour toute fonction } u \quad \int\limits_{\mathbb{R}} u(gh)dg=\int\limits_{\mathbb{R}} u(g)dg$$

On démontre que tout groupe pas trop méchant (topologique, localement compact) possède une mesure de Haar et qu'elle est unique à une constante multiplicative près (> 0, bien entendu)
Nous donnons maintenant la bonne définition de la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^\times$

Définition 4
On appelle transformée de Fourier d'une fonction $u\in\mathcal{F}(\mathbb{R}^\times,\mathbb{C})$ intégrable sur $\mathbb{R}^\times$, la fonction $\mathcal{M}_p u$ définie par

$$\forall(a,\delta)\in\mathbb{R}\times\{\pm1\}\quad (\mathcal{M}_p u)(a,\delta)=\int\limits_{\mathbb{R}^\times} u(x)\,\mathrm{sgn}(x)^\delta\,|x|^{-i\alpha}\,\frac{dx}{x}$$

Nous ne donnerons pas ici, l'analogue du théorème de Parseval pour ce groupe car elle est plus complexe : jusqu'à maintenant le dual du groupe était isomorphe au groupe donc l'intégration de la transformation de Fourier se faisait sur le même groupe, ce qui n'est plus du tout le cas pour le groupe $\mathbb{R}^\times$, il faut intégrer la transformée de Fourier sur le dual.

Supposons que la fonction u soit une fonction paire, alors

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}_p u)(a,1) &= \int_{\mathbb{R}^\times} u(x)\,\mathrm{sgn}(x)\,|x|^{i\alpha}\,\frac{dx}{x} = \int_{\mathbb{R}^\times} u(-x)\,\mathrm{sgn}(-x)\,|-x|^{i\alpha}\,\frac{dx}{x} \text{ (en posant } x' = -x) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^\times} u(x)\,\mathrm{sgn}(x)\,|x|^{i\alpha}\,\frac{dx}{x} = -(\mathcal{M}_p u)(a,1)\end{aligned}$$

Ainsi $(\mathcal{M}_p u)(a,1) = 0$ si la fonction u est paire.
La transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^\times$ sur une fonction paire revient à la donnée de

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad (\mathcal{M}_p u)(a,0) = \int_{\mathbb{R}^\times} u(x)\,|x|^{-i\alpha}\,\frac{dx}{x}$$

On peut étendre la définition de la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^\times$ en ne considérant non plus les caractères mais les quasi-caractères Par contre, on ne peut plus espérer de formule de Parseval ou de forme d'inversion aussi simple (le caractère unitaire est perdu)

Définition 5
Soit f une fonction paire sur $\mathbb{R}^\times$. On appelle transformée de Mellin l'application d'une variable complexe définie par

$$(Mf)(s) = \int_{\mathbb{R}^\times} f(x)\,|x|^s\,\frac{dx}{x}.$$

En fait la transformée de Mellin n'est rien d'autre que l'extension, pour les fonctions paires, à l'ensemble des quasi-caractères de $\mathbb{R}_+^\times$ de la transformée de Fourier usuelle de $\mathbb{R}_+^\times$ qui est définie sur les caractères (modulo le remplacement de $\overline{s}$ par s, mais ce n'est pas très important)

Cette transformation de Mellin est définie sur les fonctions pour lesquelles il existe un nombre complexe tel que $x \mapsto f(x)x^{s_0}$ soit intégrable sur $(\mathbb{R}_+^\times, \dfrac{dx}{x})$ i.e. $\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|\, x^{\mathrm{Re}(s_0)-1} dx < +\infty$.
De telles fonctions existent :

- les fonctions dont le support est compact et contenu dans $]0,+\infty[$
- les fonctions continues sur $]0,+\infty[$ qui décroissent aussi vite qu'une exponentielle en $+\infty$ et qui sont négligeable en 0 à une fonction du type $\dfrac{1}{x^\alpha}$)

Dans le premier cas, la fonction Mf est définie sur $\mathbb{C}$ tout entier et je laisse le soin au lecteur de déterminer un ensemble sur lequel Mf est définie dans le deuxième cas.

N.B : déterminez les quasi-caractères de $(\mathbb{R},+)$ puis généralisez la transformation de Fourier de $(\mathbb{R},+)$ à une transformation de Fourier sur tous les quasi-caractères de $(\mathbb{R},+)$. Vous obtenez .... la transformation de Laplace ! Le monde est petit.
Je ne compte pas développer ici la théorie de la transformation de Mellin (qui est un outil important) : ceci sera fait ultérieurement

Exemple 1
La fonction Γ est la transformée de Mellin de la fonction $2e^{-|t|}$

Exemple 2
Calculer la transformée de Mellin de la gaussienne

$$\begin{aligned}M(x &\mapsto \exp(-\pi x^2))(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2)\,|x|^{s-1}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \exp(-\pi x^2)x^{s-1}dx \qquad (9)\\ &= 2 \times \frac{\pi^{-\frac{s}{2}}}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{s}{2}-1} dx = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2}) \;(x' = \pi x^2)\end{aligned}$$

Pour ceux qui ont déjà vu l'équation fonctionnelle de la fonction zêta, cela doit leur rappeler un terme qui paraissait sorti de nulle part

5 L'équation fonctionnelle de la fonction zêta

Tout se qui sera fait dans cette section n'est pas rigoureux du tout et souvent vous paraitra fantaisiste, voire loufoque. Néanmoins cela donne un nouvel éclairage sur l'équation fonctionnelle de la fonction zêta. Nous avons un antécédent célèbre en la personne d'Euler (il manipulait des équations différentielles du type $\sum_{n=0}^{+\infty} n! y^{(n)} = 0$ ouf !), ce qui nous dédouane partiellement :=)

Nous commencons par calculer la transformée de Fourier d'un quasi-caractère.

Soit s un nombre complexe : on pose $u(x) = \begin{cases} |x|^{-s} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ (pour avoir une fonction vivant sur $\mathbb{R}$)

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^\times} |x|^{-s} \exp(-2\pi i x\xi) dx = |\xi|^{-1+s} \int_{\mathbb{R}^\times} |x|^{s} \exp(-2\pi i x) dx$$

Donc la transformation de Fourier de $x \mapsto |x|^{-s}$ est égale à $\xi \mapsto c_s |\xi|^{-1+s}$ où c_s est une fonction convenable. Pour déterminer la constante c_s, nous utilisons la formule de Parseval polarisée i.e.

$$\forall f, g \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f(x))\overline{(\mathcal{F}g(x))} dx$$

où l'on remplace f par $x \mapsto |x|^{-s}$ et g par la gaussienne $x \mapsto \exp(-\pi x^2)$, qui rappelons-le, est sa propre transformée de Fourier

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\times} |x|^{-s} \exp(-\pi x^2) dx &= c_s \int_{\mathbb{R}^\times} |x|^{-1+s} \exp(-\pi x^2) dx. \\ \int_{\mathbb{R}^\times} |x|^{(-s+1)-1} \exp(-\pi x^2) dx &= c_s \int_{\mathbb{R}^\times} |x|^{s-1} \exp(-\pi x^2) dx \end{aligned}$$

En utilisant la formule 9, on obtient

$$\pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) c_s$$

et finalement

$$c_s = \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

On en déduit que la transformée de Fourier de $x \mapsto |x|^{-s}$ est $x \mapsto \dfrac{\pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} |x|^{-1+s}$.

Si l'on pose $u_s = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) |x|^{-s}$ alors on obtient

$$\mathcal{F}u_s = u_{1-s}.$$

En particulier, en évaluant cette formule en $x = 1$, on a

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$$

Pour les familliers de la théorie des représentations des groupes, cela rappelle l'isomorphisme entre la série principal π_s et π_{1-s}
Appliquons la formule sommatoire de Poisson (cf. l'article éponyme) à cette belle fonction u_s :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_s(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}u_s(n) \Leftrightarrow \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|^{-s} = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|^{-(1-s)}.$$

Argh, la fonction zêta est apparue et l'on la relation fonctionnelle

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s) \tag{10}$$

qui semble valable pour tous les nombres complexes.
Nous savons que la fonction Γ ne s'annule jamais sur son ensemble de définition, qu'elle devient infinie (elle a des pôles) aux entiers pairs négatifs et que la fonction zêta ne s'annule pas sur la bande $\mathrm{Re}\, s > 1$. Par conséquent, si on arrive à la prolonger à $\mathbb{C}$ tout entier, son prolongement ne peut s'annuler que sur la bande $\mathrm{Re}\, s \leqslant 1$. L'équation fonctionnelle 10, montre que $\zeta(1-s) = 0$ dès que $\mathrm{Re}\, s > 1$ et $\frac{1-s}{2}$ est un nombre pair négatif. La fonction zêta s'annule alors nécessairement lorsque $s = 1 + 2k$ avec $k < 0$ i.e. en tout les nombres impairs négatifs. Ces zêros sont appelés les zéros triviaux de la fonction zêta.
En dehors des entiers négatifs, la fonction Γ est toujours définie et ne s'annule jamais. L'équation fonctionnelle 10 montre que si s est un zéro non trivial de ζ alors $1-s$ est un zéro de ζ. On en déduit qu'il existe aucun zêro de ζ dans la bande $\mathrm{Re} < 0$, si l'on excepte les zêros triviaux.
Conclusion : la fonction ζ possède des zéros triviaux (tous les nombres impairs négatifs) et les autres zêros éventuels sont situés dans la bande $0 \leqslant \mathrm{Re}\, s \leqslant 1$. On démontre (et nous le feron) que la fonction ζ ne s'annule pas sur la bande $\mathrm{Re}\, s = 1$, donc sur la bande $\mathrm{Re}\, s = 0$.
Pour finir, on remarque que les zêros non triviaux de ζ possède comme axe de symétrie la droite $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Les conjectures de Riemann

1. La fonction $s \mapsto \Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$ peut se prolonger à $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ et la fonction Λ vérifie

$$\forall s \in \mathbb{C} \quad \Lambda(s) = \Lambda(1-s)$$

   On prolonge alors la fonction ζ sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ en posant $\zeta(s) = \dfrac{\Lambda(s)}{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})}$

2. Tous les zêros de la fonction zêta sont situés sur la droite critique $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$.

Exercice 1
Démontrer le 2 des conjectures de Riemann (le premier qui donne la preuve a le droit à une belle médaille d'un dénommé Fields).

Exercice 2
Déterminer tous les quasi-caractères de $(\mathbb{R}, +)$, établir un analogue de la transformation de Mellin et retrouver la transformation de Laplace.

Exercice 3
Déterminer une mesure de Haar sur S^1 tel que le volume de S^1 soit égal à 1 (on utilisera que tout élément de S^1 est de la forme $e^{2\pi itx}$)

Exercice 4
Déterminer une mesure de Haar sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 5
Admettons que la dualité de Pointriaguin est valable pour le groupe $(\mathbb{R}, +)$.

1. A quoi correspond une fonction sur $\mathbb{Z}$?
2. Déterminer tous les caractères de $\mathbb{Z}$.
3. Introduire une transformation de Fourier associée et écrire la formule de Parseval correspondante.

Exercice 6
Admettons que la dualité de Pontriaguin est valable pour le groupe $(\mathbb{R}, +)$.

1. Pourquoi la donnée d'une fonction vivant sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (d'une variable de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$) correspond à la donnée d'une foncton 1-périodique ?
2. Déterminer le dual de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
3. Introduire un produit scalaire pour lequel tous les caractéres sont de norme 1
4. Introduire une transformation de Fourier associée (vous ne me reconnaissez pas ?)
5. Ecrire la formule de Parseval correspondante.(on cherchera à l'aide d'une fonction constante à déterminer).
6. Les maths sont-elles jolies ou pas ?

Exercice 7
A tout nombre complexe s, on associe le quasi-caractère u_s de $\mathbb{R}^\times$ défini par $u_s(x) = |x|^s$.

1. Exprimer la convolée de u_p avec u_q en fonction de u_{p+q}.
2. En appliquant la transformation de Fourier, à cette égalité, montrer que retrouver la formule des compléments, c'est-à-dire
$$\int_0^1 t^{p-}(1-t)^{q-1}dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Exercice 8
En s'inpirant du cas des caractères de $\mathbb{R}$, déterminer tous les morphismes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$. Qui retrouve-t-on ?

Exercice 9
En s'inpirant du cas des caractères de $\mathbb{R}^\times$, déterminer tous les morphismes de $(\mathbb{R}^\times, \times)$ dans $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

Exercice 10 (Très difficile)
Déterminer tous les morphismes continus de $(\mathbb{R}^\times, \times)$ dans $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^\times \quad f(t)$ a des coefficients qui sont des fractions rationnelles de t.