UNIVERSITE DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE
U.F.R. Sciences exactes et naturelles

THESE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Reims Champagne-Ardenne

Discipline : **Mathématiques**

présentée et soutenue publiquement par

Abdellah BECHATA

le **18 juin 2001**

Titre :

Analyse pseudo-différentielle p₋ adique

Directeur de thèse :
André Unterberger

JURY

Président	M.J.NOURRIGAT	Université de Reims
Rapporteurs	M. N.LERNER	Université de Rennes-1
	M. P.TORASSO	Université de Poitiers
Examinateurs	Mme C.CANCELIER	Université de Reims
	M.P.GERARDIN	Université de Paris 7
	M.S. KICHENASSAMY	Université de Reims
Directeur de thèse	M. A.UNTERBERGER	Université de Reims

RESUME :

On développe ici l'analyse pseudodifférentielle des opérateurs agissant sur les fonctions à valeurs complexes sur k^n, où k est un corps non archimédien. Cette étude met en jeu, pour commencer, une géné-ralisation au cas $\mathfrak{p}$–adique des méthodes obligatoires (calcul de Weyl, représentation d'Heisenberg) ou souhaitables (utilisation de familles d'états cohérents et caractérisation des classes d'opérateurs par leur action sur ces états) de l'analyse pseudo-différentielle. On en déduit une caractérisation "à la Beals" de classes d'opérateurs, ainsi qu'un calcul fonctionnel des opérateurs de poids un. L'absence d'opérateurs de dérivation interdit bien sûr tout développement "à la Moyal" de la composition de deux symboles : mais, utilisant la théorie des caractères multiplicatifs de $k^\times$, on donne une formule de composition reliant la décomposition en termes "homogènes" d'un produit $f_1 \# f_2$ aux décompositions de cette espèce de f_1 et f_2.

Table des matières

Remerciements

En premier lieu, je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à l'égard de Monsieur André Unterberger pour sa fraîcheur d'esprit, son enthousiasme mathématique, pour l'infinie patience ainsi que la disponibilité permanente qu'il a su m'accorder durant ces années de thèse.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Nicolas Lerner et Monsieur Pierre Torasso pour toute l'attention qu'ils ont portée à cette thèse, pour leurs remarques intéressantes, et pour avoir accepté d'en être les rapporteurs.

Je remercie Monsieur Paul Gérardin pour l'honneur qu'il m'accorde en faisant partie de ce jury.

Je suis également très honoré que Monsieur Jean Nourrigat soit le président de mon jury de thèse.

J'exprime mes plus sincères remerciements à .Madame Claudy Cancelier et Monsieur Satyana Kichenassamy qui ont accepté d'être examinateurs de cette thèse.

J'adresse mes plus vifs remerciements à l'ensemble des membres du laboratoire qui m'ont accordé un excellent accueil, ainsi que leur sympathie pendant ces années de recherches. Plus particulièrement, je tiens à exprimer de chaleureux remerciements à Brice Camus, Alain Ninet, Odile Fleury-Barka pour l'aide et le soutien qu'ils ont su m'apporter.

Pour finir, je remercie mes proches qui m'ont soutenu et encouragé.

Chapitre 1

Introduction

Le calcul pseudo-différentiel, en particulier le calcul de Weyl, est un outil fondamental dans l'étude des opérateurs apparaissant naturellement dans les problèmes d'équations aux dérivées partielles. Cette thèse a pour but le développement du calcul de Weyl dans le cadre des corps locaux non-archimédiens . Une telle étude a été initiée en 1993 par S.Haran [H] . La méthode employée ici fait une large part à des méthodes directement issues de l'analyse harmonique (représentation d'Heisenberg, représentation métaplectique, familles d'états cohérents). Elle généralise ainsi les méthodes développées dans ([U1], chapitre 1) dans le cas non-archimédien.

Désignons par k un corps local non-archimédien et soit ψ un caractère non trivial de k. Considérons le groupe d'Heisenberg produit semi-direct de $k^d \times k^d$ par k. Au caractère ψ est attachée une représentation irréductible unitaire bien définie (la représentation d'Heisenberg) du groupe d'Heisenberg dans l'espace $L^2(k^d)$. On introduit le calcul de Weyl, qui définit une application linéaire de $L^2(k^d \times k^d)$ (espace des symboles) dans l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $L^2(k^d)$, par une généralisation naturelle de la formule usuelle dans le cas archimédien. L'un des objets de ce travail est d'étendre la signification de l'opérateur $Op(f)$ de symbole f à des cas plus généraux que celui où f appartient à $L^2(k^d \times k^d)$.

Il n'existe pas, dans le cas local non-archimédien, d'opérateur de dérivation, non plus que de fonction polynomiale à valeurs complexes : mais il est néanmoins possible, comme l'avait remarqué S.Haran, d'introduire deux familles (I^α) et (J^β) d'opérateurs se substituant aux classiques opérateurs de dérivation et de multiplication, et permettant de définir l'analogue des espaces de Sobolev ou les images de ces derniers par la transformation de Fourier. Ceci conduit à une définition naturelle aussi bien de l'espace $\mathcal{S}(k^d)$ “de Schwartz” et de son dual que des classes de symboles associées à des poids possédant des propriétés analogues à celles du cas archimédien.

La méthode employée ici consiste à partir de la fonction $\phi \in L^2(k^d)$, fonction caractéristique de l'ensemble des points de k^d à coordonnées dans l'anneau des entiers de k, que l'on a normalisée convenablement, et de la famille $(\phi_{y,\eta})$ que l'on en déduit en faisant agir la représentation d'Heisenberg. Tout le calcul symbolique des opérateurs dans des classes de symboles à poids est obtenu à partir d'une caractérisation des opérateurs $Op(f)$ dans une classe donnée par une propriété relative aux produits scalaires $(Op(f)\phi_{y,\eta}, \phi_{y',\eta'})$. Poussant cette méthode plus loin (suivant [U-U]), on parvient à une caractérisation “à la Beals” de certaines classes d'opérateurs : ceci permet de justifier l'existence d'un calcul fonctionnel de ces opérateurs.

Un point sur lequel l'analyse pseudo-différentielle non-archimédienne est fondamentalement différente de l'analyse usuelle concerne la formule de composition des symboles, qui exprime le symbole $f\#g$ du composé de deux opérateurs de symboles f et g. Tout comme dans le cas archimédien, il existe une formule intégrale de composition, qui n'a rien de particulier. On sait que dans le cas archimédien, le développement en série entière de l'exponentielle qui intervient dans cette intégrale conduit à la formule asymptotique "de Moyal"

$$f\#g \sim fg + \frac{1}{4i\pi}\{f,g\} + ...$$

Rien d'analogue ne saurait exister dans le cas non-archimédien parce qu'il n'y a pour commencer ni analogue du crochet de Poisson, ni développement en série du caractère ψ devant se substituer à l'exponentielle. En revanche, dans le cas de la dimension un, on peut décomposer tout symbole raisonnable comme superposition intégrale de termes homogènes, et décomposer à nouveau le composé $f\#g$ d'une façon analogue : bien entendu, les "termes" obtenus ne sont pas des polynômes ! On parvient alors (théorème 32), dans le cas non-archimédien, à une formule généralisant la formule annoncée dans la section 5 de [U2], à l'occasion d'une étude sur les formes modulaires non-holomorphes, et démontrée dans [U3].

Chapitre 2

Le calcul de Weyl $\mathfrak{p}-$adique.

2.1 Définitions et notations générales.

Dans toute la suite, k désigne un corps local non-archimédien, c'est-à-dire une extension algébrique de degré fini soit de $\mathbb{Q}_p$, soit de $\mathbb{F}_p((X))$ pour un certain nombre premier p, de caractéristique différente de 2. On note $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k : c'est un anneau principal et local, c'est-à-dire qu'il possède un unique idéal maximal. On appelle uniformisante de k tout générateur de cet idéal maximal. Par exemple, lorsque k est le corps $\mathbb{Q}_p$, le nombre p-adique p est une uniformisante de k. On fixe une uniformisante ϖ de k et on note $\mid . \mid$ l'unique valeur absolue de k vérifiant $\mid \varpi \mid = (\mathrm{card}(\mathcal{O}_k/\varpi\mathcal{O}_k))^{-1}$. Dans la suite, on notera parfois q le nombre entier$\mid \varpi \mid^{-1}$. En outre, on choisit dans toute la suite un caractère additif non trivial ψ de k : rappelons que dans le cadre non archimédien, un tel caractère est nécessairement constant dans un voisinage de zéro. Le plus grand idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_k$ sur lequel ψ est constant se nomme le conducteur de ψ; il est traditionnellement noté $\mathcal{O}_k^o$ et il est égal à l'ensemble $\varpi^{n(\psi)}\mathcal{O}_k$ pour un certain $n(\psi)$ appartenant à $\mathbb{Z}$. A ce conducteur on associe une valeur absolue non-archimédienne sur k, "duale" de la valeur absolue $|.|$, et qui est définie par :

$$\mid x \mid^{\vee} = \mid x\varpi^{-n(\psi)} \mid .$$

Un exemple typique est fourni par le corps $k = \mathbb{Q}_p$ et le caractère ψ_0 qui est défini de la façon suivante :

$$\text{si } x = \sum_{n \geq -n_0} a_n p^n, \text{ alors } \psi_0(x) = \exp(2\pi i \times \sum_{-n_0 \leq n < 0} a_n p^n).$$

Il est immédiat que le conducteur de ψ_0 est l'anneau des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$.

Sur k^d, on définit les normes suivantes :

$$\|y\| = \underset{1 \leq i \leq d}{max} \mid y_i \mid, \ \ \|\eta\|^{\vee} = \underset{1 \leq i \leq d}{max} \mid \eta_i \mid^{\vee} .$$

Le but de ce travail est d'introduire et d'étudier un calcul symbolique des opérateurs linéaires, éventuellement non-bornés, agissant sur l'espace $L^2(k^d)$, où, pour emprunter la terminologie de la mécanique quantique, l'espace k^d peut-être appelé l'espace de configuration. Il convient, pour l'analyse de Fourier, d'introduire également l'espace dual, dit espace des impulsions : si, sur l'espace de configuration, on utilise la norme $\mid \mid$, on sera amené à utiliser la norme $\mid \mid^{\vee}$ sur l'espace des impulsions. Enfin, pour développer un calcul symbolique, il convient d'introduire l'espace de phase qui est le produit de l'espace de configuration par l'espace des impulsions. On peut l'écrire $k^d \times k^d$, étant entendu que le deuxième exemplaire est identifié au dual du premier au moyen de la dualité de groupes localement compacts définie par :

$$\begin{cases} k^d \times k^d \to \mathbb{C}^\times \\ (y,\eta) \mapsto \psi(< y,\eta >), \end{cases}$$

où l'on a posé, pour (y,η) appartenant à $k^d \times k^d$:

$$< y,\eta >= \sum_{i=1}^{d} y_i \eta_i .$$

On remarquera que, lorsque d est égal à 1, le conducteur $\mathcal{O}_k^o$ défini précédemment s'identifie au dual de Pontriaguin du groupe $k/\mathcal{O}_k$ par cette dualité .

On note alors dx la mesure de Haar sur k^d autoduale relativement à la dualité précédente ; elle est caractérisée par la condition $vol(\mathcal{O}_k^d) \times vol((\mathcal{O}_k^o)^d) = 1$. Comme dans la théorie archimédienne, l'espace de phase $k^d \times k^d$ est muni de la forme symplectique, dont on rappelle la définition ; pour (y,η), (y',η') appartenant à $k^d \times k^d$, on pose :

$$[(y,\eta),(y',\eta')] =< y',\eta > - < y,\eta' > .$$

On introduit également l'analogue non archimédien du poids $1+\|X\|^2$ qui jouera un rôle constant dans l'analyse pseudo-différentielle non archimédienne. On le définit, pour (y,η) appartenant à $k^d \times k^d$, par la formule suivante :

$$| 1,y,\eta |= max(1, \|2y\|, \|2\eta\|^\vee), \tag{2.1}$$

et l'on note aussi

$$\begin{cases} | 1,y |=| 1,y,0 |, \\ | 1,\eta |^\vee=| 1,0,\eta | . \end{cases} \tag{2.2}$$

Ce poids vérifie encore une inégalité du type "inégalité de Peetre", i.e.

$$\forall\ X,\ Y\ \in k^{2d},\ \ | 1,\ X+Y |\leq\ \ | 1,\ X | \times | 1,Y | . \tag{2.3}$$

Remarque : Le facteur 2 intervenant dans (2.1) ne joue de rôle que lorsque que $| \varpi |^{-1}= q$ est divisible par 2. Dans le cas contraire, on a simplement :

$$max(1, \|2y\|, \|2\eta\|^\vee) = max(1, \|y\|, \|\eta\|^\vee)$$

L'espace usuel des fonctions-test sur k^d est l'espace de Schwartz-Bruhat que l'on note $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$; il est défini comme étant l'espace des fonctions à support compact et localement constantes sur k^d. La transformation de $Fourier$ (notée $\mathcal{F}$) sur $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$ est donnée par la formule suivante :

$$\forall u \in \mathcal{S}_{alg}(k^d),\ (\mathcal{F}u)(x) = \int_{k^d} u(y)\psi(- < y,x >)dy\ .$$

Il est nécessaire d'introduire également la transformation de Fourier symplectique (notée $\mathcal{G}$) sur $\mathcal{S}_{alg}(k^d \times k^d)$ dont voici la définition :

$$\forall\ u \in \mathcal{S}_{alg}(k^d),\ (\mathcal{G}u)(X) = |2|^d \int_{k^{2d}} u(Y)\psi(2[Y,X])\ dY \tag{2.4}$$

La transformation $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$), qui est un automorphisme de $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$ (resp. de $\mathcal{S}_{alg}(k^d \times k^d)$), se prolonge en un automorphisme isométrique de $L^2(k^d)$ (resp. $L^2(k^d \times k^d)$); en outre, la transformation de Fourier symplectique jouit de la propriété supplémentaire suivante :

$$\mathcal{G}^2 = Id_{L^2(k^{2d})}.$$

Pour en terminer avec les définitions générales, on rappelle la définition de la représentation unitaire irréductible projective "d'Heisenberg" π de $k^d \times k^d$ dans $L^2(k^d)$ attachée au caractère ψ. Elle est définie pour u appartenant à $L^2(k^d)$ par :

$$(\pi(y,\eta)u)(x) = \psi(< x - \frac{y}{2}, \eta >)\ u(x-y)$$

et vérifie l'identité suivante valable pour tout couple (X,Y) appartenant à $\left(k^d \times k^d\right) \times \left(k^d \times k^d\right)$:

$$\pi(X)\pi(Y) = \psi(\frac{1}{2}[X,Y])\ \pi(X+Y). \tag{2.5}$$

2.2 Un autre espace $\mathcal{S}$.

Pour l'étude du calcul de Weyl local, il est nécessaire d'introduire de nouvelles familles d'opérateurs qui joueront un rôle analogue aux classiques opérateurs archimédiens de multiplication et de dérivation. Cette définition conduit à l'introduction d'un espace $\mathcal{S}$ de fonctions suivant [H].

Soient α, β deux nombres réels positifs ; on introduit sur l'espace $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$ les opérateurs suivants :

$$\forall u \in \mathcal{S}_{alg}(k^d), \left\{ \begin{array}{c} (I^{\alpha}u)(x) = \mid 1, x \mid^{\alpha} u(x), \\ (I^{\vee\alpha}u)(\xi) = \mid 1, \xi \mid^{\vee\alpha} u(\xi), \\ (J^{\beta}u)(x) = (\mathcal{F}^{-1}I^{\vee\beta}\mathcal{F}u)(x), \\ (I^{\alpha,\beta}u)(x) = (I^{\alpha}J^{\beta}u)(x) \end{array} \right.$$

Sur l'espace $\mathcal{S}_{alg}(k^d \times k^d)$, on définit de même l'opérateur $\widetilde{I}^{\alpha}$ de multiplication par

$$\mid 1, X \mid^{\alpha} = \left[max(1, \|2x\|, \|2\xi\|^{\vee})\right]^{\alpha} \text{ si } X = (x,\xi)$$

et l'opérateur $\tilde{J}^{\beta}$, conjugué par $\mathcal{G}$ de l'opérateur $\widetilde{I}^{\beta}$: l'opérateur $\tilde{J}^{\beta}$ joue donc le rôle que jouerait l'opérateur $(1-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$ en analyse réelle Contrairement au cas archimédien, les opérateurs I^{α} et J^{β} commutent, ainsi qu'il a été remarqué par S.Haran. On le revérifiera plus loin.

Les différents opérateurs introduits ci-dessus sont essentiellement auto-adjoints sur $L^2(k^d)$ (resp. $L^2(k^d \times k^d)$) et on désignera par les mêmes symboles leur unique extension auto-adjointe (dont le domaine contient par définition $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$ (resp. $\mathcal{S}_{alg}(k^d \times k^d)$). On appellera espace des "fonctions à décroissance rapide" l'espace suivant :

$$\mathcal{S}(k^d) = \bigcap_{\alpha,\beta \geq 0} Dom(I^{\alpha,\beta}).$$

Autrement dit, il s'agit de l'espace des fonctions u appartenant à $L^2(k^d)$ telles que $I^{\alpha,\beta}u$ appartienne à $L^2(k^d)$ pour tout couple de nombres réels positifs (α, β). L'espace vectoriel $\mathcal{S}(k^d)$ devient un espace de Fréchet lorsqu'on le munit de la famille de semi-normes

$$\| u \|_{\alpha,\beta} = \| I^{\alpha,\beta}u \|_{L^2(k^d)} .$$

En outre, $\mathcal{S}(k^d)$ est un espace nucléaire ce qui nous permettra d'utiliser le moment venu l'analogue du théorème des noyaux de Schwartz.

On note $\mathcal{S}'(k^d)$ le dual topologique de $\mathcal{S}(k^d)$ que l'on appellera espace des distributions "tempérées" sur k^d et, pour toute distribution tempérée T et pour toute fonction à décroissance rapide u sur k^d, on note $< T, u >$ la valeur de T sur u; on écrit aussi $(T, u) =< T, \bar{u} >$ (où $u \longmapsto \bar{u}$ est la conjugaison complexe).

Remarque : De façon analogue à la théorie archimédienne, toute distribution tempérée sur k^d est, par le théorème de Hahn-Banach, combinaison linéaire de distributions de la forme $I^{\alpha,\beta}u$ où u est un élément de $L^2(k^d)$ et (α, β) est un couple de réels positifs.

2.3 Caractérisation des espaces de fonctions par les familles d'états cohérents.

2.3.1 Définition des familles d'états cohérents et première application.

Definition 1 *On note ϕ (resp. ϕ^o) la fonction caractéristique de $(\mathcal{O}_k)^d$ (resp. $(\mathcal{O}_k^o)^d$) multipliée par $(vol(\mathcal{O}_k)^d)^{-\frac{1}{2}}$ (resp.$(vol(\mathcal{O}_k^o)^d)^{-\frac{1}{2}}$) et, pour tout (y, η) appartenant à $k^d \times k^d$, on pose $\phi_{y,\eta} = \pi(y, \eta)\phi$.*

La transformée de Fourier de ϕ (resp. ϕ^o) est ϕ^o (resp. ϕ). La famille $(\phi_{y,\eta})_{(y,\eta)\in k^d\times k^d}$ s'appelle une famille d'états cohérents pour $L^2(k^d \times k^d)$ et elle jouera un grand rôle dans la suite en raison du lemme suivant, appelé quelquefois "résolution de l'identité" (dans le cas archimédien).

Lemme 2 *Pour tout couple de fonctions u, v appartenant à $L^2(k^d)$, on a :*

$$\begin{cases} \| u \|^2_{L^2(k^d)} = \int\limits_{k^{2d}} | (u, \phi_X) |^2 \, dX, \\ (u, v) = \int\limits_{k^{2d}} (u, \phi_X)(\phi_X, v) dX. \end{cases}$$

Démonstration :

Comme la seconde formule s'obtient par polarisation de la première, il suffit de démontrer la première formule. Soit u une fonction appartenant à $L^2(k^d)$; on a par définition, pour tout point (y, η) de l'espace de phase,

$$(u, \phi_{y,\eta}) = \int\limits_{k^d} u(x)\psi(- < x - \frac{y}{2}, \eta >)\phi(x - y)dx.$$

L'identité de Parseval donne alors

$$\int\limits_{k^d} |(u, \phi_{y,\eta})|^2 \, d\eta = \int\limits_{k^d} |u(x)|^2 \, |\phi(x - y)|^2 \, dx$$

et il suffit d'intégrer pour finir par rapport à dy, en observant que $\int\limits_{k^d} |\phi(x)|^2 \, dx = 1$ compte-tenu du facteur $(vol(\mathcal{O}_k)^d)^{-\frac{1}{2}}$ apparaissant dans la définition de ϕ. ■

On vérifie que les fonctions $\phi_{y,\eta}$ appartiennent à l'espace $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$ et un calcul simple montre la formule suivante :

$$\forall (y,\eta) \in k^d \times k^d, \; I^{\alpha,\beta}\phi_{y,\eta} = \mid 1, y \mid^{\alpha} \mid 1, \eta \mid^{\vee\beta} \phi_{y,\eta}. \tag{2.6}$$

Par conséquent, on a

$$I^{\alpha} J^{\beta} \phi_{y,\eta} = J^{\beta} I^{\alpha} \phi_{y,\eta}.$$

Du lemme 2, vu que, pour tout u appartenant à $\mathcal{S}(k^d)$

$$\| I^{\alpha,\beta} u \|^2_{L^2(k^d)} = \int\limits_{k^d \times k^d} \mid (u, J^{\beta} I^{\alpha} \phi_{y,\eta}) \mid^2 dy \; d\eta,$$

il résulte que l'on a $I^{\alpha} J^{\beta} u = J^{\beta} I^{\alpha} u$ pour tout u appartenant à $\mathcal{S}(k^d)$, et la continuité de l'opérateur $I^{\alpha,\beta}$ sur ce dernier espace est alors évidente. De plus, la formule

$$\| I^{\alpha,\beta} u \|^2_{L^2(k^d)} = \int\limits_{k^d \times k^d} \mid 1, y \mid^{2\alpha} \mid 1, \eta \mid^{\vee 2\beta} |(u, \phi_{y,\eta})|^2 \, dy \; d\eta$$

montre que, quelle que soit u appartenant à $\mathcal{S}(k^d)$, on a

$$u = \lim_{N \to \infty} \int\limits_{\varpi^{-N}(\mathcal{O}_k^d \times (\mathcal{O}_k^o)^d)} (u, \phi_X) \phi_X dX,$$

au sens de la convergence dans l'espace $\mathcal{S}(k^d)$. De ce qui précède, il résulte également que les opérateurs $I^{\alpha,\beta}$ sont des endomorphismes continus de cet espace. On peut alors étendre par dualité les opérateurs $I^{\alpha,\beta}$ en des endomorphismes continus sur $\mathcal{S}'(k^d)$.

Remarque : L'identité (2.5) fournit l'identité suivante :

$$\pi(X)\phi_Y = \psi(\frac{1}{2}[X,Y]) \; \phi_{Y+X}.$$

Cette dernière identité et l'invariance de la fonction ϕ sous l'action des opérateurs $\pi(X)$, lorsque X appartient à $\mathcal{O}_k^d \times (2\mathcal{O}_k^o)^d$, montrent que la fonction $X \mapsto (u, \phi_X)\phi_X$ est $\mathcal{O}_k^d \times (2\mathcal{O}_k^o)^d-$invariante par translation. Par conséquent, l'intégrale $\int\limits_{\varpi^{-N}(\mathcal{O}_k^d \times (\mathcal{O}_k^o)^d)} (u, \phi_X)\phi_X dX$ est égale à la somme finie $\sum\limits_{X \in \varpi^{-N}(\mathcal{O}_k^d \times (\mathcal{O}_k^o)^d) \; / \; \mathcal{O}_k^d \times (2\mathcal{O}_k^o)^d} (u, \phi_X)\phi_X$. En particulier, l'espace $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(k^d)$.

Lemme 3 *Pour tout X appartenant à $k^d \times k^d$, l'opérateur $\pi(X)$ s'étend en un automorphisme continu de l'espace de Fréchet $\mathcal{S}(k^d)$.*

Démonstration :

Soit u une fonction à décroissance rapide, $X = (x, \xi)$ un élément de $k^d \times k^d$ et (α, β) un couple de nombres réels positifs ; en appliquant le lemme 2, ainsi que les identités (2.6) et (2.5), on obtient :

$$\| \pi(X)u \|_{\alpha,\beta}^2 = \| I^{\alpha,\beta}\pi(X)u \|_{L^2(k^d)}^2 = \int_{k^{2d}} | (I^{\alpha,\beta}\pi(X)u, \phi_Y) |^2 \, dY$$

$$= \int_{k^{2d}} | (\pi(X)u, I^{\alpha,\beta}\phi_Y) |^2 \, dY = \int_{k^d \times k^d} | 1, y |^{2\alpha} | 1, \eta |^{\vee 2\beta} | (\pi(X)u, \phi_{y,\eta}) |^2 \, dy \, d\eta$$

$$= \int_{k^d \times k^d} | 1, y |^{2\alpha} | 1, \eta |^{\vee 2\beta} | (u, \phi_{y-x,\eta-\xi}) |^2 \, dy \, d\eta.$$

Un changement de variable, ainsi que l'inégalité (2.3) fournit la majoration suivante qui permet de conclure :

$$\| \pi(X)u \|_{\alpha,\beta}^2 \leq | 1, X |^{2(\alpha+\beta)} \int_{k^d \times k^d} | 1, y |^{2\alpha} | 1, \eta |^{\vee 2\beta} | (u, \phi_{y,\eta}) |^2 \, dy \, d\eta$$

$$= | 1, X |^{2(\alpha+\beta)} \| u \|_{\alpha,\beta}^2$$

■

Ensuite, on peut étendre par dualité l'opérateur $\pi(X)$ en un automorphisme continu de $\mathcal{S}'(k^d)$ par la formule suivante :

$$\forall\ T \in \mathcal{S}'(k^d),\ \forall\ u \in \mathcal{S}(k^d),\ (\pi(X)T, u) = (T, \pi(-X)u).$$

2.3.2 Caractérisation de l'espace $\mathcal{S}(k^d)$ par les familles d'états cohérents.

Lemme 4 *Pour toute distribution tempérée f sur k^d et pour toute fonction à décroissance rapide u sur k^d, on a l'identité suivante :*

$$(f, u) = \int_{k^{2d}} (f, \phi_X)(\phi_X, u) dX.$$

Démonstration : Cette identité est une conséquence du lemme 2, de la remarque page 9, ainsi que de l'identité (2.6) ■

Rappelons que l'espace de Schwartz-Bruhat $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$ est obtenu comme la limite inductive des espaces de fonctions continues localement constantes à support dans un compact donné de k^d. On appelle distribution toute forme linéaire sur cet espace.

Proposition 5 (i) *Soit f une distribution sur k^d, alors f appartient à $\mathcal{S}'(k^d)$ si et seulement si il existe un entier positif N tel que la fonction $X \to | 1, X |^{-N} (f, \phi_X)$ appartienne à $L^2(k^d \times k^d)$.*

(ii) *Soit f un élément de $\mathcal{S}'(k^d)$, alors f appartient à $L^2(k^d)$ si et seulement si la fonction $X \to (f, \phi_X)$ appartient à $L^2(k^d \times k^d)$.*

(iii) *Soit f un élément de $\mathcal{S}'(k^d)$, alors f appartient à $\mathcal{S}$ (k^d) si et seulement si pour tout entier positif N la fonction $X \to | 1, X |^N (f, \phi_X)$ appartient à $L^2(k^d \times k^d)$.*

Démonstration : (i) On traite pour commencer l'implication directe. Comme f appartient à $\mathcal{S}'(k^d)$, la remarque page 9 fournit une famille de couples d'entiers positifs $(\alpha_1, \beta_1), ..., (\alpha_r, \beta_r)$ et une famille de fonctions u_1,..., u_r appartenant à $L^2(k^d)$ telle que pour tout (y, η) appartenant à $k^d \times k^d$ on ait la majoration suivante :

$$\mid (f, \phi_{y,\eta}) \mid = \left| \sum_{i=1}^{r} (I^{\alpha_i,\beta_i} u_i, \phi_{y,\eta}) \right| \leq \left(\underset{1 \leq i \leq r}{max} \parallel u_i \parallel_{L^2(k^d)} \right) \sum_{i=1}^{r} \parallel I^{\alpha_i,\beta_i} \phi_{y,\eta} \parallel_{L^2(k^d)}$$

$$\leq \left(\underset{1 \leq i \leq r}{max} \parallel u_i \parallel_{L^2(k^d)} \right) \sum_{i=1}^{r} \mid 1, y \mid^{\alpha_i} \mid 1, \eta \mid^{\vee \beta_i} \leq r \left(\underset{1 \leq i \leq r}{max} \parallel u_i \parallel_{L^2(k^d)} \right) \mid 1, y, \eta \mid^N$$

où N est le plus grand des entiers $\alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_r, \beta_r$. On conclut en remarquant que la fonction $X \rightarrow \mid 1, X \mid^{-(d+1)}$ est de carré intégrable.

On traite maintenant la réciproque. Soit f une distribution satisfaisant aux hypothèses de (i) et u appartenant à $\mathcal{S}(k^d)$; alors la fonction $X \rightarrow (f, \phi_X)(\phi_X, u)$ est intégrable sur $k^d \times k^d$. En effet, cette affirmation découle des majorations suivantes où l'entier N est fourni par l'hypothèse faite sur la distribution f :

$$\int_{k^{2d}} |(f, \phi_X)(\phi_X, u)| \, dX \leq (\int_{k^{2d}} \mid 1, X \mid^{-2N} \mid (f, \phi_X) \mid^2 dX)^{\frac{1}{2}} (\int_{k^{2d}} \mid 1, X \mid^{2N} \mid (u, \phi_X) \mid^2 dX)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (\int_{k^{2d}} \mid 1, X \mid^{-2N} \mid (f, \phi_X) \mid^2 dX)^{\frac{1}{2}} (\int_{k^d \times k^d} \mid 1, y \mid^{2N} \mid 1, \eta \mid^{\vee\, 2N} \mid (u, \phi_{y,\eta}) \mid^2 dy\ d\eta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (\int_{k^{2d}} \mid 1, X \mid^{-2N} \mid (f, \phi_X) \mid^2 dX)^{\frac{1}{2}} (\int_{k^{2d}} \mid (I^{N,N} u, \phi_{y,\eta}) \mid^2 dy\ d\eta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (\int_{k^{2d}} \mid 1, X \mid^{-2N} \mid (f, \phi_X) \mid^2 dX)^{\frac{1}{2}} \parallel I^{N,N} u \parallel_{L^2(k^d)} .$$

Ces majorations montrent également que la forme antilinéaire $\tilde{f}$ sur l'espace $\mathcal{S}(k^d)$ définie par :

$$\forall u \in \mathcal{S}(k^d),\ (\tilde{f}, u) = \int_{k^{2d}} (f, \phi_X)(\phi_X, u) dX$$

est une distribution tempérée sur k^d. La distribution f et la distribution tempérée $\tilde{f}$ coïncident sur les états cohérents, donc sur l'espace $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$.

(ii) On ne traite que la réciproque, puisque l'implication directe est l'objet du lemme 2. Soit f une distribution tempérée sur k^d, satisfaisant à l'hypothèse mentionnée dans la réciproque et u une fonction à décroissance rapide sur k^d; on utilise le lemme 4 ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir les estimations suivantes :

$$\mid (f, u) \mid \leq (\int_{k^{2d}} \mid (f, \phi_X) \mid^2 dX)^{\frac{1}{2}} (\int_{k^{2d}} \mid (u, \phi_X) \mid^2 dX)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (\int_{k^{2d}} \mid (f, \phi_X) \mid^2 dX)^{\frac{1}{2}} \parallel u \parallel_{L^2(k^d)} .$$

La distribution tempérée f s'étend donc en une forme antilinéaire continue sur $L^2(k^d \times k^d)$.

(iii) Soit N un entier positif , et u une fonction appartenant à $\mathcal{S}(k^d)$. Par définition, la fonction $J^{N,N}u$ appartient à $L^2(k^d)$; donc, d'après le lemme 2, la fonction $X \mapsto (I^{N,N}u, \phi_X)$ appartient à $L^2(k^d \times k^d)$. Ceci ainsi que l'identité (2.6), nous fournissent les majorations suivantes qui permettent de conclure

$$| 1, y, \eta |^N |(u, \phi_{y,\eta})| \leq | 1, y |^N | 1, \eta |^{\vee N} | (u, \phi_{y,\eta}) |=| (u, I^{N,N}\phi_{y,\eta}) |=| (I^{N,N}u, \phi_{y,\eta}) | .$$

Pour la réciproque, on utilise l'identité (2.6), le lemme 4, l'hypothèse faite sur f, l'inégalité

$$| 1, y |^\alpha | 1, \eta |^{\vee\beta} \leq | 1, y, \eta |^{\alpha+\beta}$$

ainsi que le point (ii) de la présente proposition pour aboutir au fait que f appartient à l'espace $\mathcal{S}(k^d)$ ■

Corollaire 6 *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un automorphisme continu de $\mathcal{S}(k^d)$ ou de $\mathcal{S}'(k^d)$ (ce dernier étant muni de la topologie de dual faible du premier).*

Démonstration : Pour $\mathcal{S}(k^d)$, il suffit de constater que

$$\mathcal{F}^{-1}\pi(y, \eta)\mathcal{F} = \pi(-\eta, y)$$

et d'appliquer la proposition 5 (iii). Le résultat s'étend immédiatement à $\mathcal{S}'(k^d)$ par dualité.
■

2.4 Définition du calcul de Weyl $\mathfrak{p}$ -adique

2.4.1 Définition dans le cadre L^2.

Pour toute fonction f appartenant à $L^2(k^d \times k^d)$, on désigne par $Op(f)$ et l'on appelle opérateur de symbole f, l'opérateur de $L^2(k^d)$ dans $L^2(k^d)$ possédant pour noyau intégral la fonction a_f sur $k^d \times k^d$ donnée par la formule :

$$a_f(x, y) = \int_{k^d} f(\frac{x+y}{2}, \eta)\psi(< x - y, \eta >)d\eta, \tag{2.7}$$

où le terme de droite doit être considéré comme la transformée de Fourier évaluée en $y - x$ de la fonction

$$\eta \mapsto f(\frac{x+y}{2}, \eta).$$

Traditionnellement, l'opérateur $Op(f)$ est noté sous la forme symbolique suivante :

$$\forall u \in L^2(k^d),\ (Op(f)u)(x) = \int_{k^d}\int_{k^d} f(\frac{x+y}{2}, \eta)u(y)\psi(< x - y, \eta >)\ dy\ d\eta. \tag{2.8}$$

Les propriétés usuelles de la transformation de Fourier (ici partielle) montrent que le noyau a_f est de carré intégrable sur $k^d \times k^d$ et que l'application

$$\begin{cases} L^2(k^d \times k^d) \to L^2(k^d \times k^d) \\ \qquad\qquad f \longmapsto a_f \end{cases}$$

est une isométrie surjective de $L^2(k^d \times k^d)$. La théorie des opérateurs de Hilbert-Schmidt nous permet alors d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 7 *L'application qui à une fonction f appartenant à $L^2(k^d \times k^d)$ associe l'opérateur $Op(f)$ est une isométrie surjective de $L^2(k^d \times k^d)$ sur l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $L^2(k^d)$.*

Remarque : en particulier, si f est un symbole appartenant à $L^2(k^d \times k^d)$, son adjoint possède un symbole, qui n'est autre que $\overline{f}$.

Definition 8 *Soient u et v deux fonctions appartenant à $L^2(k^d)$. On appelle fonction de Wigner du couple (u,v) le symbole de l'opérateur de rang un $w \mapsto (w,v)u$. On le note $W(u,v)$. En particulier, d'après la proposition précédente, la fonction de Wigner $W(u,v)$ appartient à $L^2(k^d \times k^d)$.*

Proposition 9 *Soient u et v deux fonctions appartenant à $L^2(k^d)$ et soit f une fonction appartenant à $L^2(k^d \times k^d)$. Alors, on a l'égalité suivante :*

$$(Op(f)u, v) = \int_{k^{2d}} f(Z)W(u,v)(Z)dZ. \tag{2.9}$$

En particulier, la fonction $W(u,v)$ est définie par :

$$(W(u,v))(z,\varsigma) = |2|^d \int_{k^{2d}} u(z-t)\overline{v(z+t)}\psi(2 < t, \varsigma >)\ dt. \tag{2.10}$$

Démonstration : (i) Il est immédiat que l'adjoint de l'opérateur $Op(W(v,u))$ est $Op(W(u,v))$.

En particulier, cela montre que $\overline{W(v,u)} = W(u,v)$. En polarisant, le résultat de la proposition 7, on voit que :

$$Tr(Op(f)Op(W(v,u))^*) = \int_{k^{2d}} f(Z)\overline{(W(v,u))(Z)}dZ = \int_{k^{2d}} f(Z)(W(u,v))(Z)dZ.$$

Par ailleurs, l'opérateur $Op(f)Op(W(v,u))^*$ n'est autre que l'opérateur de rang un

$$\varphi \mapsto (\varphi, v)Op(f)u$$

dont la trace est égale à $(Op(f)u, v)$. La formule (2.10) résulte facilement de (2.9) et de la définition (2.8) de l'opérateur $Op(f)$. ■

La relation de covariance suivante

$$\pi(X)Op(f)\pi(X)^{-1} = Op(Y \mapsto f(Y-X)), \tag{2.11}$$

analogue à sa version archimédienne, est fondamentale. On peut la vérifier en réécrivant la définition de $Op(f)u$ sous la forme

$$\forall u \in L^2(k^d),\ (Op(f)u)(x) = \mid 2 \mid^{-d} \int_{k^{2d}} (\mathcal{G}f)(\frac{Y}{2})(\pi(Y)u)(x)dY. \tag{2.12}$$

En particulier :

$$\pi(X)Op(W(u,v))\pi(X)^{-1} = Op(Z \mapsto (W(u,v))(Z-X))$$

quelles que soient u et v appartenant à $L^2(k^d)$ et X appartenant à k^{2d}.

D'autre part, la définition de la fonction $W(u,v)$ montre que

$$\pi(X)Op(W(u,v))\pi(X)^{-1} = Op(W(\pi(X)u, \pi(X)v)).$$

Ces deux dernières formules nous fournissent la relations de covariance suivante :

$$\forall\ Z\ \in k^{2d},\ (W(\pi(X)u, \pi(X)v))(Z) = (W(u,v))(Z-X) : \tag{2.13}$$

Dans la suite, nous allons être amenés à calculer la fonction de Wigner attachée à deux états cohérents. Pour cela, nous allons établir le lemme suivant qui nous permettra d'effectuer simplement ce calcul :

Lemme 10 *Pour toutes fonctions u, v appartenant à $L^2(k^d)$ et pour tous éléments X, Z de $k^d \times k^d$, on a :*

$$(W(\pi(X)u, \pi(-X)v))(Z) = \psi(-2[Z,X])(W(u,v))(Z).$$

Démonstration : Posons $X = (x, \xi)$ et $Z = (z, \varsigma)$. Explicitons alors la fonction $W(\pi(X)u, \pi(-X)v))$:

$$(W(\pi(x,\xi)u, \pi(-x,-\xi)v))(z,\varsigma) = |2|^d \int\limits_{k^d} \psi(< z - t - \frac{x}{2}, \xi >)u(z-t-x) \times$$

$$\overline{\psi(- < z + t + \frac{x}{2}, \xi >)v(z+t+x)}\psi(2 < t, \varsigma >)\ dt$$

$$= |2|^d\, \psi(2 < z, \xi >) \int\limits_{k^d} u(z-t-x)v(z+t+x)\psi(2 < t, \varsigma >)\ dt.$$

On effectue ensuite le changement de variable $t \mapsto t - x$. L'expression précédente s'écrit donc

$$|2|^d\, \psi(2 < z, \xi > -2 < x, \varsigma >) \int\limits_{k^d} u(z-t)v(z+t)\psi(2 < t, \varsigma >)\ dt$$

$$= |2|^d\, \psi(2 < z, \xi > -2 < x, \varsigma >)(W(u,v))(z,\varsigma).$$

■

On désigne par $Sp(d,k)$ le groupe symplectique de $k^d \times k^d$ c'est-à-dire le groupe des automorphismes linéaires g de $k^d \times k^d$ tel que

$$\forall X,\ Y \in k^{2d}, \qquad [gX, gY] = [X, Y].$$

Il existe une représentation projective Met de $Sp(d,k)$ dans $L^2(k^d)$ telle que

$$\forall g \in Sp(d,k),\ \forall X\ \in k^{2d}, \qquad Met(g)\pi(X)Met(g)^{-1} = \pi(g.X) \tag{2.14}$$

où $g.X$ est l'image de X sous l'action linéaire de g. Cette représentation n'est autre que la représentation métaplectique (que l'on appelle communément représentation de Weil en arithmétique).

Théorème 11 *Soit f un symbole appartenant à $L^2(k^{2d})$. Alors, on a la relation de covariance suivante :*

$$\forall g \in Sp(d,k),\ \forall f \in L^2(k^{2d}), \qquad Met(g)Op(f)Met(g)^{-1} = Op(Z \mapsto f(g^{-1}.Z)). \tag{2.15}$$

Celle-ci est bien connue en calcul de Weyl réel sous le nom de relation de Segal-Shale. Nous appellerons donc cette relation de covariance, relation de Segal-Shale-Weil.

Démonstration : Elle découle des relations (2.12) et (2.14). ■

Remarque : si g est un élément de $Sp(d,k)$ et f un symbole, on défini le symbole $f \circ g$ par

$$(f \circ g)(Z) = f(g.Z).$$

La relation (2.15) combinée à la définition de la composition des symboles montre que, pour tous symboles f_1 et f_2 et tout élément $g \in Sp(d,k)$, on a

$$(f_1 \circ g) \ \# \ (f_2 \circ g) = (f_1 \# f_2) \circ g \tag{2.16}$$

La relation (2.15) jouera un rôle important dans le chapitre 4.2 pour la formule de composition. Par contre, seule la relation de covariance (2.11) joue un rôle dans les trois premiers chapitres. Elle a été à la base de l'utilisation des familles d'états cohérents $(\phi_X)_{X \in k^{2d}}$.

Lemme 12 *Soit u un élément de l'espace $\mathcal{S}(k^d)$ et g un élément de $Sp(d,k)$. Alors la fonction $Met(g)u$ appartient à $\mathcal{S}(k^d)$.*

Démonstration : Posons $\psi = Met(g)^{-1}\phi$. On a alors les égalités suivantes

$$\begin{aligned}(Met(g)u, \phi_X) &= (u, Met(g)^{-1}\pi(X)\phi)\\ &= (u, Met(g)^{-1}\pi(X)Met(g)\psi)\\ &= (u, \psi_{g.^{-1}X}).\end{aligned}$$

En utilisant la remarque (2.3.1), on constate que l'espace $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$ est engendré la famille d'états cohérents $(\phi_X)_{X \in k^{2d}}$. Ceci ainsi que l'inégalité (2.3) et la relation (2.5) montre que la proposition 5 reste vraie si l'on remplace la fonction ϕ par n'importe quel élément de $\mathcal{S}_{alg}(k^d)$,en particulier pour la fonction ψ. On conclu alors en appliquant cette proposition et en remarquant que, pour tout élément g appartenant à $Sp(d,k)$, il existe une constante $C_g > 0$ telle que

$$\forall X \in k^{2d},\ C_g^{-1} \mid 1, X \mid < \mid 1, g.^{-1}X \mid < C_g \mid 1, X \mid .$$

■

2.4.2 Calcul de Weyl et calcul standard.

Il est aisé de vérifier que le produit tensoriel de deux fonctions à décroissance rapide sur k^d est une fonction à décroissance rapide sur $k^d \times k^d$. Par ailleurs, l'application

$$f \mapsto a_f$$

(où a_f est le noyau associé à f dans la formule (2.7)) est un automorphisme continu de $\mathcal{S}'(k^{2d})$. On peut donc définir l'opérateur $Op(f)$ lorsque f est une distribution tempérée sur $k^d \times k^d$ par :

$$\forall u, v \in \mathcal{S}(k^d),\ (Op(f)u, v) =< a_f, \overline{v} \otimes u > . \tag{2.17}$$

Cette formule définit donc $Op(f)u$ comme une distribution tempérée sur k^d toutes les fois que $u \in \mathcal{S}(k^d)$.

La même formule montre que si f appartient à $\mathcal{S}(k^{2d})$, l'opérateur $Op(f)$ s'étend en un opérateur continu de $\mathcal{S}'(k^d)$ dans $\mathcal{S}(k^d)$.

Les espaces de fonctions à décroissance rapide sur k^d sont des espaces nucléaires. Si l'on combine ceci à l'identité $\mathcal{S}(k^d)\widehat{\otimes}\mathcal{S}(k^d) = \mathcal{S}(k^d \times k^d)$, on obtient l'analogue du théorème des noyaux de Schwartz. C'est-à-dire, tout opérateur séquentiellement continu de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $\mathcal{S}'(k^d)$ possède un noyau qui est une distribution tempérée sur k^{2d}. En rappellant que l'application $f \mapsto a_f$ est un automorphisme continu de $\mathcal{S}'(k^{2d})$, on obtient le théorème suivant :

Théorème 13 *(i) L'application*

$$Op : f \mapsto Op(f)$$

réalise un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques entre $\mathcal{S}'(k^d \times k^d)$ et l'espace des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $\mathcal{S}'(k^d)$, que l'on note $\mathcal{L}_c(\mathcal{S}(k^d), \mathcal{S}'(k^d))$.

(ii) L'application Op réalise un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques entre $\mathcal{S}(k^d \times k^d)$ et l'espace de opérateurs linéaires continus de $\mathcal{S}'(k^d)$ dans $\mathcal{S}(k^d)$, que l'on note $\mathcal{L}_c(\mathcal{S}'(k^d), \mathcal{S}(k^d))$

Nous pouvons en déduire l'extension suivante de la proposition 9 :

Proposition 14 *Pour toute distribution tempérée f sur $k^d \times k^d$ et toutes fonctions u, v appartenant à $\mathcal{S}(k^d)$, on a :*

$$(Op(f)u, v) =< f, W(u, v) >$$

Démonstration : Soient u, v deux fonctions appartenant à $\mathcal{S}(k^d)$. D'après la définition 8,

la fonction $W(u, v)$ appartient à $L^2(k^d \times k^d)$. On peut donc considérer l'opérateur $Op(W(u, v))$ qui, toujours par la définition 8, opère continûment de $\mathcal{S}'(k^d)$ dans $\mathcal{S}(k^d)$. La fonction de Wigner $W(u, v)$ appartient donc à $\mathcal{S}(k^{2d})$, d'après le théorème 13 (ii). Ainsi nous pouvons considérer les applications $f \mapsto (Op(f)u, v)$ et $f \mapsto (f, \overline{W(u, v)})$ qui sont continues sur $\mathcal{S}_{alg}(k^d \times k^d)$ muni de la topologie induite par $\mathcal{S}'(k^d \times k^d)$. D'après la proposition 9, ces deux applications coincïdent sur l'espace $\mathcal{S}_{\mathrm{a\,lg}}(k^d \times k^d)$ qui est dense dans $\mathcal{S}'(k^d \times k^d)$. ■

Remarque : il est utile de remarquer une conséquence de la proposition 14 et du théorème 13 (i). Soit h une distribution tempérée sur $k^d \times k^d$ telle que $< h, W(u, v) >= 0$ pour tout couple de fonctions (u, v) appartenant à $\mathcal{S}(k^d)$. Alors h est la distribution nulle ⋄

Nous allons définir dans cette partie un autre calcul symbolique qui nous sera utile dans les chapitres 3 et 4 : nous l'appellerons calcul standard car il est l'analogue non-archimédien du calcul standard de l'analyse réelle.

$$\forall\ u \in L^2(k^d),\ (Op_{st}(f)u)(x) = \int_{k^d} f(x, \xi)(\mathcal{F}u)(\xi)\psi(< x, \xi >)\ d\xi. \tag{2.18}$$

Tout comme dans le cas archimédien, si $f(x,\xi) = a(x)b(\xi)$, l'opérateur de symbole standard f s'identifie à l'opérateur de convolution par la fonction $\mathcal{F}^{-1}b$ suivi de l'opérateur de multiplication par la fonction a.

On remarquera que $(Op_{st}(f)u, v)$ n'est autre que la valeur de la distribution de densité f sur la fonction
$(x,\xi) \mapsto \overline{v(x)}\mathcal{F}u(\xi)\psi(< x,\xi >)$:

$$\forall\ u, v \in L^2(k^d),\ (Op_{st}(f)u, v) = \int\limits_{k^d}\int\limits_{k^d} f(x,\xi)(\mathcal{F}u)(\xi)\psi(< x,\xi >)\overline{v(x)}\ dxd\xi. \qquad (2.19)$$

Ceci permet de voir que, tout comme en calcul de Weyl, les symboles standard dans $\mathcal{S}(k^d \times k^d)$ (resp.$\mathcal{S}'(k^d \times k^d)$) correspondent aux opérateurs dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{S}'(k^d), \mathcal{S}(k^d))$ (resp.$\mathcal{L}_c(\mathcal{S}(k^d), \mathcal{S}'(k^d))$).

Soit f appartenant à $\mathcal{S}'(k^d \times k^d)$. D'après le théorème 13, l'opérateur $Op(f)$ possède un symbole standard dans $\mathcal{S}'(k^d \times k^d)$; notons le Λf :

$$Op(f) = Op_{_{st}}(\Lambda f). \qquad (2.20)$$

Un calcul direct permet d'expliciter ce symbole sous la forme suivante :

$$(\mathcal{F}_1(\Lambda f))(\eta,\xi) = (\mathcal{F}_1 f)(\eta, \xi + \frac{\eta}{2}) \qquad (2.21)$$

où $\mathcal{F}_1$ désigne l'opérateur de transformation de Fourier partielle relativement à la première variable dans k^d. L'opérateur Λ est un automorphisme de chacun des espace $\mathcal{S}(k^{2d})$, $\mathcal{S}'(k^{2d})$ et $L^2(k^{2d})$.

Introduisons l'espace

$$\mathcal{C}_{k^d} = \left\{u \in L^2(k^d) \text{ tel que } \forall N \in \mathbb{N},\, \exists \alpha_N,\ I^{-\alpha_N} J^N u \in L^2(k^d)\right\},$$

ainsi que son image $\mathcal{F}\mathcal{C}_{k^d}$ par la transformation de Fourier. L'espace $\mathcal{C}_{k^d}$ (resp.$\mathcal{F}\mathcal{C}_{k^d}$) est l'analogue non-archimédien de l'espace O_M (resp.O'_C) de Schwartz. Soient h_1 et h_2 deux symboles standards appartenant à $\mathcal{S}'(k^2)$, le premier ne dépendant que de x et le second que de ξ. Alors, on a les inclusions suivantes :

$$Op_{st}(h_2)\mathcal{S}(k^2) \subset \mathcal{C}_{k^d}$$
$$Op_{st}(h_1)\mathcal{F}\mathcal{C}_{k^d} \subset \mathcal{S}'(k^2),$$

qui permettent de définir l'opérateur $Op_{st}(h_1)Op_{st}(h_2)$ comme opérateur de domaine $\mathcal{S}(k^2)$.

Remarque : le calcul standard jouera un rôle important dans le chapitre 4. En effet, si h_1 et h_2 sont deux symboles standards appartenant à $\mathcal{S}'(k^2)$, le premier ne dépendant que de x et le second que de ξ, il est évident, d'après (2.18), que le composé $Op_{st}(h_1)Op_{st}(h_2)$, de ces deux opérateurs admet encore un symbole standard à savoir $h_1(x)\ h_2(\xi)$. La formule (2.21) permet alors d'attribuer à l'opérateur produit un symbole de Weyl appartenant à $\mathcal{S}'(k^2)$. On peut donc définir dans ce cas $< h_1\#\ h_2, h_3 >$ pour tout élément h_3 appartenant à $\mathcal{S}(k^2)$.

Si, au lieu de ce qui précède, nous considérons des symboles h_j ($1\leq j \leq 2$) ne dépendant que de $x - \sigma_j\xi$ (où $\sigma_j \in k$ et $\sigma_1 \neq \sigma_2$), alors ce qui précède reste vrai. En effet, si g^{-1} désigne la matrice $\begin{pmatrix} -\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} & \sigma_1 \\ -\dfrac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} & 1 \end{pmatrix} \in SL(2,k) = Sp(1,k)$, alors il existe un symbole f_j ne dépendant, selon le cas, que de x ou que de ξ tel que $h_j(x,\xi) = f_j(g.(x,\xi))$ (où g . désigne l'action linéaire de g sur k^2). Donc, en utilisant la relation de covariance (2.16) , on obtient les égalités suivantes

$$h_1 \# h_2 = (f_1 \circ g) \; \# \; (f_2 \circ g) = (f_1 \# f_2) \circ g \tag{2.22}$$

qui définissent $h_1 \# h_2$ $\diamond$

2.4.3 Calcul de la fonction de Wigner de deux états cohérents (cf définition).

On a besoin d'un lemme technique qui sera utilisé à plusieurs reprises dans les démonstrations du chapitre 1. Il est nécessaire d'introduire une nouvelle fonction qui est définie par :

$$\Phi(z,\varsigma) = |2|^d \, \phi(2z)\phi^0(2\varsigma)\psi(-2 < z, \varsigma >), \tag{2.23}$$

où l'on renvoie à la définition 1 pour la signification de ϕ et de ϕ^0.

Proposition 15 *Soient X, X' deux éléments de $k^d \times k^d$. Alors la fonction de Wigner $W(\phi_X, \phi_{X'})$ est donnée par :*

$$W(\phi_X, \phi_{X'})(Z) = \psi(-\frac{1}{2}[X,X']) \; \Phi(Z - \frac{X+X'}{2}) \; \psi(-[Z, X - X']).$$

Démonstration : Nous allons, dans un premier temps, calculer la fonction de Wigner $W(\phi,\phi)$ en remarquant que l'état fondamental ϕ est à valeurs réelles : d'après (2.10), on a

$$W(\phi,\phi)(z,\varsigma) = |2|^d \int_{k^{2d}} \phi(z-t)\phi(z+t)\psi(2 < t, \varsigma >) \; dt.$$

Le support de la fonction $t \mapsto \phi(z-t)\overline{\phi(z+t)}$ est l'intersection des ensembles $(z + \mathcal{O}_k^d)$ et $(-z + \mathcal{O}_k^d)$, qui est vide sauf si $2z \in \mathcal{O}_k^d$. Ceci nous permet d'écrire

$$W(\phi,\phi)(z,\varsigma) = |2|^d \times 1_{\mathcal{O}_k^d}(2z) \int_{k^{2d}} \phi(z-t)\phi(z+t)\psi(2 < t, \varsigma >) \; dt$$

où $1_{\mathcal{O}_k^d}$ désigne la fonction indicatrice de $\mathcal{O}_k^d$. On effectue ensuite le changement de variable $t \mapsto t - z$, qui transforme l'expression précédente en

$$|2|^d \, \psi(-2 < z, \varsigma >) \times 1_{\mathcal{O}_k^d}(2z) \int_{k^{2d}} \phi(2z - t)\phi(t)\psi(2 < t, \varsigma >) \; dt.$$

On rappelle que la fonction ϕ est, à un facteur multiplicatif près, la fonction indicatrice de $\mathcal{O}_k^d$. Elle est en outre paire et elle satisfait à la relation $\phi^2 = (vol(\mathcal{O}_k)^d)^{-\frac{1}{2}}\phi$ ce qui nous permet de poursuivre le calcul ; ce qui précède devient

$$|2|^d \, \psi(-2 < z, \varsigma >) \times (vol(\mathcal{O}_k)^d)^{-\frac{1}{2}} 1_{\mathcal{O}_k^d}(2z) \int_{k^{2d}} \phi(t)\psi(2 < t, \varsigma >) \; dt$$

$$
\begin{aligned}
&= |2|^d \, \psi(-2 < z, \varsigma >) \phi(2z) \int\limits_{k^{2d}} \phi(t) \psi(2 < t, \varsigma >) \; dt \\
&= |2|^d \, \phi(2z) \phi^0(-2\varsigma) \psi(-2 < z, \varsigma >) \\
&= |2|^d \, \phi(2z) \phi^0(2\varsigma) \psi(-2 < z, \varsigma >) = \Phi(z, \varsigma).
\end{aligned}
$$

La relation de covariance montre que

$$
W(\phi_X, \phi_{X'})(Z) = \psi(-\frac{1}{2}[\frac{X+X'}{2}, \frac{X-X'}{2}]) \psi(\frac{1}{2}[\frac{X-X'}{2}, \frac{X+X'}{2}]) \times
$$

$$
(W(\pi(\frac{X+X'}{2})\pi(\frac{X-X'}{2})\phi, \pi(\frac{X+X'}{2})\pi(\frac{X'-X}{2})\phi))(Z).
$$

On utilise la sesquilinéarité des fonctions de Wigner, puis le lemme 10, pour écrire cela sous la forme :

$$
\begin{aligned}
&\psi(-\frac{1}{2}[X, X'])(W(\pi(\frac{X-X'}{2})\phi, \pi(\frac{X'-X}{2})\phi))(Z - \frac{X+X'}{2}) \\
&= \psi(-\frac{1}{2}[X, X']) \psi(-[Z, X - X'])(W(\phi, \phi))(Z - \frac{X+X'}{2}) \\
&= \psi(-\frac{1}{2}[X, X']) \psi(-[Z, X - X']) \Phi(Z - \frac{X+X'}{2}).
\end{aligned}
$$

■

Chapitre 3

Calcul de Weyl et classes de symboles définies par des poids.

3.1 Définition des espaces de symboles à poids.

Soit $m : k^d \times k^d \to R_+^\star$ une application mesurable : on dit que m est un poids s'il existe un entier positif N et une constante C positive tels que, quels que soient X et Y appartenant à $k^d \times k^d$, on ait :

$$m(X) \leq C\ m(Y) \mid 1, X - Y \mid^N \tag{3.1}$$

On appelle alors symbole de poids m toute distribution tempérée f appartenant à $\mathcal{S}'(k^d \times k^d)$

(cf. début de la section **??**) telle que, pour tout entier positif, la distribution tempérée $\tilde{J}^N f$ coïncide avec une fonction g_N sur $k^d \times k^d$ vérifiant, pour tout X appartenant à $k^d \times k^d$ et pour une certaine constante positive C_N, l'estimation suivante :

$$|g_N(X)| \leq C_N\ m(X).$$

On note $S(m)$ l'espace vectoriel des symboles de poids m.

3.2 Caractérisation par les états cohérents des opérateurs possédant un symbole à poids.

Soit A un opérateur séquentiellement continu de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $\mathcal{S}'(k^d)$. D'après le théorème 13 (i), cet opérateur possède un symbole f appartenant à $\mathcal{S}'(k^d \times k^d)$. Il est possible d'exprimer ce symbole à l'aide des fonctions de Wigner d'états cohérents et de l'action de l'opérateur A sur les états cohérents. Nous allons expliciter ce lien dans les lemmes suivants.

Lemme 16 *Soient X, X' deux éléments de $k^d \times k^d$. Alors, pour tout entier positif N, l'égalité suivante est valable :*

$$\begin{aligned}&\tilde{J}^N(Z \mapsto \psi(-[Z, X - X'])\Phi(Z - \frac{X + X'}{2}))\\ &= \mid 1, \frac{X - X'}{2} \mid^N \psi(-[Z, X - X'])\Phi(Z - \frac{X + X'}{2}).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Démonstration : Rappelons (cf. début de la section **??**) que l'opérateur $\widetilde{I}^M$ est l'opérateur de multiplication par $\mid 1,.\mid^M$ et que l'opérateur $\tilde{J}^M$ est le conjugué de $\widetilde{I}^M$ par $\mathcal{G}$, qui est défini en 2.4.

Posons $\nu(Y) =< y, \eta >$ si $Y = (y, \eta)$; on obtient par un calcul direct l'identité

$$\begin{aligned}\forall\ X,\ X' \in k^{2d},\ \mathcal{G}\ (\psi(-[Z, X - X'])\Phi(Z - \frac{X + X'}{2}))\\ = \psi([X - X', \frac{X + X'}{2}]) \left(\phi \otimes \phi^0\right)(2Z - (X - X'))\times\\ \psi(-\frac{1}{2}\nu(2Z - (X - X')))\psi(-2[Z, \frac{X + X'}{2}]).\end{aligned} \tag{3.3}$$

D'autre part, la fonction $X \mapsto\mid 1, X \mid$ est $(\frac{1}{2}\mathcal{O}_k)^d \times (\frac{1}{2}\mathcal{O}_k^o)^d-$ invariante par translation, en particulier, elle est constante sur l'ensemble $\left\{\frac{X - X'}{2} + \frac{1}{2}\mathcal{O}_k{}^d \times (\frac{1}{2}\mathcal{O}_k^o)^d\right\}$ qui est le support de la fonction

$$Z \mapsto \left(\phi \otimes \phi^0\right)(2Z - (X - X'))\psi(-2[Z, \frac{X + X'}{2}])\psi(-\frac{1}{2}\nu(2Z - (X - X'))).$$

Ceci démontre la formule suivante

$$\begin{aligned}&\widetilde{I}^M\mathcal{G}(Z \mapsto \Phi(Z - \frac{X + X'}{2})\ \psi(-[Z, X - X']))\\ =&\quad \mid 1, \frac{X - X'}{2}\mid^M\ \psi([X - X', \frac{X + X'}{2}])\times\\ &\left(\phi \otimes \phi^0\right)(2Z - (X - X'))\psi(-2[Z, \frac{X + X'}{2}])\psi(-\frac{1}{2}\nu(2Z - (X - X'))).\end{aligned}$$

Cette dernière égalité, ainsi que la formule (3.3), nous permet de conclure. ■

Lemme 17 *Soient f une distribution tempérée sur $k^d \times k^d$, X, X' deux éléments de $k^d \times k^d$. Alors, pour tout entier positif M, l'égalité suivante est valable :*

$$\begin{aligned}\mid 1, \frac{X - X'}{2}\mid^M (Op(f)\phi_X, \phi_{X'}) = \psi(-\frac{1}{2}[X, X'])\times\\ \int\limits_{k^{2d}} (\tilde{J}^M f)(Z)\ \Phi(Z - \frac{X + X'}{2})\ \psi(-[Z, X - X'])))dZ.\end{aligned}$$

Démonstration : En utilisant la proposition 9 et la proposition 15, on aboutit à l'identité suivante valable pour toute distribution tempérée f sur $k^d \times k^d$:

$$(Op(f)\phi_X, \phi_{X'}) = \psi(-\frac{1}{2}[X, X'])\int\limits_{k^{2d}} f(Z)\ \Phi(Z - \frac{X + X'}{2})\ \psi(-[Z, X - X']))dZ. \tag{3.4}$$

Le lemme résulte de l'identité (3.2) si l'on observe, en outre, que l'opérateur $\tilde{J}^M$ est auto-transposé. ■

Lemme 18 *Soit f une distribution tempérée sur $k^d \times k^d$. Alors l'égalité suivante est vérifiée au sens des distributions tempérées :*

$$f(Z) = \int\limits_{k^{2d}} \int\limits_{k^{2d}} (A\phi_X, \phi_{X'})\psi(\frac{1}{2}[X, X'])\psi([Z, X - X'])\Phi(Z - \frac{X + X'}{2})\ dXdX'$$

où $A = Op(f)$.

Démonstration : Soient u, v deux fonctions appartenant à $\mathcal{S}(k^d)$. Le lemme 4 montre que :

$$(Op(f)u, v) = \int\limits_{k^{2d}} (Op(f)u, \phi_{X'})(\phi_{X'}, v)dX'$$

$$= \int\limits_{k^{2d}} \int\limits_{k^{2d}} (Op(f)\phi_X, \phi_{X'})(u, \phi_X)(\phi_{X'}, v)\ dX\ dX'. \tag{3.5}$$

D'autre part, par la définition 8 de la fonction de Wigner $W(\phi_{X'}, \phi_X)$, on évalue $(u, \phi_X)(\phi_{X'}, v)$:

$$(u, \phi_X)(\phi_{X'}, v) = \int\limits_{k^{2d}} W(\phi_{X'}, \phi_X)(Z)W(u, v)(Z)dZ.$$

Le lemme 16 et la proposition 15, montre que, pour entier N, on a

$$(\tilde{J}^N W(\phi_{X'}, \phi_X))(Z) =\mid 1, \frac{X - X'}{2} \mid^N\ \psi(\frac{1}{2}[X, X'])W(\phi_{X'}, \phi_X)(Z),$$

ce qui nous fournit l'égalité suivante

$$\int\limits_{k^{2d}} W(\phi_{X'}, \phi_X)(Z)W(u, v)(Z)dZ =\mid 1, \frac{X - X'}{2} \mid^{-N}\ \psi(-\frac{1}{2}[X, X'])$$

$$\times \int\limits_{k^{2d}} W(\phi_{X'}, \phi_X)(Z)\ (\tilde{J}^N W(u, v))(Z)\ dZ\ dX\ dX'.$$

Ainsi, l'égalité (3.5) s'écrit encore

$$(Op(f)u, v) = \int\limits_{k^{2d}} \int\limits_{k^{2d}} (Op(f)\phi_X, \phi_{X'}) \mid 1, \frac{X - X'}{2} \mid^{-N}\ \psi(-\frac{1}{2}[X, X'])\ dX\ dX'$$

$$\times \int\limits_{k^{2d}} W(\phi_{X'}, \phi_X)(Z)\ (\tilde{J}^N W(u, v))(Z)\ dZ \tag{3.6}$$

où N est un entier positif quelconque. L'égalité (3.4) appliquée à la distribution tempérée f montre qu'il existe deux nombres entiers N' et M' ainsi qu'une constante $C_{N',M'}$ tels que

$$|(Op(f)\phi_X, \phi_{X'})| \leq C_{N',M'} \mid 1, \frac{X - X'}{2} \mid^{N'} \mid 1, \frac{X + X'}{2} \mid^{M'},$$

d'où

$$\int\limits_{k^{2d}} \int\limits_{k^{2d}} \int\limits_{k^{2d}} |(Op(f)\phi_X, \phi_{X'})| \mid 1, \frac{X - X'}{2} \mid^{-N'-2d-1}$$

$$\times |W(\phi_{X'},\phi_X)(Z)| \ \left|(\tilde{J}^{N'+2d+1}W(u,v))(Z)\right| \ dZ\ dX\ dX'$$

$$\leq C_{N',M'} \int\limits_{k^{2d}}\int\limits_{k^{2d}}\int\limits_{k^{2d}} |\ 1, \frac{X-X'}{2}\ |^{-2d-1} |\ 1, \frac{X+X'}{2}\ |^{M'} \left|\Phi(Z-\frac{X+X'}{2})\right|$$

$$\times \left|(\tilde{J}^{N'+2d+1}W(u,v))(Z)\right| \ dZ\ dX\ dX'$$

$$\leq C_{N',M'} \int\limits_{k^{2d}}\int\limits_{k^{2d}}\int\limits_{k^{2d}} |\ 1, Y\ |^{-2d-1} |\ 1, Y'\ |^{M'} \ |\Phi(Z-Y')|$$

$$\times \left|(\tilde{J}^{N'+2d+1}W(u,v))(Z)\right| \ dZ\ dY\ dY'$$

$$\leq C_{N',M'} \int\limits_{k^{2d}}\int\limits_{k^{2d}} |\Phi(Y'')|\ |\ 1, Z\ |^{M'} \ \left|(\tilde{J}^{N'+2d+1}W(u,v))(Z)\right| \ dZ\ dY'$$

$$\leq C_{N',M'} \int\limits_{k^{2d}} |\ 1, Z\ |^{M'} \ \left|(\tilde{J}^{N'+2d+1}W(u,v))(Z)\right| \ dZ < +\infty.$$

Nous pouvons alors permuter l'ordre d'intégartion dans (3.6).

$$(Op(f)u,v) = \int\limits_{k^{2d}} \ (\tilde{J}^{N'+2d+1}W(u,v))(Z)\ dZ \ \int\limits_{k^{2d}}\int\limits_{k^{2d}} (Op(f)\phi_X,\phi_{X'})$$

$$\times |\ 1, \frac{X-X'}{2}\ |^{-N'-2d-1} \ \psi(-\frac{1}{2}[X,X'])W(\phi_{X'},\phi_X)(Z)\ dX\ dX'$$

$$= \int\limits_{k^{2d}} W(u,v)(Z)\ dZ\ \tilde{J}^{N'+2d+1}(Z \mapsto \int\limits_{k^{2d}}\int\limits_{k^{2d}} (Op(f)\phi_X,\phi_{X'})$$

$$\times |\ 1, \frac{X-X'}{2}\ |^{-N'-2d-1} \ \psi(-\frac{1}{2}[X,X'])W(\phi_{X'},\phi_X)(Z)\ dX\ dX'$$

$$= \int\limits_{k^{2d}} W(u,v)(Z)\ dZ \ \int\limits_{k^{2d}}\int\limits_{k^{2d}} (Op(f)\phi_X,\phi_{X'})$$

$$\times |\ 1, \frac{X-X'}{2}\ |^{-N'-2d-1} \ \psi(-\frac{1}{2}[X,X'])\ (\ \tilde{J}^{N'+2d+1}W(\phi_{X'},\phi_X))(Z)\ dX\ dX'$$

$$= \int\limits_{k^{2d}} W(u,v)(Z)\ dZ \ \int\limits_{k^{2d}}\int\limits_{k^{2d}} (Op(f)\phi_X,\phi_{X'})W(\phi_{X'},\phi_X)(Z)\ dX\ dX'.$$

Or la définition des fonctions de Wigner permet d'écrire l'égalité

$$(Op(f)u,v) = < f, W(u,v) >$$

au sens de la dualité entre $\mathcal{S}'(k^{2d})$ et $\mathcal{S}(k^{2d})$. La remarque page 17 ainsi que les deux dernières identités nous fournissent l'identité recherchée. ∎

Théorème 19 *(i) Soit f appartenant à $S(m)$. Alors pour tout entier positif N, il existe une constante C_N positive telle que, quels que soient X, X' appartenant à $k^d \times k^d$, on ait :*

$$|\,(Op(f)\phi_X, \phi_{X'})\,| \leq C_N\ m(\frac{X+X'}{2})\ |\,1, X-X'\,|^{-N}\ .$$

(ii) Soit A un opérateur linéaire séquentiellement continu de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $\mathcal{S}'(k^d)$ (ce dernier espace étant muni de la topologie de la convergence simple) ; supposons que pour tout entier positif, il existe une constante positive C_N telle que, quels que soient X, X' appartenant à $k^d \times k^d$, on ait l'estimation suivante :

$$|\,(A\phi_X, \phi_{X'})\,| \leq C_N\ m(\frac{X+X'}{2})\ |\,1, X-X'\,|^{-N}\ .$$

Alors il existe un unique symbole f appartenant à $S(m)$, tel que $A = Op(f)$.

Démonstration : (i) On utilise l'identité fournie par le lemme 17 : après changement de variable, utilisant les majorations provenant de la définition des symboles appartenant à $S(m)$, on obtient :

$$|\,1, X-X'\,|^N\ |(Op(f)\phi_X, \phi_{X'})| \leq C_N \int\limits_{k^{2d}} m(Z + \frac{X+X'}{2})\,|\Phi(Z)|\,dZ.$$

La majoration (3.1) qui est valable pour le poids m permet d'obtenir la majoration

$$|\,1, X-X'\,|^N\ |(Op(f)\phi_X, \phi_{X'})| \leq C_N\ m(\frac{X+X'}{2}) \int\limits_{k^{2d}} |1, Z|^N\,|\Phi(Z)|\,dZ.$$

On achève la démonstration en remarquant que l'intégrale ne porte que sur le compact compact $(\frac{1}{2}\mathcal{O}_k)^d \times (\frac{1}{2}\mathcal{O}_k^o)^d$, ce qui permet de majorer la fonction $Z \mapsto |1, Z|^N$ par 1.

(ii) Le théorème 13 (i) montre que l'opérateur A possède un symbole qui est a priori une distribution tempérée sur $k^d \times k^d$. Son symbole est explicité par le lemme 18 :

$$f(Z) = \int\limits_{k^{2d}} \int\limits_{k^{2d}} (A\phi_X, \phi_{X'})\psi(\frac{1}{2}[X, X'])\psi([Z, X-X'])\Phi(Z - \frac{X+X'}{2})\ dXdX'.$$

Il reste à estimer cette fonction et à "dériver sous le signe intégral". Sous les hypothèses de la seconde partie du théorème 19, il est aisé de vérifier qu'au sens des distributions

$$\tilde{J}^N f(Z) = \int\limits_{k^{2d}} \int\limits_{k^{2d}} \psi(\frac{1}{2}[X, X'])(A\phi_X, \phi_{X'}) \times$$
$$\tilde{J}^N(Z \mapsto \psi([Z, X-X'])\Phi(Z - \frac{X+X'}{2}))\ dXdX'.$$

Or l'égalité (3.2), ainsi que l'hypothèse sur $(A\phi_X, \phi_{X'})$, nous permet d'effectuer les majorations suivantes valables pour tout entier positif N et pour tout Z appartenant à $k^d \times k^d$:

$$|\,\tilde{J}^N f(Z)\,| \leq C_{N+2d+1} \int\limits_{k^{2d}} \int\limits_{k^{2d}} m(\frac{X+X'}{2})\ |\,1, X-X'\,|^{-(N+2d+1)} \times$$

$$| 1, \frac{X-X'}{2} |^N \left| \Phi(Z - \frac{X+X'}{2}) \right| \, dX \, dX'.$$

On effectue le changement de variable $Y = Z - \frac{X+X'}{2}$ et $Y' = X - X'$, majorant ce qui précède par

$$C_{N+2d+1} \int_{k^{2d}} \int_{k^{2d}} m(Z-Y) \mid 1, Y' \mid^{-(2d+1)} |\Phi(Y)| \, dY dY'$$

$$\leq C_{N+2d+1} C_m \; m(Z) \int_{k^{2d}} \int_{k^{2d}} \mid 1, Y \mid^{N_m} \mid 1, Y' \mid^{-(2d+1)} |\Phi(Y)| \, dY dY'$$

$$\leq C(m, N) \; m(Z).$$

Cette dernière estimation montre que f appartient bien à $S(m)$. ■

3.3 Conséquences sur la régularité des opérateurs.

Théorème 20 *Quel que soit le poids m, si f appartient à $S(m)$, alors l'opérateur $Op(f)$ opère continûment de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $\mathcal{S}(k^d)$; si de plus m est borné, alors $Op(f)$ se prolonge en un opérateur borné sur $L^2(k^d)$. Si enfin m est un poids tendant vers zéro à l'infini, alors pour tout symbole f appartenant à $S(m)$, l'opérateur $Op(f)$ est compact.*

Démonstration : Les deux premières affirmations sont une conséquence de la proposition 5 (ii).

Si u appartient à $\mathcal{S}(k^d)$ et f appartient à $S(m)$, alors $Op(f)u$ est une distribution tempérée sur k^d qu'il faut tester sur une famille d'états cohérents :

$$(Op(f)u, \phi_X) = (u, Op(f)^\star \phi_X) = \int_{k^{2d}} (u, \phi_{X'})(\phi_{X'}, Op(f)^\star \phi_X) dX'$$

$$= \int_{k^{2d}} (u, \phi_{X'})(Op(f)\phi_{X'}, \phi_X) dX'.$$

La combinaison de l'estimation provenant du théorème 19 (i), de la preuve de la proposition 5 (iii) et de l'égalité précédente fournit les majorations suivantes, dans lesquelles N_m est un nombre permettant d'écrire la majoration (3.1) pour le poids m :

$$\forall \; N \in \mathbb{N}, \; \forall \; X \in k^{2d}$$

$$| \, (Op(f)u, \phi_X) \, | \leq C_N \int_{k^{2d}} m(\frac{X+X'}{2}) \mid (u, \phi_{X'}) \mid \times \mid 1, X - X' \mid^{-N} dX'$$

$$\leq C_N \mid 1, X \mid^{-N} \int_{k^{2d}} m(\frac{X+X'}{2}) \mid (u, \phi_{X'}) \mid \times \mid 1, X' \mid^{N} dX'$$

$$\leq C_N \; C_m \mid 1, X \mid^{-N} \int_{k^{2d}} \mid 1, X' \mid^{N} \times \mid 1, \frac{X+X'}{2} \mid^{N_m} \times \mid (u, \phi_{X'}) \mid dX'$$

$$\leq C_N\ C_m \mid 1, X \mid^{-N+N_m} \int\limits_{k^{2d}} \mid (u, \phi_{X'}) \mid \times \mid 1, X' \mid^{N+N_m} dX'$$

$$\leq C_N\ C_m \mid 1, X \mid^{-N+N_m} (\int\limits_{k^{2d}} \mid (u, \phi_{X'}) \mid^2 \mid 1, X' \mid^{2(N+N_m)+2d+1} dX')^{\frac{1}{2}} \times$$

$$(\int\limits_{k^{2d}} \mid 1, X' \mid^{-(2d+1)} dX')^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit que pour tout entier positif $M > d$, il existe une constante C_M tel que :

$$\forall X \in k^{2d}, \mid (Op(f)u, \phi_X) \mid \leq C_M \mid 1, X \mid^{-M} \quad \| u \|_{M+2N_m+\frac{2d+1}{2}, M+2N_m+\frac{2d+1}{2}}.$$

D'où il résulte que $Op(f)u$ appartient à l'espace $\mathcal{S}(k^d)$. De plus, la majoration précédente fournit la continuité de l'opérateur $Op(f)$ sur l'espace $\mathcal{S}(k^d)$.

Supposons maintenant que m soit un poids borné et que u appartienne à $\mathcal{S}(k^d)$. On part de la première majoration utilisée précédemment : quel que soit X appartenant à $k^d \times k^d$, on a l'estimation suivante

$$\mid (Op(f)u, \phi_X) \mid \leq C \int\limits_{k^{2d}} \mid (u, \phi_{X'}) \mid m(\frac{X + X'}{2}) \mid 1, X - X' \mid^{-(2d+1)} dX'$$

$$\leq C' \int\limits_{k^{2d}} \mid (u, \phi_{X'}) \mid \times \mid 1, X - X' \mid^{-(2d+1)} dX'$$

Cette inégalité, et le fait que l'opérateur de convolution par une fonction intégrable sur $k^d \times k^d$ est un opérateur borné sur $L^2(k^d)$ (inégalité d'Young) permet de voir, utilisant aussi la proposition 5 (ii), que

$$\| Op(f)u \|^2_{L^2(k^d)} = \int\limits_{k^{2d}} \mid (Op(f)u, \phi_X) \mid^2 dX.$$

$$\leq C_1 \int\limits_{k^{2d}} \mid (u, \phi_X) \mid^2 dX = C_1 \| u \|^2_{L^2(k^d)}$$

L'opérateur $Op(f)$ se prolonge donc, par densité de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $L^2(k^d)$, en un opérateur borné sur $L^2(k^d)$.

Le troisième point s'établit en prouvant que l'opérateur $Op(f)$ est une limite (au sens de la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(L^2(k^d))$) d'opérateurs de rang fini. On montre pour commencer que

$$Op(f) = \lim_{N \to \infty,\ \mathcal{L}(L^2(k^d))} \int\limits_{X \in \varpi^{-N}\left(\mathcal{O}_k^d \times (\mathcal{O}_k^o)^d\right)} (., \phi_X) Op(f) \phi_X dX.$$

En effet, pour toutes fonctions u, v appartenant à $L^2(k^d)$

$$\mid (Op(f)u - \int\limits_{X \in \varpi^{-N}\left(\mathcal{O}_k^d \times (\mathcal{O}_k^o)^d\right)} (u, \phi_X) Op(f) \phi_X dX, v) \mid$$

$$=\left|\int_{X\notin\varpi^{-N}\left(\mathcal{O}_k^d\times(\mathcal{O}_k^o)^d\right)}(u,\phi_X)(Op(f)\phi_X,v)dX\right|$$

$$=\left|\int_{X\notin\varpi^{-N}\left(\mathcal{O}_k^d\times(\mathcal{O}_k^o)^d\right)}\int_{X'\in k^{2d}}(u,\phi_X)(Op(f)\phi_X,\phi_{X'})(\phi_{X'},v)dX\ dX'\right|$$

$$\leq C_M\int_{X\notin\varpi^{-N}\left(\mathcal{O}_k^d\times(\mathcal{O}_k^o)^d\right),X'\in k^{2d}} m\left(\frac{X+X'}{2}\right)\mid 1,X-X'\mid^{-M}\mid(u,\phi_X)\mid\times\mid(\phi_{X'},v)\mid dX\ dX'$$

$$\leq C_M\int_{X\notin\varpi^{-N}\left(\mathcal{O}_k^d\times(\mathcal{O}_k^o)^d\right)}\int_{X'\in k^{2d}} m(X)\mid 1,X-X'\mid^{N_m-M}\mid(u,\phi_X)\mid\times\mid(\phi_{X'},v)\mid dX\ dX'.$$

On utilise le fait que le poids tend vers zéro à l'infini i.e. $\forall\ \epsilon>0$, il existe N_0 tel que $\forall N\geq N_0$, $\forall X\notin\varpi^{-N}\left(\mathcal{O}_k^d\times(\mathcal{O}_k^o)^d\right)$, $m(X)\leq\epsilon$. Ainsi

$$\forall N\geq N_0,\ \ \left|\left(Op(f)u-\int_{X\in\varpi^{-N}\left(\mathcal{O}_k^d\times(\mathcal{O}_k^o)^d\right)}(u,\phi_X)Op(f)\phi_X dX,v\right)\right|\leq$$

$$\epsilon\ C_M\int_{X\notin\varpi^{-N}\left(\mathcal{O}_k^d\times(\mathcal{O}_k^o)^d\right)}\int_{X'\in k^{2d}}\mid 1,X-X'\mid^{N_m-M}\mid(u,\phi_X)\mid\times\mid(\phi_{X'},v)\mid dX\ dX'$$

$$\leq\epsilon\ C_M\int_{X\in k^{2d}}\int_{X'\in k^{2d}}\mid 1,X-X'\mid^{N_m-M}\mid(u,\phi_X)\mid\times\mid(\phi_{X'},v)\mid dX\ dX'.$$

L'inégalité d'Young montre que :

$$\forall\epsilon>0,\ \text{il existe } N_0 \text{ tel que } \forall N\geq N_0,\ \forall u,v\in L^2(k^d),$$

$$\left|\left(Op(f)u-\int_{X\in\varpi^{-N}\left(\mathcal{O}_k^d\times(\mathcal{O}_k^o)^d\right)}(u,\phi_X)Op(f)\phi_X dX,v\right)\right|\leq\epsilon C'\parallel u\parallel_{L^2(k^d)}\parallel v\parallel_{L^2(k^d)}.$$

Cette dernière estimation montre bien que :

$$Op(f)=\lim_{N\to\infty,\mathcal{L}(L^2(k^d))}\int_{X\in\varpi^{-N}\left(\mathcal{O}_k^d\times(\mathcal{O}_k^o)^d\right)}(.,\phi_X)Op(f)\phi_X dX.$$

D'autre part, en utilisant la remarque page 10, on remarque que la fonction ϕ est invariante sous l'action des opérateurs $\pi(Y)$ lorsque Y appartient à $\mathcal{O}_k^d\times(2\mathcal{O}_k^o)^d$. Ceci, ainsi que l'identité de la remarque page 10, montre que la fonction

$$X\mapsto(.,\phi_X)Op(f)\phi_X,$$

est $\mathcal{O}_k^d\times(2\mathcal{O}_k^o)^d-$invariante par translation, d'où

$$\int_{X\in\varpi^{-N}\left(\mathcal{O}_k^d\times(\mathcal{O}_k^o)^d\right)}(.,\phi_X)Op(f)\phi_X dX=\sum_{X\in\varpi^{-N}\left(\mathcal{O}_k^d\times(\mathcal{O}_k^o)^d\right)/\mathcal{O}_k^d\times(2\mathcal{O}_k^o)^d}(.,\phi_X)Op(f)\phi_X.$$

On en déduit que pour tout entier positif N, l'opérateur $\int\limits_{X\in\varpi^{-N}\left(\mathcal{O}_k^d\times(\mathcal{O}_k^o)^d\right)} (.,\phi_X)Op(f)\phi_X dX$ est de rang fini, ce qui achève la démonstration. ■

Si f appartient à $S(m_1)$, g à $S(m_2)$, le théorème 20 affirme que les deux opérateurs $Op(f)$ et $Op(g)$ agissent continûment de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $\mathcal{S}(k^d)$; par conséquent, il en est de même pour l'opérateur $Op(f)Op(g)$. Ce dernier possède donc, d'après le théorème 13 (i), un symbole-distribution que l'on note $f\#g$.

Théorème 21 *Si f appartient à $S(m_1)$, g à $S(m_2)$, alors $f\#g$ appartient à $S(m_1m_2)$.*

Démonstration : Il suffit d'évaluer $(Op(f\#g)\phi_X,\phi_{X'})$:

$$\begin{aligned}(Op(f\#g)\phi_X,\phi_{X'}) &= (Op(g)\phi_X, Op(f)^\star\phi_{X'})\\ &= \int\limits_{k^{2d}} (Op(g)\phi_X,\phi_Y)(Op(g)\phi_Y,\phi_{X'})dY.\end{aligned}$$

On applique la caractérisation provenant du théorème 19 (i) afin d'obtenir les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}\mid (Op(f\#g)\phi_X,\phi_{X'}) \mid &\leq C_N C'_M \int\limits_{Y\in k^{2d}} m_1(\frac{X+Y}{2}) \mid 1, X-Y\mid^{-N} \times\\ &\qquad m_2(\frac{Y+X'}{2}) \mid 1, Y-X'\mid^{-M} dY\\ &\leq C''_{N,M}(m_1m_2)(\frac{X+X'}{2}) \int\limits_{Y\in k^{2d}} \mid 1, X'-Y\mid^{-M+N_1}\mid 1, X-Y\mid^{-N+N_2} dY\\ &\leq C''_{N,M}(m_1m_2)(\frac{X+X'}{2}) \int\limits_{Y\in k^{2d}} \mid 1, Y\mid^{-M+N_1}\mid 1, X-X'-Y\mid^{-N+N_2} dY\\ &\leq C''_{N,M}(m_1m_2)(\frac{X+X'}{2}) \mid 1, X-X'\mid^{-N+N_2} \int\limits_{Y\in k^{2d}} \mid 1, Y\mid^{-M+N_1}\mid 1, Y\mid^{N-N_2} dY\\ &\leq C''_{N,M}(m_1m_2)(\frac{X+X'}{2}) \mid 1, X-X'\mid^{-N+N_2} \int\limits_{Y\in k^{2d}} \mid 1, Y\mid^{N-M+N_1-N_2} dY.\end{aligned}$$

Soit N' un entier positif quelconque, en posant $N=N'+N_2$ et $M=max(N+N_1-N_2+2d+1, 2d+1)$, les majorations précédentes appliquées aux deux entiers précédents montrent qu'il existe une constante positive $C_{N'}$ telle que pour tout X, X' appartenant à $k^d\times k^d$, on a :

$$\mid (Op(f\#g)\phi_X,\phi_{X'}) \mid \leq C_{N'}\ (m_1m_2)(\frac{X+X'}{2}) \mid 1, X-X'\mid^{-N'}.$$

Cette estimation permet de conclure en utilisant la caractérisation fournie par le théorème 19 (ii). ■

L'emploi direct du théorème 19 permet d'aborder la construction d'un calcul fonctionnel des opérateurs à symboles de poids $m=1$: pour aller plus loin, il faudra employer la caractérisation de Beals (cf. chapitre suivant), laquelle est d'ailleurs, également, conséquence du théorème 19.

Soient A un opérateur borné sur $L^2(k^d)$ et h une fonction entière sur $\mathbb{C}$. On note $h(A)$ l'opérateur défini par $h(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n A^n$ où $(a_n)_{n \geq 0}$ est la suite des coefficients du développement en série entière en 0 de h.

Théorème 22 *Soient f un symbole appartennant à $S(1)$, $A = Op(f)$, et h une fonction entière sur $\mathbb{C}$. Alors l'opérateur borné $h(A)$ possède un symbole appartenant à $S(1)$.*

Démonstration : Soit N un entier positif. Le théorème 19 (i) montre qu'il existe une constante $C_N > 0$ telle que, quels que soient X, X' appartenant à $k^d \times k^d$, on ait :

$$\mid (A\phi_X, \phi_{X'}) \mid \leq C_N \ \mid 1, X - X' \mid^{-N} .$$

Montrons que pour tout entier positif l, on a :

$$\mid (A^l \phi_X, \phi_{X'}) \mid \leq \tilde{C}_N^{l+1} \ \mid 1, X - X' \mid^{-N} \tag{3.7}$$

où $\tilde{C}_N$ est bien choisie.

En écrivant

$$(A^{l+1}\phi_X, \phi_{X'}) = \int_{k^d \times k^d} (A^l \phi_X, \phi_{X_1})(A\phi_{X_1}, \phi_{X'}) dX_1,$$

on voit par récurrence que

$$(A^{l+1}\phi_X, \phi_{X'}) = \int_{k^d \times k^d} .. \int_{k^d \times k^d} (A\phi_X, \phi_{X_1})(A\phi_{X_1}, \phi_{X_2})..(A\phi_{X_l}, \phi_{X'}) dX_1..dX_l.$$

Si l'on pose $X_0 = X$ et $X_{l+1} = X'$, on obtient les estimations suivantes :

$$\mid 1, X - X' \mid^N \left|(A^{l+1}\phi_X, \phi_{X'})\right| \leq$$

$$\leq \int_{k^d \times k^d} .. \int_{k^d \times k^d} \prod_{r=0}^{r=l} \mid 1, X_r - X_{r+1} \mid^N \left|(A\phi_{X_r}, \phi_{X_{r+1}})\right| dX_1..dX_l$$

$$\leq C_{N+2d+1}^{l+1} \int_{k^d \times k^d} .. \int_{k^d \times k^d} \prod_{r=0}^{r=l} (\mid 1, X_r - X_{r+1} \mid^N \ \ \mid 1, X_r - X_{r+1} \mid^{-N-2d-1}) dX_1..dX_l$$

$$\leq C_{N+2d+1}^{l+1} \int_{k^d \times k^d} .. \int_{k^d \times k^d} \prod_{r=0}^{r=l} \ \mid 1, X_r - X_{r+1} \mid^{-2d-1} dX_1..dX_l.$$

On effectue les changements de variables $X_r \to X_r + X'$ dans l'intégrale. On constate alors que cette dernière intégrale correspond à $l+1$ convolutions itérées de la fonction $Y \to \mid 1, Y \mid^{-2d-1}$ avec elle-même, évaluée au point $X - X'$. La fonction $Y \to \mid 1, Y \mid^{-2d-1}$ appartient à $L^1(k^d \times k^d) \bigcap L^\infty(k^d \times k^d)$, donc sa $(l+1)$-ème convolée appartient également à cet espace. En outre, cette dernière est majorée par

$$(\sup_{k^d \times k^d} \mid 1, Y \mid^{-2d-1})(\int_{k^d \times k^d} \mid 1, Y \mid^{-2d-1} dY)^l = (\int_{k^d \times k^d} \mid 1, Y \mid^{-2d-1} dY)^{l+1},$$

ce qui nous donne l'inégalité (3.7).

La démonstration s'achève en remarquant que :

$$|(h(A)\phi_X, \phi_{X'})| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \times \left|(A^k\phi_X, \phi_{X'})\right| \leq (\sum_{l=0}^{+\infty} |a_l| \, \tilde{C}_N^{l+1} \ ) \mid 1, X - X' \mid^{-N},$$

puis en appliquant le théorème 19 (ii) à l'opérateur $h(A)$ qui est borné sur $L^2(k^d)$. ■

Chapitre 4

La caractérisation de Beals et une application.

Dans cette section, les opérateurs K désigneront indistinctement les opérateurs I^1 ou J^1 et, si A désigne un opérateur, on pose pour tout X appartenant à $k^d \times k^d$

$$(Ad\ K)(A) = [K, A] \text{ et } A^X = \pi(X)A\pi(-X).$$

4.1 La caractérisation de Beals.

Théorème 23 *Soient $K_1, ..., K_n$ des opérateurs du type I^1 ou J^1.*

(i) Si f appartient à $S(1)$, pour tout Y appartenant à $k^d \times k^d$, l'opérateur

$$(AdK_1)...(AdK_n)Op(f)^Y$$

se prolonge en un opérateur borné sur $L^2(k^d)$ pour tout entier positif n. De plus, pour tout entier positif n, la famille d'opérateurs $\big((AdK_1)...(AdK_n)Op(f)^Y\big)$ décrit une partie bornée de l'espace de $\mathcal{B}$anach $\mathcal{L}(L^2(k^d))$ lorsque Y parcourt $k^d \times k^d$.

(ii)Réciproquement, soit A un opérateur séquentiellement continu de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $\mathcal{S}'(k^d)$. Supposons que quels que soient $K_1, ..., K_n$, $(AdK_1)...(AdK_n)A^Y$ reste dans une partie bornée de $\mathcal{L}(L^2(k^d))$ lorsque Y parcourt $k^d \times k^d$. Alors A possède un symbole f appartenant à $S(1)$.

Remarque : l'énoncé de l'analogue archimédien du théorème 20 est plus simple, puisque la considération de $Op(f)$ plutôt que de $Op(f)^Y$ suffit. Cela tient à ce que, dans ce cas, un opérateur du type K à considérer est de la forme x_i ou $\dfrac{d}{dx_i}$: conjuguer un tel opérateur par un élément $\pi(X)$ revient à lui ajouter une constante.

Démonstration : (i) Le théorème 20 permet d'affirmer, pour commencer, que l'opérateur $Op(f)$ se prolonge en un opérateur borné sur $L^2(k^d)$. D'autre part, si K^1 désigne l'opérateur (symétrique) I^1 ou J^1, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}((Ad\ K^1)Op(f)\phi_{y,\eta}, \phi_{y',\eta'}) &= (\ K^1 Op(f)\phi_{y,\eta}, \phi_{y',\eta'}) - (\ Op(f)K^1\phi_{y,\eta}, \phi_{y',\eta'}) \\ &= (\ Op(f)\phi_{y,\eta}, K^1\phi_{y',\eta'}) - (\ Op(f)K^1\phi_{y,\eta}, \phi_{y',\eta'}).\end{aligned}$$

Cette dernière égalité combinée à l'identité (2.6), montre que, quels que soient (y, η), $(\ y', \eta')$ appartenant à $k^d \times k^d$, on a :

$$\begin{cases} ((Ad\ I^1)Op(f)\phi_{y,\eta}, \phi_{y',\eta'}) = (\mid 1, y', 0 \mid - \mid 1, y, 0 \mid)(Op(f)\phi_{y,\eta}, \phi_{y',\eta'}), \\ ((Ad\ J^1)Op(f)\phi_{y,\eta}, \phi_{y',\eta'}) = (\mid 1, 0, \eta' \mid - \mid 1, 0, \eta \mid)(Op(f)\phi_{y,\eta}, \phi_{y',\eta'}). \end{cases}$$

On vérifie alors par récurrence que pour tout entier n et toute famille d'opérateurs $K_1, .., K_n$, on a :

$$((AdK_1)...(AdK_n)Op(f)\phi_{y,\eta}, \phi_{y',\eta'}) = (\mid 1, y', 0 \mid - \mid 1, y, 0 \mid)^r \times \\ (1, 0, \eta' \mid - \mid 1, 0, \eta \mid)^s (Op(f)\phi_{y,\eta}, \phi_{y',\eta'}) \tag{4.1}$$

où r est le nombre d'opérateurs K_j égaux à I^1 et s le nombre d'opérateurs égaux à J^1. L'utilisation de l'inégalité triangulaire c'est-à-dire

$$\begin{cases} \mid \quad \mid 1, 0, \eta' \mid - \mid 1, 0, \eta \mid \quad \mid \leq \mid 1, 0, \eta' - \eta \mid \leq \mid 1, y' - y, \eta' - \eta \mid, \\ \mid \quad \mid 1, y', 0 \mid - \mid 1, y, 0 \mid \quad \mid \leq \mid 1, y' - y, 0 \mid \leq \mid 1, y' - y, \eta' - \eta \mid, \end{cases}$$

de l'égalité (4.1) et du théorème 19 (i) fournit la majoration suivante qui est valable pour tout couple d'entiers positifs (N, n) :

$$|((AdK_1)...(AdK_n)Op(f)\phi_X, \phi_{X'})| \leq C_{N+n} \mid 1, X - X' \mid^{-N} . \tag{4.2}$$

Ceci montre que l'opérateur $(AdK_1)...(AdK_n)Op(f)$ possède un symbole appartenant à $S(1)$; ceci implique aussi, en se référant à la démonstration du théorème 20, que cet opérateur se prolonge en un opérateur borné sur $L^2(k^d)$ dont la norme d'opérateur est moindre que $C_{2d+1+n} \times C = C \sup_{X \in k^d \times k^d} \left| \widetilde{J}^{2d+1+n} f(X) \right|$ (où C est une constante). Pour tout Y appartenant à k^{2d}, l'opérateur $Op(f)^Y$ possède pour symbole $Z \mapsto f(Z - Y)$, qui appartient bien à $S(1)$. On conclut en remarquant que le maximum de la fonction $J^{2d+1+n} f$ est invariant par translation.

(ii) Comme l'opérateur A est séquentiellement continu de $\mathcal{S}(k^d)$ dans $\mathcal{S}'(k^d)$, il possède, d'après le théorème 13 (i), un symbole-distribution f appartenant à $\mathcal{S}'(k^{2d})$. Il nous reste à vérifier que ce symbole appartient à $S(1)$. Cette vérification va nécessiter, suivant [U-U] page 144, l'emploi d'une formule combinatoire qui se vérifie par récurrence. Soient n un entier positif, $K_1, ..., K_n$ des opérateurs définis au début de ce chapitre, et φ, ψ deux fonctions appartenant à $\mathcal{S}(k^d)$. Alors on a :

$$(A\varphi, K_n...K_1\psi) = \sum (((ad\ K_{i_s})...(ad\ K_{i_1}))(A)(K_{j_1}...K_{j_r}\varphi), \psi). \tag{4.3}$$

La sommation est étendue à tous les sous-ensembles $\{i_1, ..., i_s\}$ de $\{1, ..., n\}$ ($i_1 < ... < i_s$), et où $\{j_1, ..., j_r\}$ $(j_1 > ... > j_r)$ désigne le complémentaire de $\{i_1, ..., i_s\}$.

On applique cette formule avec $K_1 = ... = K_n = I^1$ (resp.J^1) et A est remplacé par

$$A^{-y,-\eta} = \pi(-y, -\eta) A \pi(y, \eta),$$

enfin avec $\varphi = \phi$ et $\psi = \phi_{y'-y,\eta'-\eta}$. La formule (2.6) montre que $K_{j_1}...K_{j_r}\phi = \phi$ et que l'on a les identités

$$\begin{cases} \mid 1, y - y', 0 \mid^n (A\phi_{y,\eta}, \phi_{y',\eta'}) = \psi(\frac{1}{2}[Y, Y']) \sum_s C_n^s ((ad\ I^1)^s A^{-Y} \phi, \phi_{y'-y,\eta'-\eta}) \\ \mid 1, 0, \eta - \eta' \mid^n (A\phi_{y,\eta}, \phi_{y',\eta'}) = \psi(\frac{1}{2}[Y, Y']) \sum_s C_n^s ((ad\ J^1)^s A^{-Y} \phi, \phi_{y'-y,\eta'-\eta}), \end{cases}$$

où $Y = (y, \eta)$. On pose alors

$$C_{2n} = \sup_{1 \leq s \leq 2n} \sup_{Y \in k^{2d}} \left\| (ad\ I^1)^s A^{-Y} \right\| + \sup_{1 \leq s \leq 2n} \sup_{Y \in k^{2d}} \left\| (ad\ J^1)^s A^{-Y} \right\| .$$

En vertu des hypothèses faites sur l'opérateur A, les majorations suivantes sont valables pour tout entier positif n et pour tous éléments $(y,\eta),(y',\eta')$ appartenant à k^{2d} :

$$| 1, y-y', 0 |^{2n} |(A\phi_{y,\eta}, \phi_{y',\eta'})| \leq 2^{2n} C_{2n}, \tag{4.4}$$

$$| 1, 0, \eta-\eta' |^{2n} |(A\phi_{y,\eta}, \phi_{y',\eta'})| \leq 2^{2n} C_{2n}. \tag{4.5}$$

On utilise alors l'estimation suivante :

$$| 1, y-y', \eta-\eta' | \leq | 1, y-y', 0 | \, . \, | 1, 0, \eta-\eta' |,$$

ainsi que la majoration obtenue par multiplication des inégalités (4.4) et (4.5) pour aboutir à la majoration suivante :

$$\begin{gathered} \forall\ n \geq 0,\ \exists\ C'_n > 0,\ \text{tel que}\ \forall\ X,\ X' \in k^{2d}, \\ | (A\phi_X, \phi_{X'}) | \leq C'_n \, | 1, X-X' |^{-n} . \end{gathered}$$

Grace au théorème 19 (ii), cette dernière majoration nous permet de conclure que f appartient à $S(1)$. ∎

4.2 Applications à l'existence de symboles pour certains opérateurs.

Corollaire 24 *Soit f appartenant à $S(1)$ et soit $A = Op(f)$; supposons en outre que A soit inversible au sens de la théorie des opérateurs bornés sur $L^2(k^d)$. Alors il existe un unique symbole g appartenant à $S(1)$ tel que $A^{-1} = Op(g)$.*

Démonstration : La démonstration consiste à appliquer le théorème 23 (ii).

L'opérateur A^{-1} est borné sur $L^2(k^d)$, c'est a fortiori un opérateur séquentiellement continu de $\mathcal{S}\ (k^d)$ dans $\mathcal{S}'(k^d)$.

On utilise de nouveau une identité combinatoire. Soient I=$\{i_1,...,i_s\}$ un sous-ensemble de $\{1,...,n\}$ ($i_1 < ... < i_s$), σ une permutation de I, $K_1,..,K_n$ et A des opérateurs. Alors on pose

$$(ad\ K_I^\sigma)(A) = (ad\ K_{\sigma(i_1)})..(ad\ K_{\sigma(i_r)}).$$

Avec ces conventions et sous l'hypothèse que A soit inversible, on a la relation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} ((AdK_1)...(AdK_n))(A^{-1}) = \\ \displaystyle\sum_{I_1,..,I_r} \sum_{\sigma_1,..,\sigma_r} (-1)^r A^{-1}(adK_{I_1}^{\sigma_1})(A)A^{-1}(adK_{I_2}^{\sigma_2})(A)A^{-1}..A^{-1}(adK_{I_r}^{\sigma_r})(A)A^{-1}. \end{array} \right. \tag{4.6}$$

dans laquelle la première sommation s'effectue sur toutes les partitions $I_1 \cup .. \cup I_r$de l'ensemble $\{1,...,n\}$ et la seconde sur l'ensemble des familles de permutations σ_k de I_k ($1 \leq k \leq r$). Cette dernière identité s'obtient par application des règles de "dérivations" vérifiées par l'opérateur *ad*. La validité de la seconde hypothèse du théorème 23 (ii) est une conséquence de la combinaison de l'identité (4.6) appliquée à l'opérateur $(A^{-1})^Y$ =$(A^Y)^{-1}$, et du théorème 23 (i). ∎

Corollaire 25 *Soit f un symbole appartenant à $S(1)$, soit $A = Op(f)$ et soit h une fonction analytique au voisinage du spectre de A. Alors l'opérateur $h(A)$ (défini au sens de la théorie spectrale) possède un symbole appartenant à $S(1)$.*

Démonstration : On rappelle la formule de Dunford :

$$h(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (A - zI)^{-1} h(z) d\mu(z),$$

où le contour γ entoure le spectre de A, et est contenu dans un voisinage ouvert du spectre de A sur lequel h est analytique.

Ce corollaire est alors la conséquence de la formule de Dunford, du corollaire 24 et du théorème 23. ■

Chapitre 5

Une formule de composition en calcul de Weyl $\mathfrak{p}-$adique.

Dans tout ce chapitre, on suppose que $\mathcal{O}_k^0 = \mathcal{O}_k$: on peut toujours se ramener à cette situation par un "changement de constante de Planck" c'est-à-dire en remplaçant le caractère ψ par un caractère de la forme $x \mapsto \psi(\varpi^n x)$ avec $n \in \mathbb{Z}$ bien choisi.

Soient f_1 et f_2 deux symboles. Comme il a été remarqué dans l'introduction, il ne peut exister dans le cas non-archimédien de formule de composition "à la Moyal" du composé $f_1 \# f_2$. Par contre, en dimension un, dans le cas archimédien , il existe un opérateur à noyau explicite $K_{\lambda_1,\lambda_2;\lambda}(X,Y;Z)$ tel que, si l'on exprime f_1 (resp. f_2) (supposés appartenir à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$) comme superpositions intégrales de symboles homogènes $(f_1)_{\lambda_1}$ (resp.$(f_2)_{\lambda_2}$) de degrés $-1-i\lambda_1$ (resp. $-1-i\lambda_2$) , alors $f_1 \# f_2$ se décompose en intégrale de symboles homogènes de degrés $-1-i\lambda$, avec

$$(f_1 \# f_2)_\lambda(Z) = \iint d\lambda_1 \, d\lambda_2 \iint K_{\lambda_1,\lambda_2;\lambda}(X,Y;Z)(f_1)_{\lambda_1}(X)(f_2)_{\lambda_2}(Y) \, dX \, dY \qquad (5.1)$$

(cf. [U3], théorème 3.1). Dans le cadre non-archimédien, nous allons prouver un analogue de cette formule dans lequel le paramètre imaginaire pur λ (qui paramétrise l'ensemble des caractères unitaires du groupe $\mathbb{R}_+^\times$) sera remplacé par un caractère χ du groupe $k^\times$. En outre, le noyau K, dans le cas archimédien, fait intervenir de nombreux facteurs Gamma. Dans notre cas, ce noyau fait également intervenir les facteurs Gamma qui sont définis dans [G.G.P.S]. Ils correspondent, dans le cas réel, essentiellement au quotient de deux facteurs Gamma classiques. Nous avons étendu la méthode employée dans [U3], qui consiste à prouver cette formule dans le cas où f_1 et f_2 sont deux caractères non-unitaires (la formule devant alors être interprétée au sens des distributions), puis à exprimer une fonction arbitraire dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ comme une superposition intégrale de caractères non-unitaires. La preuve est alors analogue, avec la différence suivante : comme il est rappelé dans le lemme 26 plus loin, un caractère de $k^\times$ est caractérisé par un couple $(\lambda, \dot\chi)$ avec $\lambda \in (\mathbb{R}/\frac{2\pi}{\ln q}\mathbb{Z})$, $\dot\chi$ s'identifiant à un caractère de $\mathcal{O}_k^\times$. Il y a une simplification par rapport au cas archimédien puisque l'intégration par rapport à λ se fait sur un domaine compact, mais aussi une difficulté supplémentaire, à savoir l'existence d'une infinité (dénombrable) de caractères $\dot\chi$. Cette dernière difficulté disparaîtra grâce à l'utilisation de fonctions-test dans l'espace de Schwartz-Bruhat $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, étant entendu que l'analogue sera énoncé au sens faible dans le dual de cet espace.

5.1 L'analogue non-archimédien de la transformation de Mellin.

On suppose $d = 1$ dans cette partie.

Nous rappelons rapidement les éléments de la théorie de Pontriaguin pour le groupe localement compact $k^\times$. On note $\widehat{k^\times}$ le dual de Pontriaguin de $k^\times$, c'est-à-dire le groupe des caractères (unitaires) de $k^\times$. Plus généralement on considère les quasi-caractères de $k^\times$ qui sont des caractères non nécessairement unitaires ; si $\alpha \in \mathbb{C}$ et si χ est un caractère, la fonction $t \mapsto |t|^\alpha \chi(t)$ est un quasi-caractère que l'on note (α, χ) (cette paire n'est pas unique), et on peut appeler la "partie réelle" de ce quasi-caractère la partie réelle de α. Soit $d^\times t$ la mesure de Haar sur $k^\times$, normalisée par $\int\limits_{\mathcal{O}_k^\times} d^\times t = 1$, et soit g une fonction appartenant à $L^1(k^\times, d^\times t)$. Alors pour tout caractère χ de $k^\times$, on pose :

$$\widehat{g}(\chi) = \int\limits_{k^\times} g(t)\overline{\chi}(t) d^\times t. \tag{5.2}$$

De manière plus explicite, la mesure $d^\times t$ est donnée par $\frac{1}{1-|\varpi|}\dfrac{dt}{|t|}$.

Remarque : Cette dernière formule est la généralisation de la transformation de Mellin. En effet, la mesure $\dfrac{dt}{|t|}$ est une mesure de Haar sur $\mathbb{R}^\times$ et comme tout caractère de $\mathbb{R}^\times$ est de la forme $(\text{sgn(x)})^\varepsilon |x|^{i\lambda}$ (ε=0 ou 1), la formule (5.2) s'écrit dans ce cas

$$\widehat{g}((sgn(.))^\varepsilon |.|^{i\lambda}) = \int\limits_{\mathbb{R}^\times} g(t)(sgn(t))^\varepsilon |t|^{i\lambda} \frac{dt}{|t|}.$$

Si en outre, on suppose que g est une fonction paire, la fonction $\widehat{g}$ est à support sur les caractères pairs (c'est-à-dire ε=0) et

$$\widehat{g}(|.|^{i\lambda}) = 2\int\limits_0^{+\infty} g(t)t^{i\lambda}\frac{dt}{|t|},$$

ce qui n'est autre que la transformation de Mellin classique.

La théorie de Pontriaguin montre les faits suivants :

(1) il existe une unique mesure de Haar $d\chi$ sur $\widehat{k^\times}$ telle que, pour toute fonction g appartenant à $L^1(k^\times, d^\times t) \bigcap L^2(k^\times, d^\times t)$, la fonction $\widehat{g}$ appartienne à $L^2(\widehat{k^\times}, d\chi)$ et

$$\int\limits_{k^\times} |g(t)|^2 d^\times t = \int\limits_{\widehat{k^\times}} |\widehat{g}(\chi)|^2 d\chi;$$

(2) de plus, l'opérateur

$$\begin{cases} L^1(k^\times, d^\times t) \bigcap L^2(k^\times, d^\times t) \to L^2(\widehat{k^\times}, d\chi) \\ \qquad\qquad g \mapsto \widehat{g} \end{cases}$$

se prolonge en une isométrie surjective de $L^2(k^\times, d^\times t)$ sur $L^2(\widehat{k^\times}, d\chi)$;

(3) on a dans le cas où $\widehat{g} \in L^1(k^\times, d^\times t)$ la formule

$$g(t) = \int_{\widehat{k^\times}} \widehat{g}(\chi)\chi(t) d\chi$$

en tout point où g est continue, et la formule reste valable dans $L^2(k^\times, d^\times t)$, en supposant que $g \in L^2(k^\times, d^\times t)$ et remplaçant l'intégrale (initialement définie dans le cas où $\widehat{g} \in L^1(k^\times, d^\times t) \bigcap L^2(k^\times, d^\times t)$) par son prolongement à $L^2(k^\times, d^\times t)$. On explicitera plus loin la mesure de Haar $d\chi$. La formule de Plancherel s'écrit ici

$$\int_{k^\times} g_1(t)\overline{g_2(t)} d^\times t = \int_{\widehat{k^\times}} \widehat{g_1}(\chi)\overline{\widehat{g_2}(\chi)} d\chi,$$

quelles que soient g_1 et g_2 appartenant à $L^2(k^\times, d^\times t)$.

On se propose maintenant de décomposer toute fonction f appartenant à $L^2(k^2)$ en une superposition intégrale de fonctions homogènes c'est-à-dire dont chacune satisfait à une relation de la forme

$$k(tX) = |t|^{-1} \chi(t) k(X)$$

pour un certain caractère unitaire χ.

Soit f une fonction appartenant à $L^2(k^2)$. On pose, formellement

$$f_\chi(X) = \int_{k^\times} f(tX)\overline{\chi(t)} \, |t| \; d^\times t \tag{5.3}$$

pour presque tout $X \in k \times k$: ainsi, $f_\chi(X)$ peut s'interpréter comme la transformée de Mellin, évaluée sur le caractère χ, de la fonction

$$t \mapsto |t| \, f(tX) \tag{5.4}$$

sous réserve de prouver que, pour presque tout X, cette dernière fonction appartient à $L^2(k^\times, d^\times t)$. Or, pour $\xi \neq 0$,

$$\int_{k^\times \times k} |t|^2 \, |f(tx, t\xi)|^2 \; d^\times t \; dx$$

$$= \frac{1}{1 - |\varpi|} \, |\xi|^{-1} \, \|f\|^2_{L^2(k^2)} < +\infty.$$

Il est immédiat que la fonction f_χ satisfait à la relation fonctionnelle

$$f_\chi(tX) = |t|^{-1} \chi(t) f_\chi(X),$$

autrement dit est "homogène" du type associé au quasi-caractère $(-1, \chi)$. La connaissance de la fonction f_χ est donc équivalente à la fonction $f^\flat_\chi$ sur k, définie par

$$f^\flat_\chi(s) = f_\chi(s, 1),$$

puisqu'elles sont liées par la formule

$$f_\chi(x, \xi) = |\xi|^{-1} \chi(\xi) f^\flat_\chi(\frac{x}{\xi}). \tag{5.5}$$

De ce qui précède, et de la formule de Plancherel pour la transformée de Mellin appliquée à la fonction (5.4), il résulte que

$$\int_{\widehat{k^\times}} |f_\chi(X)|^2 \, d\chi = \frac{1}{1-|\varpi|} \int_{k^\times} |f(tX)|^2 \, |t| \ dt$$

pour presque tout $X \in k^2$.

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{k^\times}} \|f_\chi\|^2_{L^2(k)} \ d\chi &= \int_{\widehat{k^\times}} d\chi \int_k \ |f_\chi(s,1)|^2 \, ds \\ &= \int_k ds \int_{\widehat{k^\times}} |f_\chi(s,1)|^2 \, d\chi, \end{aligned}$$

ce qui fournit l'identité

$$\int_{\widehat{k^\times}} \left\|f^\flat_\chi\right\|^2_{L^2(k)} \ d\chi = \frac{1}{1-|\varpi|} \, \|f\|^2_{L^2(k^2)} \, . \tag{5.6}$$

D'où par polarisation, quelles que soient f et $g \in L^2(k^2)$,

$$\int_{k^2} f(X)\overline{g(X)} \ dX = (1-|\varpi|) \int_{\widehat{k^\times}} d\chi \int_k f^\flat_\chi(s) \ \overline{g^\flat_\chi(s)} \ ds.$$

Lorsque g appartient à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, on peut bien entendu expliciter la fonction $g^\flat_\chi(s)$ via l'intégrale (5.3), ce qui conduit à l'identité

$$\int_{k^2} f(X)\overline{g(X)} \ dX = (1-|\varpi|) \int_{\widehat{k^\times}} d\chi \int_k f^\flat_\chi(s) \ ds \int_{k^\times} \overline{g(ts,t)} \ \chi(t) \, |t| \ \ d^\times t.$$

En d'autres termes, on a, au sens faible, en testant contre une fonction appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, l'identité

$$\int_{k^2} f(X)\overline{g(X)} \ dX = \int_{\widehat{k^\times}} d\chi \int_{k\times k} f^\flat_\chi(\frac{x}{\xi})\overline{g(x,\xi)} \ \chi(\xi) \, |\xi|^{-1} \ \ dx \ d\xi,$$

c'est-à-dire, au sens faible dans $\mathcal{S}'_{alg}(k^2)$

$$\begin{aligned} f(x,\xi) &= \int_{\widehat{k^\times}} f^\flat_\chi(\frac{x}{\xi})\chi(\xi) \, |\xi|^{-1} \, d\chi \\ &= \int_{\widehat{k^\times}} f_\chi(\frac{x}{\xi},1)\chi(\xi) \, |\xi|^{-1} \, d\chi \\ &= \int_{\widehat{k^\times}} f_\chi(x,\xi) d\chi. \end{aligned}$$

ou enfin

$$f = \int_{\widehat{k^\times}} f_\chi d\chi. \tag{5.7}$$

Lemme 26 *Soit Soit χ un élément de $\widehat{k^\times}$, i.e. un caractère (unitaire) de $k^\times$. Il existe un unique couple $(i\lambda, \dot{\chi})$ avec $\lambda \in (\mathbb{R}/\frac{2\pi}{\ln q}\mathbb{Z})$ et $\dot{\chi} \in \widehat{k^\times}$ possédant les propriétés suivantes :*

$$(i)\ \chi(t) = |t|^{i\lambda}\, \dot{\chi}(t) \quad \text{pour tout } t \in k^\times$$

$$(ii)\ \dot{\chi}(\varpi) = 1.$$

Rappelons que $q = |\varpi|^{-1}$. Le caractère $\dot{\chi}$ est bien entendu caractérisé par sa restriction à $\mathcal{O}_k^\times$, puisque ([W] ou [G.G.P.S], page 128) le groupe $k^\times$ est engendré par $\mathcal{O}_k^\times$ et par l'élément ϖ.

Remarque : Si au lieu de prendre pour χ un caractère de $k^\times$, on prend un quasi-caractère la décomposition (i) reste valable à condition d'y remplacer le nombre imaginaire pur $i\lambda$ par un nombre complexe α; bien entendu la partie réelle de α est aussi la partie réelle du quasi-caractère χ.

Pour tout quasi-caractère $\chi_1 = (\alpha_1, \dot{\chi}_1)$ de $k^\times$, on désigne par $\tilde{\chi}_1$ le caractère de $k^\times$ défini par

$$\tilde{\chi}_1(x) = \frac{\chi_1(x)}{|\chi_1(x)|} = |x|^{-Re(\alpha_1)}\, \chi_1(x). \tag{5.8}$$

On remarque que si χ_1 est un caractère de $k^\times$, alors $\chi_1 = \tilde{\chi}_1$. En outre, pour tout quasi-caractère $\chi_1 = (\alpha_1, \dot{\chi}_1)$, on a $\tilde{\chi}_1 = (\operatorname{Im}\alpha_1, \dot{\chi}_1)\diamond$

Remarque : En particulier, si l'on identifie $\widehat{k^\times}$ à $(\mathbb{R}/\frac{2\pi}{\ln q}\mathbb{Z}) \times \widehat{\mathcal{O}_k^\times}$, la mesure de Haar $d\chi$ sur $\widehat{k^\times}$ est donnée par la formule suivante :

$$\int_{\widehat{k^\times}} f(\chi)d\chi = c \sum_{\delta\, \in\, \widehat{\mathcal{O}_k^\times}} \int_0^{\frac{2\pi}{lnq}} \widetilde{f}(\lambda, \delta)d\lambda \tag{5.9}$$

où la fonction $\widetilde{f}$ est définie par $\widetilde{f}(\lambda, \dot{\chi}) = f(\chi)$ si $\chi(t) = |t|^{i\lambda}\, \dot{\chi}(t)$ pour tout $t \in k^\times$, et c une constante positive convenable. Rappelons pour finir que $\widehat{\mathcal{O}_k^\times}$ est un ensemble dénombrable car il s'agit du dual de Pontriaguin du compact $\mathcal{O}_k^\times$. En particulier, l'ensemble des quasi-caractères de $k^\times$ peut être considéré comme une surface de Riemann à une infinité de feuillets, chacun des feuillets étant isomorphe à $\mathbb{C}/\frac{2\pi i}{lnq}\mathbb{Z}$ $\diamond$

5.2 Détermination de la forme du noyau.

Le but de cette section est d'expliciter un opérateur à noyau qui exprime la composante homogène du type associé au quasi-caractère (-1, χ) du symbole $f\#g$ en fonction des composantes homogènes de degrés quelconques (de "parties réelles" égales à -1) de f et de g. Si f et g appartiennent à $L^2(k^2)$, la décomposition de $f\#g$ en ses parties homogènes, définie par (5.3) et (5.7), est caractérisée par un certain opérateur bilinéaire

$$(f, g) \mapsto (f\#g)^\flat_\chi,$$

puisque $(f\#g)_\chi$ peut être reconstitué (cf (5.5)) à partir de $(f\#g)^\flat_\chi$. Décomposant à nouveau f et g en parties homogènes, on parvient, formellement au moins, à une identité

$$(f\#g)^\flat_\chi(s) = \iint\limits_{\chi_1,\chi_2} (\iint\limits_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s) f^\flat_{\chi_1}(s_1) f^\flat_{\chi_2}(s_2) ds_1 ds_2)\ d\chi_1 d\chi_2. \tag{5.10}$$

Notre problème est d'expliciter le noyau intégral $K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)$ qui y intervient. Nous adopterons dans tout ce qui suit les notations du lemme 26.

Nous allons montrer pour commencer que, dans (5.10) l'intégrale porte sur l'ensemble des couples de caractères (χ_1,χ_2) pour lesquels $\dot\chi = \dot\chi_1\dot\chi_2$ modulo les carrés de $\widehat{\mathcal{O}_k^\times}$.

Introduisons à cet effet la représentation unitaire $\mathcal{R}$ du groupe $(\mathcal{O}_k^\times)^2$ dans $L^2(k^2)$, ainsi que la représentation unitaire $\mathcal{L}$ de $\mathcal{O}_k^\times$ dans $L^2(k)$ définies par

$$\forall\ f \in L^2(k^2),\ \forall (a,b) \in (\mathcal{O}_k^\times)^2,\ (\mathcal{R}(a,b)f)(y,\eta) = f(ay,b\eta),$$

$$\forall\ u \in L^2(k),\ \forall a \in \mathcal{O}_k^\times,\ (\mathcal{L}(a)u)(x) = u(ax).$$

La décomposition des représentations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ de groupes abéliens compacts comme sommes de leurs restrictions aux sous-espaces associés aux caractères de ces groupes montre que l'espace $L^2(k^2)$ (resp. $L^2(k)$) est la somme directe hilbertienne des espaces $L^2_{\delta_1,\delta_2}(k^2)$ (resp.$L^2_\delta(k)$) lorsque le couple (δ_1,δ_2) décrit $(\widehat{\mathcal{O}_k^\times})^2$ (resp.δ décrit $\widehat{\mathcal{O}_k^\times}$) et où l'on a défini $L^2_{\delta_1,\delta_2}(k^2)$ et $L^2_\delta(k)$ par :

$$L^2_{\delta_1,\delta_2}(k^2) = \left\{f \in L^2(k^2),\ \forall (a,b) \in (\mathcal{O}_k^\times)^2,\ \mathcal{R}(a,b)f = \delta_1(a)\delta_2(b)f\right\}, \tag{5.11}$$

$$L^2_\delta(k) = \left\{u \in L^2(k),\ \forall a \in \mathcal{O}_k^\times,\ \mathcal{L}(a)u = \delta(a)u\right\}. \tag{5.12}$$

En particulier, si l'on introduit l'espace suivant :

$$L^2_\delta(k^2) = \widehat{\bigoplus_{\delta_1{}^{-1}\delta_2=\delta}} L^2_{\delta_1,\delta_2}(k^2), \tag{5.13}$$

on obtient que l'espace $L^2(k^2)$ est la somme directe hilbertienne des espaces $L^2_\delta(k^2)$. Le lemme suivant est immédiat :

Lemme 27 *Si $f \in L^2_{\delta_1,\delta_2}(k^2)$, alors une composante homogène de f associée à un quasi-caractère $(-1,\chi_1)$ ne peut être non nulle que si $\dot\chi_1 = \delta_1\delta_2$. Si $f \in L^2_\delta(k^2)$, les seuls quasi-caractères $(-1,\chi_1)$ qui interviennent dans sa décomposition sont donc ceux pour lesquels $\dot\chi_1 = \delta_1\delta_2$ pour une certaine paire (δ_1,δ_2) vérifiant $\delta_1^{-1}\delta_2 = \delta$: ceci implique que $\dot\chi_1$ est le produit de δ par le carré d'un caractère de $\mathcal{O}_k^\times$.*

Démonstration : Le premier point résulte de l'expression intégrale (5.3). Le second point est une conséquence du premier. ∎

Par ailleurs, pour tout symbole f appartenant à $L^2(k^2)$ et tout élément a de $\mathcal{O}_k^\times$, on a :

$$\mathcal{L}(a)Op(f)\mathcal{L}(a)^{-1} = Op(\mathcal{R}(a,a^{-1})f)$$

(cette dernière égalité n'est rien d'autre que la relation (2.15) particularisée à la matrice $g = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$). Ecrivant, quelles que soient $f \in L^2_{\delta_1,\delta_2}(k^2)$ et $u \in L^2_\chi(k)$,

$$\mathcal{L}(a)Op(f)u = Op(\mathcal{R}(a,a^{-1})f)\mathcal{L}(a)u \tag{5.14}$$

$$= (\delta_1 \delta_2^{-1} \chi)(a) Op(f) u,$$

on voit que $f \in L^2(k^2)$ appartient en fait à $L^2_\delta(k^2)$ si et seulement si pour tout caractère $\chi \in \widehat{\mathcal{O}_k^\times}$, on a $Op(f) L^2_\chi(k) \subset L^2_{\delta^{-1}\chi}(k)$. D'où le lemme :

Lemme 28 *Si f appartient à $L^2_\delta(k^2)$ et g à $L^2_{\delta'}(k^2)$, alors $f\#g$ appartient à $L^2_{\delta\delta'}(k^2)$.*

Démonstration : Cela résulte de la caractérisation ci-dessus. ■

Si nous appliquons maintenant la formule (5.10) à une paire de symboles (f, g) avec $f \in L^2_\delta(k^2)$ et $g \in L^2_{\delta'}(k^2)$, il résulte du lemme 28 que $f\#g$ appartient à $L^2_{\delta\delta'}(k^2)$. Comme les seuls quasi-caractères (-1,χ_1) ou (-1,χ_2) qui interviennent, on vient de le voir, dans les décompositions de f et g sont ceux pour lesquels il existe ν_1 et $\nu_2 \in \mathcal{O}_k^\times$ tels que $\dot\chi_1 = \delta\nu_1^2$ et $\dot\chi_2 = \delta'\nu_2^2$, et que les seuls quasi-caractères (-1,χ) intervenant dans la décomposition de $f\#g$ sont ceux pour lesquels $\dot\chi = \delta\delta'\nu^2$ pour un certain caractère $\nu \in \mathcal{O}_k^\times$, on voit que, dans l'intégrale (5.10), seuls interviennent les couples de caractères (χ_1, χ_2) vérifiant $\dot\chi_1\dot\chi_2 = \dot\chi(\dfrac{\nu}{\nu_1\nu_2})^2$ pour un certain triplet $(\nu_1, \nu_2\,;\nu)$ de caractères de $\mathcal{O}_k^\times$. La formule (5.10) se réduit donc à :

$$(f\#g)^\flat_\chi(s) = \iint_{\chi=\chi_1\chi_2 \text{ mod les carrés de } \widehat{k^\times}} (\iint_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1, s_2; s)\ f^\flat_{\chi_1}(s_1) g^\flat_{\chi_2}(s_2)\ ds_1 ds_2)\ d\chi_1 d\chi_2. \tag{5.15}$$

Nous allons obtenir de nouvelles propriétés du noyau $K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1, s_2; s)$ en examinant comment ce noyau se transforme sous l'action (homographique) des éléments de $SL(2, k)$. Cet argument reste pour le moment formel puisque nous supposons ici que le noyau est une *fonction* de $(s_1, s_2; s)$. Mais il nous permettra de deviner la structure de ce noyau, et on reviendra à des considérations rigoureuses juste après avoir écrit l'équation (5.22).

On note π la représentation régulière de $SL(2, k)$ sur $L^2(k^2)$ qui est définie par :

$$(\pi(\begin{matrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{matrix})f)(y, \eta) = f(dy - b\eta, -cy + a\eta).$$

Soit χ un caractère de $k^\times$, on note π_χ la représentation unitaire de $SL(2, k)$ dans $L^2(k)$ qui est définie par :

$$(\pi_\chi(\begin{matrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{matrix})u)(s) = |-cs + a|^{-1}\,\chi(-cs + a) u(\frac{ds - b}{-cs + a}).$$

Il est aisé de vérifier que pour toute fonction f appartenant à $L^2(k^2)$, pour tout caractère χ de $k^\times$, et presque tout s appartenant à k, on a :

$$(\pi(\begin{matrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{matrix})f)^\flat_\chi(s) = (\pi_\chi(\begin{matrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{matrix})f^\flat_\chi)(s). \tag{5.16}$$

En d'autres termes, la représentation π se décompose comme l'intégrale de la famille de représentations π_χ. Une conséquence de la covariance du calcul de Weyl à l'égard de la représentation métaplectique est la formule

$$\pi(\begin{matrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{matrix})(f\#g) = (\pi(\begin{matrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{matrix})f)\#(\pi(\begin{matrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{matrix})g)$$

Tout comme dans le cas archimédien (cf [U2], page 35), on en déduit l'équation fonctionnelle :

$$K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(\frac{as_1+b}{cs_1+d},\frac{as_2+b}{cs_2+d};\frac{as+b}{cs+d}) = |cs_1+d|\,\chi_1(cs_1+d) \quad |cs_2+d|\,\chi_2(cs_2+d)\times$$
$$|cs+d|\,\chi^{-1}(cs+d) \quad K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s). \tag{5.17}$$

Rappelons que seuls sont à considérer les noyaux $K_{\chi_1,\chi_2;\chi}$ avec

$$\frac{\chi}{\chi_1\chi_2} = \nu^2 \tag{5.18}$$

pour un certain caractère $\nu \in k^\times$. D'après le lemme 26, pour tous caractères χ_1,χ_2,χ il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda \in \mathbb{R}/\frac{2\pi}{\ln q}\mathbb{Z}$ et $\dot\chi_1,\dot\chi_2,\dot\chi \in \widehat{\mathcal{O}_k^\times}$ tel que

$$\chi_1 = |.|^{i\lambda_1}\,\dot\chi_1, \qquad \chi_2 = |.|^{i\lambda_2}\,\dot\chi_2, \qquad \chi = |.|^{i\lambda}\,\dot\chi.$$

Introduisons alors le groupe $\mathbb{W}$ des caractères d'ordre 2 de $k^\times$ (i.e $\chi \in \mathbb{W}$ ssi $\chi^2 \equiv 1$).

Il est clair que si $\nu_0 \in \widehat{k^\times}$ est une solution de l'équation (5.18), la solution générale ν de l'équation est $\nu = \nu_0\varepsilon$ avec $\varepsilon \in \mathbb{W}$. En particulier, le nombre de solutions de cette équation est $\#(\mathbb{W}) = \#(k^\times/(k^\times)^2)$.

Soit ν une solution de l'équation (5.18) : on introduit la fonction $\vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2,\chi}$ définie pour $s_2 \neq s_1$, $s_2 \neq s$, $s_1 \neq s$ par

$$\vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s) = |s_1-s_2|^{\frac{-1-i(\lambda_1+\lambda_2+\lambda)}{2}}\left[(\dot\chi^{-1}\nu)(s_1-s_2)\right]\times$$
$$|s_2-s|^{\frac{-1+i(\lambda_1-\lambda_2+\lambda)}{2}}\left[(\dot\chi_1\nu)(s_2-s)\right]\times$$
$$|s-s_1|^{\frac{-1+i(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda)}{2}}\left[(\dot\chi_2\nu)(s-s_1)\right].$$

Plus généralement, soient χ_1,χ_2 deux quasi-caractères, et χ,ν deux caractères tels que

$$\frac{\chi}{\tilde\chi_1\tilde\chi_2} = \nu^2 \tag{5.19}$$

où $\tilde\chi_1,\tilde\chi_2$ sont définis par (5.8). On aura à considérer par la suite la fonction

$$\vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s) = |s_1-s_2|^{\frac{-1-(\alpha_1+\alpha_2+i\lambda)}{2}}\left[(\dot\chi^{-1}\nu)(s_1-s_2)\right]\times \tag{5.20}$$
$$|s_2-s|^{\frac{-1+\alpha_1-\alpha_2+i\lambda}{2}}\left[(\dot\chi_1\nu)(s_2-s)\right]\times$$
$$|s-s_1|^{\frac{-1-\alpha_1+\alpha_2+i\lambda}{2}}\left[(\dot\chi_2\nu)(s-s_1)\right]$$

où $\chi_1 = (\alpha_1,\dot\chi_1)$, $\chi_2 = (\alpha_2,\dot\chi_2)$, $\chi = (i\lambda,\dot\chi)$.

Il est facile de voir que pour chaque solution ν de (5.19), la fonction $\vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2;\chi}$ vérifie la même équation fonctionnelle que la fonction K donc chacune des fonctions $(\vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2;\chi})^{-1}K_{\chi_1,\chi_2;\chi}$ est invariante sous les transformations

$$(s_1,s_2,s) \mapsto (\frac{as_1+b}{cs_1+d},\frac{as_2+b}{cs_2+d},\frac{as+b}{cs+d}).$$

Cela resulte en effet, pour l'essentiel, de la relation

$$\frac{as_1+b}{cs_1+d}-\frac{as_2+b}{cs_2+d}=\frac{s_1-s_2}{(cs_1+d)(cs_2+d)}. \tag{5.21}$$

Si l'on pose $\Omega=\{(s_1,s_2,s)\in\mathbb{P}^1(k)\times\mathbb{P}^1(k)\times\mathbb{P}^1(k)$ tel que $s_i\neq s_j\ \forall\ i\neq j\}$, alors le groupe $SL(2,k)$ agit sur Ω par

$$\begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b}\\ \mathrm{c} & \mathrm{d}\end{pmatrix}.(s_1,s_2,s)=(\frac{as_1+b}{cs_1+d},\frac{as_2+b}{cs_2+d},\frac{as+b}{cs+d}).$$

Utilisant la formule (5.21), on voit que deux points finis (s_1,s_2,s) et (s_1',s_2',s') de l'espace Ω sont dans la même orbite si et seulement si le quotient de $\frac{s_1-s_2}{(s_1-s)(s_2-s)}$ par $\frac{s_1'-s_2'}{(s_1'-s')(s_2'-s')}$ est le carré d'un élément de $k^\times$. Le cardinal de $SL(2,k)\backslash\,\Omega$ est donc égal à l'indice du groupe des carrés dans $k^\times$ qui est, d'autre part, le cardinal de $\mathbb{W}$, et l'espace des fonctions sur $SL(2,k)\backslash$ Ω est de dimension $\#(\mathbb{W})$. En outre, si ν_0 est une solution particulière de (5.19), une base de cet espace est constituée par la famille de fonctions $\big((\vartheta^{\nu_0}_{\chi_1,\chi_2;\chi})^{-1}(\vartheta^{\nu}_{\chi_1,\chi_2,\chi})\big)$ où ν décrit l'ensemble de toutes les solutions de l'équation précédente : ceci permet d'écrire la fonction $(\vartheta^{\nu_0}_{\chi_1,\chi_2;\chi})^{-1}K_{\chi_1,\chi_2;\chi}$ comme une combinaison linéaire des fonctions $(\vartheta^{\nu_0}_{\chi_1,\chi_2;\chi})^{-1}(\vartheta^{\nu}_{\chi_1,\chi_2;\chi})$.

Par suite il existe des constantes $a_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)$ telles que

$$K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)=\sum_\nu a_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)\vartheta^{\nu}_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s): \tag{5.22}$$

dans cette somme le paramètre ν décrit l'ensemble des solutions de (5.19)

Il reste à expliciter les constantes $a_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)$: la méthode consistera à appliquer la formule (5.19) en y remplaçant $f= f_{\chi_1}$ et $g= g_{\chi_2}$ par une paire de symboles particuliers, mais suffisamment généraux. On sera en même temps en mesure de justifier (5.10) par des considérations plus précises que celles, formelles, qui précèdent.

Rappelons la formule

$$\mathcal{F}^{-1}(|t|^\nu\,sign(t)^\varepsilon)(s)=i^\varepsilon\pi^{-\frac{1}{2}-\nu}\frac{\Gamma(\frac{\nu+1+\varepsilon}{2})}{\Gamma(\frac{-\nu+\varepsilon}{2})}\,|s|^{-\nu-1}\,(sign(s))^\varepsilon$$

de l'analyse archimédienne (-1<Re $\nu<0$, $\varepsilon\in\{0,1\}$). L'analogue non-archimédien fait intervenir, au lieu de la fonction $t\mapsto|t|^\nu\,sign(t)^\varepsilon$ sur $\mathbb{R}$, un quasi-caractère χ sur $k^\times$. La fonction $t\mapsto\chi(t)$ peut être considérée comme une distribution tempérée sur k si $\mathrm{Re}\,\chi>-1$. Sa transformée de Fourier inverse, i.e. la distribution définie au sens faible $-1<\mathrm{Re}\,\chi<0$ par

$$(\mathcal{F}^{-1}\chi)(s)=\int_k\chi(t)\psi(st)\ dt,$$

est donnée par la formule $(\mathcal{F}^{-1}\chi)(s)=c(\chi)\ |s|^{-1}\chi^{-1}(s)$, où le coefficient $c(\chi)$ est traditionnellement noté $\Gamma(|.|\ \chi)$ (cf. [G.G.P.S] ; page 144), le caractère $|.|\ \chi$ étant bien sûr la fonction $t\mapsto|t|\ \chi(t)$. On remarquera que la fonction Gamma ainsi définie généralise ce qui serait, dans le cas archimédien, le produit d'une puissance de π par le quotient de deux facteurs Gamma.

D'une façon générale, l'expression $\Gamma(\alpha, \chi)$ ($\alpha \in \mathbb{C}$, χ quasi-caractère) représente dans ce qui suit le facteur

$$\Gamma(t \mapsto |t|^{\alpha}\ \chi(t)).$$

Ainsi on voit que la fonction Gamma se prolonge en une fonction sur l'ensemble des quasi-caractères (α, χ) non-identiquement égaux à un, qui est en outre $\dfrac{2\pi}{\ln q}-$ périodique par rapport à α. Précisons (cf. [W] ou [G.G.P.S])) que si χ est un caractère (i.e. est de partie réelle nulle), alors la fonction $\alpha \mapsto \Gamma(\alpha, \chi)$ est une fonction holomorphe entière dans le cas où la restriction de χ à $\mathcal{O}_k^{\times}$ est non- triviale ; enfin $\Gamma(\alpha, \chi)$ a pour seul pôle le point $\alpha = 0$ si le caractère χ est trivial sur $k^{\times}$.

La formule

$$(\mathcal{F}^{-1}\chi)(s) = \Gamma(1, \chi)\,|s|^{-1}\,\chi^{-1}(s) \tag{5.23}$$

permet de prolonger la définition de la fonction $t \mapsto \chi(t)$ en tant que distribution tempérée, initialement définie pour Re χ >-1, au cas où Re $\chi < 0$, sous l'hypothèse que $\Gamma(1, \chi) \neq \infty$. Elle permet aussi d'obtenir la formule (cf. [G.G.P.S], page 145)

$$\Gamma(0, \chi)\ \Gamma(1, \chi^{-1}) = \chi(-1).$$

Cette formule peut aussi s'écrire

$$\Gamma(\alpha, \chi)\ \Gamma(1-\alpha, \chi^{-1}) = \chi(-1) : \tag{5.24}$$

elle montre en particulier qu'on ne peut avoir $\Gamma(\alpha, \chi) = 0$ que si $|.|^{\alpha-1}\ \chi$ est le caractère trivial (ce n'est pas tout à fait la formule des compléments, puisque, dans le cas archimédien, le facteur $\Gamma(\alpha, \chi)$ représente le quotient de deux fonctions Gamma classiques).

5.3 Explicitation des "constantes" a_ν.

Soient h_1 et h_2 deux quasi-caractères ne dépendant que de x et ξ respectivement. Dans le lemme 29, nous allons calculer explicitement le composé $h_1 \# h_2$: remarquer que l'on sort ici du cadre envisagé puisque h_1 et h_2 ne sont certainement pas dans $\mathcal{S}(1)$. La remarque de la page 18 montre que le symbole $h_1 \# h_2$ est néanmoins bien défini. Ensuite nous vérifierons, dans le lemme 31, que la formule (5.22) est valable dans le cas où h_1 et h_2 sont deux quasi-caractères ne dépendant que de x et ξ respectivement.

Lemme 29 *Soient $\chi_1 = (\alpha_1, \dot{\chi}_1)$ et $\chi_2 = (\alpha_2, \dot{\chi}_2)$ deux quasi-caractères. Posons, pour tout caractère $\chi = (i\lambda, \dot{\chi})$ et toute solution ν de l'équation (5.19),*

$$c_\nu(\chi_1, \chi_2; \chi) = (\#(\mathbb{W}))^{-1}\nu(2)\ \chi_1(-1)\ |2|^{\dfrac{-1+i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2}}\ \Gamma(0, \chi_1)\ \Gamma(0, \chi_2)\times$$
$$\frac{\Gamma(\dfrac{1-i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}, (\dot{\chi}_1\nu)^{-1})\ \Gamma(\dfrac{1+i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2}, \nu)}{\Gamma(\dfrac{1+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}, \dot{\chi}_2\nu)}. \tag{5.25}$$

Soient $h_1(x, \xi) = |x|^{-1}\,\chi_1(x)$ et $h_2(x, \xi) = |\xi|^{-1}\,\chi_2(\xi)$ et supposons que

$$|Re(\chi_1) \pm Re(\chi_2)| < 1$$

(rappelons que $Re(\chi_1) = \mathrm{Re}(\alpha_1)$, $Re(\chi_2) = \mathrm{Re}(\alpha_2)$). Alors on a, au sens faible dans le dual de $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$,

$$h_1 \# h_2 = \int_{\widehat{k^\times}} h_\chi \; d\chi,$$

c'est-à-dire pour toute fonction $f \in \mathcal{S}_{alg}(k^2)$,

$$< h_1 \# h_2 \; , \; f >= \int_{\widehat{k^\times}} < h_\chi \; , \; f > \; d\chi \tag{5.26}$$

avec, par définition,

$$h_\chi(x, \xi) = |\xi|^{-1} \chi(\xi) \; h^\flat_\chi(\frac{x}{\xi}), \tag{5.27}$$

où la fonction $h^\flat_\chi$ est définie par

$$(h^\flat_\chi)(s) = (1 - |\varpi|)^{-1} \;\; |s|^{\dfrac{-1 + i\lambda + \alpha_1 - \alpha_2}{2}} \;\; \dot{\chi}_1(s) \sum_\nu c_\nu(\chi_1, \chi_2; \chi) \nu(s), \tag{5.28}$$

et où la sommation porte sur l'ensemble des solutions de (5.19).

Démonstration : La fonction f sur laquelle on teste la décomposition intégrale (5.26) appartient à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$: elle est donc localement constante à support compact. Il existe donc un certain voisinage $V = 1 + \varpi^N \mathcal{O}_k$ de 1 tel que $f(ax, a\xi) = f(x, \xi)$ pour tout élément a de V et tout couple$(x, \xi) \in k^2$. On en déduit que

$$\begin{aligned} f_\chi(x, \xi) &= \int_{k^\times} f(tx, t\xi) \overline{\chi(t)} \, |t| \;\; d^\times t = \int_{k^\times} f(tax, ta\xi) \overline{\chi(t)} \, |t| \;\; d^\times t \\ &= |a|^{-1} \chi(a) f_\chi(x, \xi) = \dot{\chi}(a) f_\chi(x, \xi) \end{aligned}$$

pour tout élément a de V et tout couple $(x, \xi) \in k^2$. En particulier, si la composante homogène f_χ n'est pas identiquement nulle, alors $\dot{\chi}(a) = 1$ pour tout $a \in V$. Le caractère $\dot{\chi}$ induit ainsi un caractère multiplicatif sur $\mathcal{O}_k^\times / (1 + \varpi^N \mathcal{O}_k)$, qui est un groupe fini (puisque c'est le quotient d'un groupe compact par un sous-groupe ouvert). Donc, la composante homogène f_χ ne peut être non-identiquement nulle que pour un nombre fini de choix du caractère $\dot{\chi}$. Le lemme 26 montre alors que f_χ est identiquement nulle sauf pour une partie compacte de $\widehat{k^\times}$. Il est clair par ailleurs que la fonction $(x, \xi) \mapsto f_\chi(x,\xi)$ est continue sur $k^2 \backslash \{(0, 0)\}$: on voit aussi que la fonction $(\chi, s) \mapsto (f^\flat_\chi)(s) = f_\chi(s, 1)$ est uniformément bornée.

Nous allons montrer que les deux membres de l'équation (5.26) sont des fonctions holomorphes de α_1,α_2 dans le domaine indiqué. Pour le second membre cela résulte de (5.28) et de la relation qui s'en déduit grâce à (5.27) :

$$\begin{aligned} (h_\chi)(x, \xi) = (1 - |\varpi|)^{-1} \; \sum_\nu c_\nu(\chi_1, \chi_2; \chi) \, |x|^{\dfrac{-1 + i\lambda + \alpha_1 - \alpha_2}{2}} \;\; (\dot{\chi}_1 \nu)(x) \times \\ |\xi|^{\dfrac{-1 - i\lambda - \alpha_1 + \alpha_2}{2}} \; (\chi \dot{\chi}_1^{-1} \nu^{-1})(\xi), \end{aligned}$$

puisque la fonction h_χ est localement intégrable (on a $|\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)|<1$) et que l'intégration en χ porte, comme il a été dit plus haut sur une partie compacte. Pour ce qui concerne le membre de gauche, on rappelle que, comme le symbole $h_j(x,\xi)$ dépend seulement de x ou seulement de ξ, h_j est aussi le symbole standard de l'opérateur $Op(h_j)$ (cf (2.18)). On sait aussi que

$$Op_{st}(h_1)Op_{st}(h_2)=Op_{st}(h_1\otimes h_2),$$

avec $(h_1\otimes h_2)(x,\xi)=h_1(x)\ h_2(\xi)$. D'autre part, l'application qui, à un couple de quasi-caractères (χ_1,χ_2), associe la distribution tempérée sur k^2 définie par

$$(x,\xi)\mapsto |x|^{-1}\chi_1(x)\,|\xi|^{-1}\chi_2(\xi)$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ensemble

$$\{(\chi_1,\chi_2),\ \chi_1\neq 1 \text{ et } \chi_2\neq 1\}\,.$$

La notion de fonction holomorphe d'un quasi-caractère $\chi_1=(\alpha_1,\dot\chi_1)$ doit s'entendre comme celle de fonction holomorphe de α_1 lorsque $\dot\chi_1$ est fixé.

De plus, l'opérateur Λ défini par la formule (2.20) du chapitre 1, qui lie les symboles standard et de Weyl du même opérateur, est continu de $\mathcal{S}'(k^2)$ dans $\mathcal{S}'(k^2)$ et de $\mathcal{S}(k^2)$ dans $\mathcal{S}(k^2)$; ceci montre que la fonction

$$<h_1\#h_2\ ,\ f>=<(x,\xi)\mapsto |x|^{-1}\chi_1(x)\,|\xi|^{-1}\chi_2(\xi),(\Lambda f)>$$

est holomorphe sur l'ensemble

$$\{(\chi_1,\chi_2),\ \chi_1\neq 1 \text{ et } \chi_2\neq 1\}\,.$$

Pour démontrer l'identité (5.26), on peut donc, utilisant le prolongement analytique, se ramener au cas où

$$0<Re(\chi_2)<Re(\chi_1)<1. \tag{5.29}$$

Le symbole de Weyl $h_1\#h_2$ de l'opérateur produit $Op(h_1)Op(h_2)$ est donné (cf. (2.21)) par la formule

$$(\mathcal{F}_1(h_1\#h_2))(\eta,\xi)=(\mathcal{F}_1(h_1\otimes h_2))(\eta,\xi-\frac{\eta}{2})$$

où, rappelons-le, $\mathcal{F}_1$ désigne la transformation de Fourier par rapport à la première variable. Lorsque les inégalités (5.29) sont vérifiées, on peut utiliser la formule (5.23)

$$(h_1\#h_2)(x,\xi)=\Gamma(0,\chi_1)\ \chi_1(-1)\int_{k^\times}\chi_1^{-1}(\eta)\left|\xi-\frac{\eta}{2}\right|^{-1}\chi_2(\xi-\frac{\eta}{2})\ \psi(x\eta)\ d\eta,$$

dans laquelle l'intégrale du second membre est absolument convergente. De plus, en effectuant le changement de variable $\eta\mapsto 2\xi\eta$, nous obtenons la majoration suivante

$$\begin{aligned}|(h_1\#h_2)(x,\xi)|&\leq|\Gamma(0,\chi_1)|\ \ |2|\ \ \left|\chi_2(\xi)\ \chi_1^{-1}(\xi)\right|\int_{k^\times}\left|\chi_1^{-1}(\eta)\right|\ \ |1-\eta|^{-1}\,|\chi_2(1-\eta)\ |\ \ d\eta\\&\leq C\,|\xi|^{\mathrm{Re}(\alpha_2-\alpha_1)}\end{aligned} \tag{5.30}$$

(observer que $|2|$ est une valeur absolue $\mathfrak{p}-$adique de 2, alors que $\left|\chi_2(\xi)\ \chi_1^{-1}(\xi)\right|$ est le module d'un nombre complexe : mais dans les égalités, au contraire de cette inégalité, seules des valeurs absolues $\mathfrak{p}-$adiques interviennent), où l'intégrale du membre de droite est convergente en vertu des hypothèses imposées aux différents quasi-caractères. Un calcul direct (ou la règle de covariance) montre en outre que la distribution $h_1\#h_2$ satisfait à la règle de transformation suivante

$$\forall\ a \in \mathcal{O}_k^\times,\ (h_1\#h_2)(a^{-1}x, a\xi) = \chi_1^{-1}(a)\chi_2(a)\ (h_1\#h_2)(x,\xi).$$

En transposant l'action de a, on voit que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)\bigcap L^2_\delta(k^2)$ (cf. la définition 5.13) $< h_1\#h_2, f >$ est égal à zéro si $\delta \neq \dot\chi_1\dot\chi_2^{-1}$. Ainsi, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, on a

$$< h_1\#h_2, f >=< h_1\#h_2, P_{\dot\chi_1\dot\chi_2^{-1}} f >$$

où $P_{\dot\chi_1\dot\chi_2^{-1}}f$ est la composante de f sur $L^2_{\dot\chi_1\dot\chi_2^{-1}}(k^2)$. Nous pouvons donc supposer dans la suite que la fonction f appartient à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)\bigcap L^2_{\dot\chi_1\dot\chi_2^{-1}}(k^2)$. En particulier, d'après le lemme 27, seuls les caractères χ tels que $\chi = \tilde\chi_1\tilde\chi_2\nu^2$, pour un certain caractère ν de $k^\times$, interviennent dans la décomposition en parties homogènes de f . Cela revient au même d'écrire $\chi^{-1} = \tilde\chi_1\tilde\chi_2\nu^2$, en changeant ν en $(\nu\tilde\chi_1\tilde\chi_2)^{-1}$.

On a

$$< h_1\#h_2, f >= \Gamma(0,\chi_1)\ \chi_1(-1) \int\limits_k \int\limits_k (\int\limits_k \chi_1^{-1}(\eta) \left|\xi - \frac{\eta}{2}\right|^{-1} \chi_2(\xi - \frac{\eta}{2})\psi(x\eta)\ d\eta)\ f(x,\xi)\ dx\ d\xi,$$

où le domaine d'intégration en x, ξ est compact, et l'inégalité (5.30) montre que l'intégrale triple converge (puisque $Re(\chi_1) - Re(\chi_2) > -1$). Ainsi, à l'aide des changements de variables $x = s\xi$ et $\eta \mapsto 2\xi\eta$, on obtient

$$\begin{aligned} < h_1\#h_2, f >= \Gamma(0,\chi_1)\ |2|\ \chi_1^{-1}(2)\ \chi_1(-1) \int\limits_{k^3} |\xi|\ \chi_1^{-1}(\xi)\ \chi_2(\xi)\times \\ \chi_1^{-1}(\eta)\,|1-\eta|^{-1}\,\chi_2(1-\eta)\psi(2s\xi^2\eta)\ f(s\xi,\xi)\ ds\ d\xi\ d\eta. \end{aligned}$$

qui est une intégrale absolument convergente sous les conditions (5.29) : cette intégrale est aussi la limite lorsque $\varepsilon \to 0$, de l'intégrale $I(\varepsilon)$ analogue, obtenue en faisant porter l'intégrale sur l'ensemble défini par la condition $|2s\eta| \geq \varepsilon$.

Rappelons que ϕ (resp. ϕ^0)désigne, à un facteur multiplicatif près, la fonction indicatrice de $\mathcal{O}_k$ (resp. $\mathcal{O}_k^0$) : ces deux fonctions sont ici identiques d'après l'hypothèse faite au début de ce chapitre. Puisque la fonction f appartient à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, on a :

$$f(x,\xi) = f(x,\xi)\phi(a\xi^2)$$

pour tout $|a| \in k^\times$ avec $|a|$ moindre qu'une constante indépendante de ε, d'où

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) =\ & \Gamma(0,\chi_1)\ |2|\ \chi_1^{-1}(2)\ \chi_1(-1) \int\limits_k \int\limits_{|2s\eta|\geq\varepsilon} |\xi|\ \chi_1^{-1}(\xi)\ \chi_2(\xi)\times \\ & \chi_1^{-1}(\eta)\,|1-\eta|^{-1}\,\chi_2(1-\eta)\psi(2s\xi^2\eta)\ f(s\xi,\xi)\ \phi(a\xi^2)\ ds\ d\xi\ d\eta \\ & = \Gamma(0,\chi_1)\ |2|\ \chi_1^{-1}(2)\ \chi_1(-1) \int\limits_{|2s\eta|\geq\varepsilon} \chi_1^{-1}(\eta)\,|1-\eta|^{-1}\,\chi_2(1-\eta)\ ds\ d\eta\ \times \\ & \int\limits_k |\xi|\ \chi_1^{-1}(\xi)\ \chi_2(\xi)\psi(2s\xi^2\eta)\ f(s\xi,\xi)\ \phi(a\xi^2)\ d\xi\ . \end{aligned} \tag{5.31}$$

D'après la relation (5.7) et puisque f appartient à $\mathcal{S}_{alg}(k^2) \bigcap L^2_{\dot\chi_1\dot\chi_2^{-1}}(k^2)$, la fonction $f(s\xi,\xi)$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} f(s\xi,\xi) &= \int_{\widehat{k^\times}} f_\chi(s\xi,\xi)\ d\chi \\ &= \int_{D(\chi_1,\chi_2)} f_\chi(s\xi,\xi)\ d\chi \\ &= |\xi|^{-1} \int_{D(\chi_1,\chi_2)} f^\flat_\chi(s)\ \chi(\xi) d\chi, \end{aligned} \tag{5.32}$$

où $D(\chi_1,\chi_2)$ est l'ensemble des caractères χ tels que

$$\chi^{-1} = \tilde\chi_1\tilde\chi_2 \text{ mod les carrés de } \widehat{k^\times} \tag{5.33}$$

et qui, en outre, interviennent dans la décomposition en parties homogènes de f. Ainsi l'intégration ne porte que sur une partie compacte de $\widehat{k^\times}$.

On a donc

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) = {} & |2|\ \chi_1^{-1}(2)\ \Gamma(0,\chi_1)\ \chi_1(-1)\times \\ & \iint_{|2s\eta|\geq\varepsilon} \chi_1^{-1}(\eta)\,|1-\eta|^{-1}\,\chi_2(1-\eta)\ d\eta\ ds\ \int_k (\chi\chi_1^{-1}\chi_2)(\xi)\ \phi(a\xi^2)\psi(2s\xi^2\eta)\ d\xi \\ & \int_{D(\chi_1,\chi_2)} f^\flat_\chi(s)\ d\chi\ . \end{aligned} \tag{5.34}$$

Rappelons que $\chi^{-1} = \tilde\chi_1\tilde\chi_2\nu^2$ pour un certain caractère ν appartenant à $k^\times$: on fixe un tel caractère ν_0, mais on verra que la formule finale ne dépend pas de ce choix. Donc

$$\chi\chi_1^{-1}\chi_2 = |.|^{i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}\,(\dot\chi_1)^{-2}\nu_0^{-2}$$

ce qui nous permet de calculer l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{k^\times} (\chi\chi_1^{-1}\ \chi_2)(\xi)\phi(a\xi^2)\psi(2\xi^2 s\eta)\ d\xi \\ &= \int_{k^\times} |\xi^2|^{\dfrac{i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}} \phi(a\xi^2)((\dot\chi_1)^{-2}\nu_0^{-2})(\xi)\psi(2\xi^2 s\eta)\ d\xi. \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $t=\xi^2$ (on désignera par $k^{\times\ 2}$ l'ensemble des carrés de $k^\times$), qui transforme l'intégrale qui précède en

$$= |2|^{-1} \int_{k^{\times 2}} |t|^{\dfrac{-1+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}} \phi(at)((\dot\chi_1)^{-1}\nu_0^{-1})(t)\psi(2ts\eta)dt.$$

Or $k^{\times 2} = \bigcap_{\epsilon\in\mathbb{W}}$ Ker ϵ, où, rappelons-le, $\mathbb{W}$ est le groupe des caractères d'ordre 2 de $k^\times$. En particulier la fonction indicatrice de $k^{\times 2}$ est égale à $\dfrac{1}{\#(\mathbb{W})}\sum_{\epsilon\ \in\ \mathbb{W}} \epsilon^{-1}$. On remarque, en outre, que $\dfrac{1}{\#(\mathbb{W})}\sum_{\epsilon\in\mathbb{W}}\epsilon^{-1}\nu_0^{-1} = \dfrac{1}{\#(\mathbb{W})}\sum_{\nu}\nu^{-1}$ où la sommation porte sur l'ensemble des solutions de l'équation $\chi^{-1} = \tilde{\chi}_1\tilde{\chi}_2\nu^2$. D'où

$$\int\limits_{k^\times}(\chi\chi_1^{-1}\chi_2)(\xi)\phi(a\xi^2)\psi(2\xi^2 s\eta)\ d\xi = (|2|\,\#(\mathbb{W}))^{-1}\sum_{\nu}\int\limits_{k^\times}|t|^{\dfrac{-1+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}}\times$$
$$\phi(at)((\dot{\chi}_1)^{-1}\nu^{-1})(t)\psi(2ts\eta)dt.$$

Soit μ un quasi-caractère de $k^\times$. Alors, prenant $\mathcal{F}^{-1}\mu$ au sens des distributions tempérées,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(t\mapsto\phi(at)\mu(t))(2s\eta) &= (\mathcal{F}^{-1}(t\mapsto\phi(at))*\mathcal{F}^{-1}\mu)(2s\eta)\\ &= \Gamma(1,\mu)\ \ |a|^{-1}\int\limits_{k^\times}\phi(a^{-1}(2s\eta-t))\,|t|^{-1}\,\mu^{-1}(t)\ dt,\end{aligned}$$

où l'on a appliqué la formule (5.23). Cette intégrale porte sur l'ensemble $2s\eta + a\mathcal{O}_k$. Il existe une constante C ne dépendant que de la partie ramifiée de μ telle que, quel que soit $\varepsilon > 0$, les inégalités $|2s\eta| \geq \varepsilon$ et $|a| \leq C\varepsilon$ entraînent :

$$\forall t\in 2s\eta + a\mathcal{O}_k,\ \ |t|^{-1}\,\mu^{-1}(t) = |2s\eta|^{-1}\,\mu^{-1}(2s\eta).$$

Pour $|2s\eta| \geq \varepsilon$ et $|a| \leq C\varepsilon$, on a donc

$$\mathcal{F}^{-1}(t\mapsto\phi(at)\mu(t))(2s\eta) = \Gamma(1,\mu)\ \ |2s\eta|^{-1}\,\mu^{-1}(2s\eta). \tag{5.35}$$

Nous appliquons cette dernière formule au caractère

$$\mu = |.|^{\dfrac{-1+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}}(\dot{\chi}_1)^{-1}\nu^{-1}.$$

Il est possible ainsi d'expliciter $I(\varepsilon)$ sous la forme :

$$I(\varepsilon) = \ (\#(\mathbb{W}))^{-1}\chi_1^{-1}(2)\ \chi_1(-1)\ \Gamma(0,\chi_1)\sum_{\nu}\Gamma(\frac{1+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2},(\dot{\chi}_1)^{-1}\nu^{-1})\times$$
$$\int\limits_{D(\chi_1,\chi_2)}d\chi\iint\limits_{|2s\eta|\geq\varepsilon}f^\flat_\chi(s)\ \ |2s|^{\dfrac{-1-i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}(\dot{\chi}_1)(2s)\ \nu(2s)\ \times$$
$$\chi_1^{-1}(\eta)\,|1-\eta|^{-1}\,\chi_2(1-\eta)\ \ |\eta|^{\dfrac{-1-i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}(\dot{\chi}_1\nu)(\eta)\ d\eta\ ds.$$

L'intégrale sur $d\chi$ ne porte que sur un compact. La condition (5.29) et le fait que la fonction $f^\flat_\chi$ soit continue et équivalente à l'infini à $C\,|s|^{-1}\,\chi(s)$ pour une certaine constante C montrent que l'intégrale relative à $d\eta\ ds$, prise sur k^2 tout entier, est absolument convergente : la limite, lorsque $\varepsilon\to 0$, de $I(\varepsilon)$ s'obtient donc en supprimant la restriction $|2s\eta|\geq\varepsilon$ sous l'intégrale double.

Rappelons par ailleurs (cf. [G.G.P.S], page 145) que si δ_1 et δ_2 sont deux quasi-caractères vérifiant

$$Re(\delta_1) > 0,\ \ Re(\delta_2) > 0 \text{ et } \ |Re(\delta_1)+Re(\delta_2)| < 1,$$

alors

$$\int_{k^\times} |\eta|^{-1}\,\delta_1(\eta)\,|1-\eta|^{-1}\,\delta_2(1-\eta)d\eta = \frac{\Gamma(0,\delta_1)\Gamma(0,\delta_2)}{\Gamma(0,\delta_1\delta_2)}, \tag{5.36}$$

pourvu que l'intégrale de gauche converge. D'où, en écrivant

$$\chi_1^{-1}\dot{\chi}_1\nu\,|.|^{\frac{-1-i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}} = \nu\,|.|^{\frac{-1-i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2}},$$

nous pouvons alors expliciter (5.34) :

$$< h_1\#h_2, f >= \ (\#(\mathbb{W}))^{-1}\chi_1^{-1}(2)\ \chi_1(-1)\ \Gamma(0,\chi_1)\ \Gamma(0,\chi_2)\times$$

$$\int_{D(\chi_1,\chi_2)} d\chi \int_k ds\ f^\flat_\chi(s)\ \ |2s|^{\frac{-1-i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}\ \ (\dot{\chi}_1)(2s)\times$$

$$\sum_\nu \frac{\Gamma(\frac{1+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2},(\dot{\chi}_1\nu)^{-1})\Gamma(\frac{1-i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\nu)}{\Gamma(\frac{1-i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2},\dot{\chi}_2\nu)}\nu(2s). \tag{5.37}$$

Par ailleurs, on a

$$< h_\chi, f >= (1-|\varpi|)\int_k h^\flat_\chi(s) f^\flat_{\chi^{-1}}(s)\ ds \tag{5.38}$$

pour toute fonction $f\in\mathcal{S}_{alg}(k^2)$. Cela résulte en effet de la formule (5.27)

$$\begin{aligned}
< h_\chi, f > &= \int_{k^2} f(x,\xi)\,|\xi|^{-1}\,\chi(\xi)h^\flat_\chi(\frac{x}{\xi})\ dx\ d\xi\\
&= \int_{k^2} f(st,t)\chi(t)h^\flat_\chi(s)\ ds\ dt\\
&= \int_k h^\flat_\chi(s)\ ds \int_k f(st,t)\chi(t)\ dt
\end{aligned}$$

jointe à la formule (5.3)

$$\begin{aligned}
f^\flat_{\chi^{-1}}(s) &= f_{\chi^{-1}}(s,1)\\
&= \int_k f(st,t)\chi(t)\,|t|\ \ d^\times t
\end{aligned}$$

et à la relation $|t|\ d^\times t = \dfrac{dt}{(1-|\varpi|)}$.

En changeant χ en χ^{-1} dans (5.37), l'équation $\chi^{-1}=\tilde{\chi}_1\tilde{\chi}_2\nu^2$ devient la condition (5.19), et on voit donc (toujours avec $\chi=(i\lambda,\dot{\chi})$) que $< h_1\#h_2\ ,\ f >$ s'écrit effectivement $\int_{\widehat{k^\times}} < h_\chi, f > d\chi$ à la condition que $h^\flat_\chi(s)$ soit défini par l'expression (5.28). ■

Lemme 30 *Soient* $h_1(x,\xi) = |x|^{-1}\chi_1(x)$ *et* $h_2(x,\xi) = |\xi|^{-1}\chi_2(\xi)$ *où* χ_1 *et* χ_2 *sont des quasi-caractères. On suppose que* $\chi_1 = (\alpha_1, \dot\chi_1)$ *et* $\chi_2 = (\alpha_2, \dot\chi_2)$. *En outre, on suppose que*

$$|Re(\chi_1) \pm Re(\chi_2)| < 1,\ \ Re(\chi_1) > 0 \text{ et } Re(\chi_2) > 0.$$

On note ici $(h_1\#h_2)_\chi$ *et* $(h_1\#h_2)^\flat_\chi$ *les fonctions notées* h_χ *et* $h^\flat_\chi$ *dans l'énoncé du lemme 29. Pour tout caractère* χ, *on a alors la formule*

$$\begin{aligned}(h_1\#h_2)^\flat_\chi(s) &= \iint_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\,|s_1|^{-1}\chi_1(s_1)ds_1ds_2 \\ &= \sum_\nu a_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)\iint_{k^2}\vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\,|s_1|^{-1}\chi_1(s_1)ds_1ds_2,\end{aligned} \tag{5.39}$$

dans laquelle les fonctions $\vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2,\chi}$ *ont été définies en (5.20), et où les coefficients* $a_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)$ *sont donnés par la formule*

$$a_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi) = (1-|\varpi|)^{-1}\#(\mathbb{W})^{-1}\ |2|^{\overline{\frac{-1+i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2}}}\ \nu(2)\ \chi_1(-1)\times$$

$$\frac{\Gamma(\frac{1-i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2},(\dot\chi_1\nu)^{-1})}{\Gamma(\frac{1+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2)}{2},\dot\chi_2\nu)\ \Gamma(\frac{1-i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\dot\chi^{-1}\nu)}. \tag{5.40}$$

Démonstration : On évalue d'abord la dernière intégrale intervenant au second membre de (5.39), à savoir

$$\iint_{k^2}|s_1-s_2|^{\overline{\frac{-1-(i\lambda+\alpha_1+\alpha_2)}{2}}}[(\dot\chi^{-1}\nu)(s_1-s_2)]\ |s_2-s|^{\overline{\frac{-1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}}\times$$

$$[(\dot\chi_1\nu)(s_2-s)]\,|s-s_1|^{\overline{\frac{-1+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}}}[(\nu\dot\chi_2)(s-s_1)]\,|s_1|^{-1}\chi_1(s_1)\ ds_1\ ds_2.$$

Utilisant la formule (5.36), ainsi que la relation $\chi = \tilde\chi_1\tilde\chi_2\nu^2$, on obtient pour commencer

$$\int_k|s_1-s_2|^{\overline{\frac{-1-(i\lambda+\alpha_1+\alpha_2)}{2}}}\left[(\dot\chi^{-1}\nu)(s_1-s_2)\right]\ \times$$

$$|s_2-s|^{\overline{\frac{-1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}}\ [(\dot\chi_1\nu)(s_2-s)]\ ds_2$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1-i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\dot\chi^{-1}\nu)\ \Gamma(\frac{1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2},\dot\chi_1\nu)}{\Gamma(1-\alpha_2,\dot\chi_2^{-1})}\ |s_1-s|^{-\alpha_2}\,\dot\chi_2^{-1}(s_1-s)$$

et l'intégrale double qui précède s'écrit donc

$$\frac{\Gamma(\frac{1-i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\dot{\chi}^{-1}\nu)\ \Gamma(\frac{1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2},\dot{\chi}_1\nu)}{\Gamma(1-\alpha_2,\dot{\chi}_2^{-1})}\times$$

$$\int_k |s_1-s|^{\frac{-1+i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2}}\ \dot{\chi}_2^{-1}(s_1-s)\ (\nu\dot{\chi}_2)(s-s_1)\ \ |s_1|^{-1+\alpha_1}\ \dot{\chi}_1(s_1)\ ds_1$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1-i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\dot{\chi}^{-1}\nu)\ \Gamma(\frac{1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2},\dot{\chi}_1\nu)}{\Gamma(1-\alpha_2,\dot{\chi}_2^{-1})}\times$$

$$\dot{\chi}_2(-1)\frac{\Gamma(\frac{1+i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\nu)\ \Gamma(0,\chi_1)}{\Gamma(\frac{1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2},\dot{\chi}_1\nu)}\ \ |s|^{\frac{-1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}\ \ (\dot{\chi}_1\nu)(s)$$

$$=\dot{\chi}_2(-1)\ \Gamma(0,\chi_1)\ \frac{\Gamma(\frac{1-i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\dot{\chi}^{-1}\nu)\ \Gamma(\frac{1+i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\nu)}{\Gamma(1-\alpha_2,\dot{\chi}_2^{-1})}\times$$

$$|s|^{\frac{-1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}\ \ (\dot{\chi}_1\nu)(s).$$

On utilise l'égalité précédente ainsi que la formule (5.24) pour obtenir l'égalité suivante :

$$\iint_{k^2} |s_1-s_2|^{\frac{-1-(i\lambda+\alpha_1+\alpha_2)}{2}}\ \left[(\dot{\chi}^{-1}\nu)(s_1-s_2)\right]|s_2-s|^{\frac{-1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}\ \times$$

$$[(\dot{\chi}_1\nu)(s_2-s)]\,|s-s_1|^{\frac{-1+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}}\ [(\nu\dot{\chi}_2)(s-s_1)]\,|s_1|^{-1}\,\chi_1(s_1)\ ds_1\ ds_2$$

$$=\ \Gamma(0,\chi_1)\ \Gamma(0,\chi_2)\ \Gamma(\frac{1-i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\dot{\chi}^{-1}\nu)\ \Gamma(\frac{1+i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\nu)\times$$

$$|s|^{\frac{-1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}\ \ (\dot{\chi}_1\nu)(s).$$

Cette dernière égalité ainsi que le lemme 29 nous donnent

$$\sum_\nu a_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)\iint_{k^2}\vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\,|s_1|^{-1}\,\chi_1(s_1)ds_1ds_2$$

$$=\sum_\nu a_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)\ \Gamma(0,\chi_1)\ \Gamma(0,\chi_2)\ \Gamma(\frac{1-i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\dot{\chi}^{-1}\nu)\times$$

$$\Gamma(\frac{1+i\lambda-\alpha_1-\alpha_2}{2},\nu)\ \ |s|^{\frac{-1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}\ \ (\dot{\chi}_1\nu)(s)$$

$$=(1-|\varpi|)^{-1}\,|s|^{\frac{-1+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}\ \ \dot{\chi}_1(s)\sum_\nu c_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)\nu(s)$$

$$=(h_1\#h_2)^\flat_\chi(s),$$

qui est l'égalité recherchée (rappelons que les coefficients $c_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)$ ont été définis dans le lemme 29). ∎

Corollaire 31 *Soit* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *une matrice appartenant à* $GL(2,k)$*. Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 30, on a*

$$\left(|ax+b\xi|^{-1}\chi_1(ax+b\xi)\right) \ \# \ \left(|cx+d\xi|^{-1}\chi_2(cx+d\xi)\right) = \int\limits_{\widehat{k^\times}} g_\chi(x,\xi)\ d\chi$$

avec g_χ *défini par (5.27) et par*

$$\begin{aligned}(g_\chi^\flat)(s) &= \iint\limits_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\,|as_1+b|^{-1}\chi_1(as_1+b)\ \ |cs_2+d|^{-1}\chi_2(cs_2+d)\ ds_1ds_2\\ &= \sum_\nu a_\nu(\chi_1,\chi_2;\chi)\iint\limits_{k^2}\vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\times\\ &\qquad |as_1+b|^{-1}\chi_1(as_1+b)\ \ |cs_2+d|^{-1}\chi_2(cs_2+d)\ ds_1ds_2.\end{aligned}$$

Démonstration : La formule que nous allons démontrer est invariante par homothétie relativement au vecteur (a,b). On peut donc supposer que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $SL(2,k)$ i.e. $ad-bc=1$.

Le lemme (29) montre que

$$\begin{aligned}&(|.|^{-1}\chi_1)(ax+b\xi)\ \#\ (\,|.|^{-1}\chi_2)(cx+d\xi)\\ &\qquad= \int\limits_{\widehat{k^\times}} f_\chi(ax+b\xi,cx+d\xi)\ d\chi\\ &= \int\limits_{\widehat{k^\times}} (|.|^{-1}\chi)(cx+d\xi)\ f_\chi^\flat(\frac{ax+b\xi}{cx+d\xi})\ d\chi\end{aligned}$$

et le lemme 30 nous fournit, si $\xi\neq 0$

$$\begin{aligned}&f_\chi(ax+b\xi,cx+d\xi)\\ &= (|.|^{-1}\chi)(cx+d\xi)\ f_\chi^\flat(\frac{ax+b\xi}{cx+d\xi})\\ &= (|.|^{-1}\chi)(cx+d\xi)\ f_\chi^\flat(\frac{a\frac{x}{\xi}+b}{c\frac{x}{\xi}+d})\\ &= (|.|^{-1}\chi)(cx+d\xi)\iint\limits_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;\frac{a\frac{x}{\xi}+b}{c\frac{x}{\xi}+d})\,|s_1|^{-1}\chi_1(s_1)ds_1ds_2.\end{aligned}$$

Sous les changements de variable $s_j \mapsto \dfrac{as_j+b}{cs_j+d}$ (pour $j=1$ ou 2), l'expression précédente devient

$$(|.|^{-1}\chi)(cx+d\xi)\iint\limits_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}\Big(\frac{as_1+b}{cs_1+d},\frac{as_2+b}{cs_2+d};\frac{a\frac{x}{\xi}+b}{c\frac{x}{\xi}+d}\Big)\,(\,|as_1+b|\ \ |cs_1+d|)^{-1}\times$$
$$|cs_2+d|^{-2}\,\chi_1\Big(\frac{as_1+b}{cs_1+d}\Big)ds_1ds_2.$$

Le noyau $K_{\chi_1,\chi_2;\chi}$ satisfait aux règles de transformations (5.17), d'où les égalités suivantes, qui nous permettent de conclure :

$$\begin{aligned}
f_\chi(ax+b\xi,cx+d\xi) = {} & (|.|^{-1}\chi)(cx+d\xi)\iint\limits_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}\Big(s_1,s_2;\frac{x}{\xi}\Big)\,|as_1+b|^{-1}\times\\
& \chi_1(as_1+b)\,|cs_2+d|^{-1}\,\chi_2(cs_2+d)\left|c\frac{x}{\xi}+d\right|\chi^{-1}\Big(c\frac{x}{\xi}+d\Big)ds_1ds_2\\
= {} & |\xi|^{-1}\chi(\xi)\iint\limits_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}\Big(s_1,s_2;\frac{x}{\xi}\Big)\,|as_1+b|^{-1}\,\chi_1(as_1+b)\times\\
& |cs_2+d|^{-1}\,\chi_2(cs_2+d)ds_1ds_2\\
= {} & |\xi|^{-1}\chi(\xi)(g^\flat_\chi)\Big(\frac{x}{\xi}\Big).
\end{aligned}$$

■

5.4 La formule de composition en analyse pseudo-différentielle $\mathfrak{p}-$adique.

Théorème 32 *Etant donné trois caractères* $\chi_1 = (i\lambda_1, \dot{\chi}_1)$, $\chi_2 = (i\lambda_2, \dot{\chi}_2)$ *et* $\chi = (i\lambda, \dot{\chi})$, *et un caractère* $\nu \in \widehat{k^\times}$ *tel que*

$$\chi = \chi_1 \chi_2 \nu^2,$$

on pose

$$\begin{aligned}\vartheta^{\nu}_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1, s_2; s) = {} & |s_1 - s_2|^{\frac{-1-i(\lambda_1+\lambda_2+\lambda)}{2}} [(\dot{\chi}^{-1}\nu)(s_1 - s_2)] \times \\ & |s_2 - s|^{\frac{-1+i(\lambda_1-\lambda_2+\lambda)}{2}} [(\dot{\chi}_1\nu)(s_2 - s)] \times \\ & |s - s_1|^{\frac{-1+i(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda)}{2}} [(\dot{\chi}_2\nu)(s - s_1)]\end{aligned}$$

et

$$a_\nu(\chi_1, \chi_2; \chi) = (1 - |\varpi|)^{-1} \#(\mathbb{W})^{-1} \;\; |2|^{\frac{-1+i(\lambda-\lambda_1-\lambda_2)}{2}} \nu(2) \;\chi_1(-1) \times \frac{\Gamma(\frac{1-i(\lambda+\lambda_1-\lambda_2)}{2}, (\dot{\chi}_1\nu)^{-1})}{\Gamma(\frac{1+i(\lambda-\lambda_1+\lambda_2)}{2}, \dot{\chi}_2\nu) \; \Gamma(\frac{1-i(\lambda+\lambda_1+\lambda_2)}{2}, \dot{\chi}^{-1}\nu)}$$

où, rappelons le, $\mathbb{W}$ *est l'ensemble des caractères de* $k^\times$ *de carré un. On définit le noyau*

$$K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1, s_2; s) = \sum_{\nu} a_\nu(\chi_1, \chi_2; \chi) \vartheta^{\nu}_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1, s_2; s) : \tag{5.41}$$

par définition, ce noyau est nul si le caractère $\chi(\chi_1\chi_2)^{-1}$ *n'est pas un carré.*

Alors, quels que soient les symboles h_1 *et* h_2 *appartenant à* $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, *on a au sens faible dans le dual de* $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$ *la relation*

$$h_1 \# \, h_2 = \int_{\widehat{k^\times}} h_\chi \; d\chi$$

avec

$$h_\chi(x, \xi) = |\xi|^{-1} \, \chi(\xi) \; h^\flat_\chi(\frac{x}{\xi})$$

et

$$(h^\flat_\chi)(s) = \iint (\iint_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1, s_2; s) \;\, (h_1)^\flat_{\chi_1}(s_1) \;\, (h_2)^\flat_{\chi_2}(s_2) \; ds_1 ds_2) \; d\chi_1 d\chi_2. \tag{5.42}$$

La preuve nécessite pour commencer le lemme suivant, qui s'obtient exactement comme dans [U3], lemme 3.5, vu que sa preuve n'utilise pas autre chose que le fait que la fonction $|s|^{-\varepsilon}$ est intégrable en 0 (resp.l'infini) si $\varepsilon < 1$ (resp. $\varepsilon > 1$).

Lemme 33 *Soit*

$$I = \iiint_{k^3} |s_1 - s_2|^{\frac{-1-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}} |s_2 - s|^{\frac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}} |s - s_1|^{\frac{-1-\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}} \times$$

$$|u_1(s_1)\ u_2(s_2)\ u(s)|\, ds_1 ds_2\ ds.$$

Posons, pour $j = 1$ *ou* 2,

$$|||u_j|||_j = \sup((1+|s_j|)^{1-\varepsilon_j}\quad |u_j(s_j)|),$$

et supposons que $|\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2| < 1$, *alors il existe une contante* $C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

$$I \leq C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\ \ |||u_1|||_1\ \ |||u_2|||_2\ \ \|u\|_{L^2(k)}\,.$$

Preuve du théorème 32 **:** tout le reste de ce travail est consacré à cette preuve**.** En utilisant (5.38), on voit que l'assertion du théorème 32 est équivalente à prouver que, pour tout triplet (h_1, h_2, h_3) de fonctions appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, on a

$$< h_1\#\ h_2, h_3 >= (1-|\varpi|) \int_{\widehat{k^\times}} d\chi \int_k (h_3)^\flat_{\chi^{-1}}(s)\ ds \iint_{\widehat{k^\times}^2} (\iint_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1, s_2; s) \times$$

$$(h_1)^\flat_{\chi_1}(s_1)\ (h_2)^\flat_{\chi_2}(s_2)\ ds_1 ds_2)\ d\chi_1 d\chi_2. \tag{5.43}$$

On commence par étendre la définition (5.3) des composantes homogènes d'une fonction sur k^2 au cas où l'on remplace le caractère χ par un quasi-caractère.

Soit h une fonction appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$ et $\chi = (\alpha, \dot\chi)$ un quasi-caractère tel que $\mathrm{Re}(\alpha) < 1$. On pose

$$h_\chi(x, \xi) = \int_{k^\times} h(tx, t\xi)\chi^{-1}(t)\,|t|\ \ d^\times t \tag{5.44}$$

et

$$h^\flat_\chi(s) = h_\chi(s, 1).$$

L'intégrale qui définit cette fonction est bien convergente en raison de l'hypothèse faite sur α. Soient h_1, h_2, et h_3 trois fonctions appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, $\chi_1 = (\alpha_1, \dot\chi_1)$ et $\chi_2 = (\alpha_2, \dot\chi_2)$ deux quasi-caractères tels que $|Re(\alpha_1) \pm Re(\alpha_2)| < 1$, ce qui entraine que $|Re(\alpha_1)| < 1$ et $|Re(\alpha_2)| < 1$, et enfin $\chi = (i\lambda, \dot\chi)$ un caractère. Nous allons appliquer le lemme 33 aux fonctions $u_j(s_j) = (h_j)^\flat_{\chi_j}(s_j)$ pour $j = 1$ ou 2 et $u(s) = (h_3)^\flat_\chi(s)$, avec $\varepsilon_j = \mathrm{Re}\,\alpha_j$. On remarque que

$$|s_j|^{-1}\,\chi_j(s_j)(h_j)^\flat_{\chi_j}(s_j^{-1}) = \int_{k^\times} h_j(t, ts_j)\chi_j^{-1}(t)\,|t|\ \ d^\times t,$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
|||u_j|||_j &\leq C(\varepsilon_j)(\sup_{s_j}|u_j(s_j)| + \sup(|s_j|^{1-\varepsilon_j}\ \ |u_j(s_j)|)) \\
&\leq C(\varepsilon_j)(\sup_{s_j}\int_{k^\times}|h_j(ts_j, t)|\,|t|^{-\varepsilon_j}\ \ dt + \sup_{s_j}\int_{k^\times}|h_j(t, ts_j)|\,|t|^{-\varepsilon_j}\ \ dt) \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

puisque la fonction h_j est à support compact, et que $|\varepsilon_j| < 1$.

La fonction $u = (h_3)^\flat_{\chi^{-1}}$ est continue et équivalente à l'infini à $C\,|s|^{-1}\,\chi^{-1}(s)$ pour une certaine constante C, d'où

$$\forall s \in k, \left|(h_3)^\flat_{\chi^{-1}}(s)\right| \leq C\,|1,s|^{-1}. \tag{5.45}$$

Le lemme 33 prouve alors que l'intégrale

$$\iiint\limits_{k^3} \left|\vartheta^\nu_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)(h_1)^\flat_{\chi_1}(s_1)\ (h_2)^\flat_{\chi_2}(s_2)\ (h_3)^\flat_{\chi^{-1}}(s)\right|\ ds_1 ds_2\ ds$$

est convergente et est majorée par une constante ne dépendant que des parties réelles de χ_1 et χ_2. De plus, pour $\mathrm{Re}(\chi_j)$ fixé, $(h_j)^\flat_{\chi_j} = 0$ sauf sur une partie compacte de l'ensemble des quasi-caractères dont la partie réelle est égale à celle de χ_j. Rappelons que $\chi_j = (\alpha_j, \dot{\chi}_j)$ et que $\chi = (i\lambda, \dot{\chi})$ et posons

$$H(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \{(\chi_1,\chi_2),\ Re(\alpha_1) = \varepsilon_1,\ Re(\alpha_1) = \varepsilon_2\ \}.$$

Avec la constante c définie en (5.9), on définit sur cet ensemble la mesure

$$d\chi_1 d\chi_2\ =\ \sum_{\dot{\chi}_1,\dot{\chi}_2\ \in\ \widehat{\mathcal{O}_k^\times}} (c\frac{d\alpha_1}{i})(c\frac{d\alpha_2}{i}):$$

cette mesure est bien la mesure déjà notée $d\chi_1 d\chi_2$ lorsque $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, et bien sûr chacun des deux facteurs est bien défini également. Considérons alors l'intégrale

$$\begin{aligned}&(1-|\varpi|)\iint\limits_{H(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} d\chi_1 d\chi_2 \int\limits_{\widehat{k^\times}} d\chi(\iiint\limits_{k^3} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\ \times\\ &(h_1)^\flat_{\chi_1}(s_1)\ (h_2)^\flat_{\chi_2}(s_2)\ (h_3)^\flat_{\chi^{-1}}(s)\ ds_1\ ds_2\ ds),\end{aligned} \tag{5.46}$$

dans laquelle on suppose la condition $|\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2| < 1$ satisfaite. D'après ce qui précède, l'intégrale est absolument convergente ; en outre, d'après la définition (5.44), la fonction

$$(\alpha_1,\alpha_2) \mapsto K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)(h_1)^\flat_{\chi_1}(s_1)(h_2)^\flat_{\chi_2}(s_2)$$

est holomorphe dans le domaine $|Re(\alpha_1 \pm \alpha_2)| < 1$. Une déformation de contour, utilisant le fait que l'application $\alpha_j \mapsto (h_j)_{(\alpha_j,\dot{\chi}_j)}$ est holomorphe sur l'ensemble $|\mathrm{Re}(\alpha_j)| < 1$ et $\dfrac{2\pi i}{\ln q}$−périodique, permet alors de ramener l'intégrale au second membre de (5.43) à l'intégrale

$$\begin{aligned}&(1-|\varpi|)\iint\limits_{H(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} d\chi_1 d\chi_2 \int\limits_{\widehat{k^\times}} d\chi(\iiint\limits_{k^3} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\ \times\\ &(h_1)^\flat_{\chi_1}(s_1)\ (h_2)^\flat_{\chi_2}(s_2)\ (h_3)^\flat_{\chi^{-1}}(s)\ ds_1\ ds_2\ ds),\end{aligned}$$

dans laquelle on suppose désormais $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $|\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2| < 1$.

On termine comme dans la preuve du théorème 3.1 de [U3] en décomposant $(h_1)_{\chi_1}$ et $(h_2)_{\chi_2}$ en intégrales de symboles susceptibles de permettre l'application du corollaire 31 : en d'autres termes il s'agit de décomposer $(h_j)_{\chi_j}$ en une intégrale de symboles élémentaires dont chacun ne dépend que d'une combinaison linéaire de x et ξ. Cette décomposition conduit à deux intégrations supplémentaires et un peu de travail sera nécessaire pour justifier la convergence de la nouvelle intégrale multiple obtenue.

Rappelons que la transformée de Fourier symplectique $\mathcal{G}$ (qui est définie en (2.4)) est une involution sur $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$. Si h une fonction appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, on a donc

$$h(x,\xi) = |2| \int\limits_{k^2} (\mathcal{G}h)(y,\eta)\psi(2(x\eta - y\xi))\ dy\ d\eta, \tag{5.47}$$

soit, après changement de variable,

$$h(x,\xi) = |2| \int\limits_{k^2} (\mathcal{G}h)(\sigma\eta,\eta)\psi(2\eta(x-\sigma\xi))\ \ |\eta|\ \ d\eta\ d\sigma.$$

On pose alors, pour $h_j = h_1$ ou h_2,

$$h_j^\sigma(x) = |2| \ \ \int\limits_{k} (\mathcal{G}h_j)(\sigma\eta,\eta)\psi(2\eta x)\ \ |\eta|\ \ d\eta,$$

ce qui conduit à la décomposition

$$h_j(x,\xi) = \int\limits_{k} h_j^\sigma(x-\sigma\xi)\ d\sigma.$$

Remarquons pour un usage ultérieur que la fonction

$$\eta \mapsto (\mathcal{G}h_j)(\sigma\eta,\eta)\ \ |\eta|$$

est à support compact et lipschitzienne, d'une façon uniforme par rapport à σ pour $|\sigma| \leq 1$, d'où

$$\forall x,\ \forall\sigma \text{ tel que } |\sigma| \leq 1,\ \ \left|h_j^\sigma(x)\right| \leq C\ \ |1,x|^{-1}.$$

Pour $|\sigma| \geq 1$, on écrit

$$h_j^\sigma(x) = |2|\ \ |\sigma|^{-2} \int\limits_{k} (\mathcal{G}h_j)(\eta,\sigma^{-1}\eta)\psi(2\sigma^{-1}\eta x)\ \ |\eta|\ \ d\eta$$

et le même argument montre que

$$\left|h_j^\sigma(x)\right| \leq C\ \ |\sigma|^{-2}\ \ \left|1,\sigma^{-1}x\right|^{-1}$$

d'où

$$\left|h_j^\sigma(x)\right| \leq \left\{ \begin{array}{c} C\ \ |1,x|^{-1} \text{ si } |\sigma| \leq 1 \\ C\ \ |1,\sigma|^{-1}\ \ |\sigma,x|^{-1} \text{ si } |\sigma| > 1 \end{array} \right. . \tag{5.48}$$

Nous avons donc écrit la fonction h_j comme une superposition intégrale d'"ondes planes". Appliquons cette méthode à la composante homogène de degré χ_j (où χ_j est un quasi-caractère) d'une fonction h_j :

$$((h_j)_{\chi_j})^\sigma(x) = |2| \int\limits_k \mathcal{G}((h_j)_{\chi_j})(\sigma\eta,\eta)\psi(2\eta x)\,|\eta|\,d\eta.$$

Or,

$$\mathcal{G}((h_j)_{\chi_j}) = (\mathcal{G}h_j)_{\chi_j^{-1}},$$

donc l'égalité précédente devient, d'après (5.44),

$$\begin{aligned}
((h_j)_{\chi_j})^\sigma(x) &= |2| \int\limits_k (\mathcal{G}h_j)_{\chi_j^{-1}}(\sigma\eta,\eta)\psi(2\eta x)\,|\eta|\,d\eta \\
&= |2| \int\limits_k \psi(2\eta x)\ \ |\eta|\ \ d\eta \int\limits_k (\mathcal{G}h_j)(t\sigma\eta, t\eta)\chi_j(t)\ \ |t|\ \ d^\times t\ .
\end{aligned}$$

Si nous testons la fonction $((h_j)_{\chi_j})^\sigma$ sur une fonction appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k)$, on voit que l'on peut permuter l'ordre d'intégration du second membre de l'égalité précédente. D'où

$$\begin{aligned}
((h_j)_{\chi_j})^\sigma(x) &= |2| \int\limits_k \chi_j(t)\ \ |t|\ \ d^\times t \int\limits_k (\mathcal{G}h_j)(t\sigma\eta, t\eta)\psi(2\eta x)\,|\eta|\,d\eta \\
&= \int\limits_k \chi_j(t)\ \ |t|^{-1}\ \ h_j^\sigma(\frac{x}{t})\ d^\times t \\
&= |x|^{-1}\,\chi_j(x) \int\limits_k\ \ |t|\ \ \chi_j^{-1}(t)\ h_j^\sigma(t)\ d^\times t. \qquad (5.49)
\end{aligned}$$

Nous posons pour ce qui suit

$$b_j(\chi_j,\sigma) = \int\limits_k\ \ |t|\ \ \chi_j^{-1}(t)\ h_j^\sigma(t)\ d^\times t.$$

Comme $1 > \mathrm{Re}(\chi_j) > 0$, la majoration (5.48) montre que, pour tout σ,

$$|b_j(\chi_j,\sigma)| \leq C\,|1,\sigma|^{-1-\mathrm{Re}(\chi_j)}\,. \qquad (5.50)$$

On déduit de ce qui précède, l'identité suivante

$$\begin{aligned}
(h_j)^\flat_{\chi_j}(s) &= (h_j)_{\chi_j}(s,1) \\
&= \int\limits_k ((h_j)_{\chi_j})^\sigma(s-\sigma)\ d\sigma \\
&= \int\limits_k |s-\sigma|^{-1}\,\chi_j(s-\sigma)\ b_j(\chi_j,\sigma)\ d\sigma. \qquad (5.51)
\end{aligned}$$

Si l'on applique cette identité aux fonctions $(h_1)_{\chi_1}$ et $(h_2)_{\chi_2}$, l'expression (5.46) qui, rappelons-le, représente le second membre de (5.42) testé sur la fonction h_3, devient

$$(1-|\varpi|) \iint\limits_{H(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} d\chi_1 d\chi_2 \int\limits_{\widehat{k^\times}} d\chi \int\limits_k \int\limits_k b_1(\chi_1,\sigma_1)\ b_2(\chi_2,\sigma_2)\ d\sigma_1\ d\sigma_2 \iiint\limits_{k^3} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\,\times$$
$$|s_1-\sigma_1|^{-1}\,\chi_1(s_1-\sigma_1)\ \ |s_2-\sigma_2|^{-1}\,\chi_2(s_2-\sigma_2)\ (h_3)^\flat_{\chi^{-1}}(s)\ ds_1\ ds_2\ ds, \qquad (5.52)$$

sous réserve de l'absolue convergence de la nouvelle intégrale multiple obtenue, qui comprend une intégrale supplémentaire par rapport à la mesure $d\sigma_1\ d\sigma_2$.

Posons (rappelant que (5.41) définit le noyau K comme combinaison linéaire des fonctions $\vartheta^{\nu}_{\chi_1,\chi_2;\chi}$)

$$I(\sigma_1,\sigma_2)=\iiint\limits_{k^3}\left|\vartheta^{\nu}_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\,|s_1-\sigma_1|^{-1}\,\chi_1(s_1-\sigma_1)\right|\times$$
$$\left|\ |s_2-\sigma_2|^{-1}\,\chi_2(s_2-\sigma_2)\ (h_3)^{\flat}_{\chi^{-1}}(s)\right|\ ds_1\ ds_2\ ds.$$

Si $\sigma_1\neq\sigma_2$, on effectue dans l'intégrale définissant $I(\sigma_1,\sigma_2)$ les changement de variables

$$s_j\mapsto\frac{-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2}s_j+\sigma_1}{-\dfrac{s_j}{\sigma_1-\sigma_2}+1}\quad\text{et}\quad s\mapsto\frac{-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2}s+\sigma_1}{-\dfrac{s}{\sigma_1-\sigma_2}+1}.$$

On remarque, d'une part, que la matrice $\begin{pmatrix}-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2} & \sigma_1\\ -\dfrac{1}{\sigma_1-\sigma_2} & 1\end{pmatrix}$ appartient à $SL(2,k)$, ce qui permet d'utiliser la règle de transformation (5.17) valable on le sait pour les fonctions

$$\left|\vartheta^{\nu}_{\chi_1,\chi_2;\chi}\right|=\vartheta^{1}_{|.|^{\varepsilon_1},|.|^{\varepsilon_2};1}$$

aussi bien que pour le noyau K correspondant, et, d'autre part, que $s_1-\sigma_1$(resp. $s_2-\sigma_2$) est transformé par ce changement de variable en $\dfrac{s_1}{-\dfrac{s_1}{\sigma_1-\sigma_2}+1}$ (resp.$\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{-\dfrac{s_2}{\sigma_1-\sigma_2}+1}$). On peut donc écrire, après simplification, $I(\sigma_1,\sigma_2)$ sous la forme

$$|\sigma_1-\sigma_2\ |^{-1+\varepsilon_2}\iiint\limits_{k^3}\ |s_1-s_2|^{\dfrac{-1-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}}\ |s_2-s|^{\dfrac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}}\ |s-s_1|^{\dfrac{-1-\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}}\ \times$$
$$|s_1|^{-1+\varepsilon_1}\ \left|-\frac{s}{\sigma_1-\sigma_2}+1\right|^{-1}\left|(h_3)^{\flat}_{\chi^{-1}}\Big(\frac{-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2}s+\sigma_1}{-\dfrac{s}{\sigma_1-\sigma_2}+1}\Big)\right|\ ds_1\ ds_2\ ds.$$

Dans la démonstration du lemme 30, il est prouvé, en particulier, que

$$\iint\limits_{k^2}\ |s_1-s_2|^{\dfrac{-1-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}}\ |s-s_1|^{\dfrac{-1-\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}}\ |s_2-s|^{\dfrac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}}\ |s_1|^{-1+\varepsilon_1}\,ds_1\ ds_2$$
$$=C(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\ |s|^{\dfrac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}}$$

si $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$ et $|\varepsilon_1\pm\varepsilon_2|<1$. Ainsi, on a

$$I(\sigma_1,\sigma_2)=C(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\,|\sigma_1-\sigma_2\ |^{-1+\varepsilon_2}\int\limits_k|s|^{\dfrac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}}\ \left|-\frac{s}{\sigma_1-\sigma_2}+1\right|^{-1}\times$$
$$\left|(h_3)^{\flat}_{\chi^{-1}}\Big(\frac{-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2}s+\sigma_1}{-\dfrac{s}{\sigma_1-\sigma_2}+1}\Big)\right|\ ds.$$

Pour tout $(x,\xi) \in k^2$, on pose $|x,\xi| = \max(|x|\,,|\xi|)$. La majoration (5.45) montre que
$$I(\sigma_1,\sigma_2) \le C(\varepsilon_1,\varepsilon_2) J(\sigma_1,\sigma_2)$$

avec, par définition,
$$J(\sigma_1,\sigma_2) = |\sigma_1-\sigma_2\,|^{-1+\varepsilon_2} \int_k |s|^{\dfrac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}} \left| -\frac{\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2}s+\sigma_1\ ,\ -\frac{s}{\sigma_1-\sigma_2}+1 \right|^{-1} ds,$$
soit, après le changement de variable $s \mapsto (\sigma_1-\sigma_2)s$,
$$\begin{aligned} J(\sigma_1,\sigma_2) &= |\sigma_1-\sigma_2\,|^{\dfrac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}} \int_k |s|^{\dfrac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}} |\sigma_2 s+\sigma_1\ ,\ s+1|^{-1}\, ds \\ &= |\sigma_1-\sigma_2\,|^{\dfrac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}} \Big(\int_{|s|\le 1} |s|^{\dfrac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}} |\sigma_2 s+\sigma_1\ ,\ s+1|^{-1}\, ds + \\ &\int_{|s|<1} |s|^{\dfrac{-1-\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}} |\sigma_1 s+\sigma_2\ ,\ s+1|^{-1}\, ds\Big). \end{aligned} \tag{5.53}$$
La fonction
$$\begin{aligned} s \mapsto\ & |\sigma_2 s+\sigma_1\ ,\ s+1|^{-1} \\ &= |s+1|^{-1} \left| 1\ ,\ \frac{\sigma_2 s+\sigma_1}{s+1} \right|^{-1} \end{aligned}$$
est de carré intégrable sur k et sa norme L^2 sur k est égale, à un facteur multiplicatif constant près, à $|\sigma_1-\sigma_2\,|^{-\dfrac{1}{2}}$ (effectuant le changement de variable homographique $s \mapsto \dfrac{\sigma_2 s+\sigma_1}{s+1}$). D'autre part , on a l'estimation suivante
$$\begin{aligned} \sup_{s\in k} |\sigma_2 s+\sigma_1\ ,\ s+1|^{-1} &= \sup_{s\in k} |\sigma_2 s+\sigma_1-\sigma_2\ ,\ s|^{-1} \\ &\le |1\ ,\sigma_2|\ \ |\sigma_1-\sigma_2\,|^{-1}, \end{aligned}$$
que l'on obtient en appliquant l'inégalité ultramétrique dans les cas $|\sigma_2 s| \begin{cases} < |\sigma_1-\sigma_2| \\ = |\sigma_1-\sigma_2| \\ > |\sigma_1-\sigma_2|\,. \end{cases}$ Ces estimations sur la norme L^2 et la norme L^∞ de la fonction
$$s \mapsto\ |\sigma_2 s+\sigma_1\ ,\ s+1|^{-1}$$
nous fournissent, par interpolation, la majoration suivante (qui est valable pour tout nombre réel $p>2$)
$$\begin{aligned} \|\ |\sigma_2 s+\sigma_1\ ,\ s+1|^{-1}\|_{L^p(B(0,1))} &\le C\,|\sigma_1-\sigma_2\,|^{\dfrac{2-p}{p}}\ |1\ ,\ \sigma_2|^{\dfrac{p-2}{p}}\ |\sigma_1-\sigma_2\,|^{-\dfrac{1}{p}} \\ &\le C\,|\sigma_1-\sigma_2\,|^{\dfrac{1-p}{p}}\ |1\ ,\ \sigma_2|^{\dfrac{p-2}{p}} \end{aligned}$$

Soit q le nombre réel défini par $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. La fonction

$$s \mapsto |s|^{\dfrac{-1-|\varepsilon_1-\varepsilon_2|}{2}}$$

appartient à $L^q(B(0,1))$ ssi

$$\frac{-1-|\varepsilon_1-\varepsilon_2|}{2} > -\frac{1}{q},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1-|\varepsilon_1-\varepsilon_2|}{2} > \frac{1}{p}.$$

Sous cette dernière condition, nous obtenons, d'après l'inégalité de Hölder, l'estimation suivante

$$\int_{|s|\le 1} |s|^{\dfrac{-1+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}} \quad |\sigma_2 s+\sigma_1\ ,\ s+1|^{-1}\, ds$$

$$\le C(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\, |\sigma_1-\sigma_2\ |^{\dfrac{1-p}{p}} \ |1\ ,\ \sigma_2|^{\dfrac{p-2}{p}}.$$

Cette dernière estimation est également valable pour le deuxième terme du second membre de la formule (5.53) définissant $J(\sigma_1,\sigma_2)$, à condition d'échanger σ_1 et σ_2, ainsi que ε_1 et ε_2, donc, pourvu que $\dfrac{1-|\varepsilon_1-\varepsilon_2|}{2} > \dfrac{1}{p}$,

$$J(\sigma_1,\sigma_2) \le C(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\ \ |\sigma_1-\sigma_2\ |^{\dfrac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\dfrac{1-p}{p}} \ (|\ 1\ ,\ \sigma_1|^{1-\dfrac{2}{p}} + |1\ ,\ \sigma_2|^{1-\dfrac{2}{p}}) \tag{5.54}$$

et, par conséquent,

$$I(\sigma_1,\sigma_2) \le C(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\, |\sigma_1-\sigma_2\ |^{\dfrac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\dfrac{1-p}{p}} \ (|\ 1\ ,\ \sigma_1|^{1-\dfrac{2}{p}} + |1\ ,\ \sigma_2|^{1-\dfrac{2}{p}}).$$

Pour assurer la convergence de l'intégrale (5.52), il suffit donc, utilisant également (5.50), que, toujours avec

$$\varepsilon_1>0, \varepsilon_2>0, |\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2| < 1,$$

il existe $p>2$ tel que, avec la nouvelle condition $\dfrac{1-|\varepsilon_1-\varepsilon_2|}{2} > \dfrac{1}{p}$, la fonction

$$|1,\sigma_1\ |^{-1}\, |1,\sigma_2\ |^{-1}\, |\sigma_1-\sigma_2\ |^{\dfrac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\dfrac{1-p}{p}} \ (|\ 1,\ \sigma_1|^{1-\dfrac{2}{p}} + |\ 1,\ \sigma_2|^{1-\dfrac{2}{p}})$$

soit intégrable sur k^2. Le lemme suivant montre que cela est effectivement le cas, puisqu'il suffit de choisir $p>2$ vérifiant la double inégalité

$$\frac{1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{2} < \frac{1}{p} < \frac{1-|\varepsilon_1-\varepsilon_2|}{2}. \tag{5.55}$$

Lemme 34 *Soient ε_1, ε_2, p trois nombres réels tels que*

$$0 < \varepsilon_1 < 1, 0 < \varepsilon_2 < 1, \ \ |\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2| < 1$$

et

$$\frac{1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{2} < \frac{1}{p} < \frac{1-|\varepsilon_1-\varepsilon_2|}{2}.$$

Alors la fonction

$$|1, \sigma_1\ |^{-1}\,|1, \sigma_2\ |^{-1}\,|\sigma_1 - \sigma_2\ |^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{1-p}{p}}\,(|\ 1,\ \sigma_1|^{1-\frac{2}{p}} + |\ 1,\ \sigma_2|^{1-\frac{2}{p}})$$

est intégrable sur k^2.

Démonstration : Il suffit pour cela que la fonction

$$|1, \sigma_2\ |^{-1}\,|\sigma_1 - \sigma_2\ |^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{1-p}{p}}\ |\ 1,\ \sigma_1|^{-\frac{2}{p}}$$

soit intégrable sur k^2, puisque le noyau intégral étudié est symétrique en σ_1, σ_2. Posons

$$I_1(\sigma_2) = \int\limits_{|\ \sigma_1|<|\ \sigma_2|} |\sigma_1 - \sigma_2\ |^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{1-p}{p}}\ |\ 1,\ \sigma_1|^{-\frac{2}{p}}\,d\sigma_1,$$

$$I_2(\sigma_2) = \int\limits_{|\ \sigma_1|=|\ \sigma_2|} |\sigma_1 - \sigma_2\ |^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{1-p}{p}}\ |\ 1,\ \sigma_1|^{-\frac{2}{p}}\,d\sigma_1,$$

$$I_3(\sigma_2) = \int\limits_{|\ \sigma_1|>|\ \sigma_2|} |\sigma_1 - \sigma_2\ |^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{1-p}{p}}\ |\ 1,\ \sigma_1|^{-\frac{2}{p}}\,d\sigma_1.$$

Nous allons estimer chacune des intégrales précédentes :

$$\begin{aligned}
I_1(\sigma_2) &\leq |\sigma_2\ |^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{1-p}{p}} \int\limits_{|\ \sigma_1|<|\ \sigma_2|} |\ 1,\ \sigma_1|^{-\frac{2}{p}}\,d\sigma_1 \\
&\leq C\,|\sigma_2\ |^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{1-p}{p}}\ |\ 1,\ \sigma_2|^{1-\frac{2}{p}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2(\sigma_2) &\leq |\ 1,\ \sigma_2|^{-\frac{2}{p}} \int\limits_{|\ \sigma_1|=|\ \sigma_2|} |\sigma_1 - \sigma_2\ |^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{1-p}{p}}\,d\sigma_1 \\
\leq |\ 1,\ \sigma_2|^{-\frac{2}{p}}\ |\ \sigma_2|^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{1}{p}} &\int\limits_{|\ \sigma_1|=1} |\sigma_1 - 1\ |^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{1-p}{p}}\,d\sigma_1 \\
&\leq C\,|\ 1,\ \sigma_2|^{-\frac{2}{p}}\ |\ \sigma_2|^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

$$I_3(\sigma_2) \leq \int\limits_{|\sigma_1|>|\sigma_2|} |\sigma_1|^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{1-p}{p}} |1,\ \sigma_1|^{-\frac{2}{p}} d\sigma_1$$

$$\leq \int\limits_{|\sigma_1|>|\sigma_2|} |\sigma_1|^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}-\frac{1}{p}-1} d\sigma_1$$

$$\leq |\sigma_2|^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}-\frac{1}{p}} \int\limits_{|\sigma_1|>1} |\sigma_1|^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}-\frac{1}{p}-1} d\sigma_1$$

$$\leq C\,|\sigma_2|^{\frac{-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}-\frac{1}{p}}.$$

Ces estimations montrent que les trois fonctions $|1,\sigma_2|^{-1} I_j(\sigma_2)$ sont intégrables sur k^2, ce qui nous permet de conclure. ∎

Nous allons à présent traiter l'intégrale (5.52), dont nous venons d'établir la convergence à l'aide du corollaire 31.

Supposons $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Conformément au corollaire 31, posons

$$(\ |x-\sigma_1\xi|^{-1}\,\chi_1(x-\sigma_1\xi))\ \#\ (\,|x-\sigma_2\xi|^{-1}\,\chi_2(x-\sigma_2\xi)\ ) = \int\limits_{\widehat{k^\times}} (g^{\sigma_1,\sigma_2}_{\chi_1,\chi_2})_\chi(x,\xi)\ d\chi$$

avec

$$(g^{\sigma_1,\sigma_2}_{\chi_1,\chi_2})^\flat_\chi(s) = \iint\limits_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\ \ |s_1-\sigma_1|^{-1}\,\chi_1(s_1-\sigma_1)\ \ |s_2-\sigma_2|^{-1}\,\chi_2(s_2-\sigma_2)\ ds_1\ ds_2.$$

D'après (5.38), on a

$$< (g^{\sigma_1,\sigma_2}_{\chi_1,\chi_2})_\chi, h_3 >= (1-|\varpi|) \int\limits_k (h_3)^\flat_{\chi^{-1}}(s)\ ds \iint\limits_{k^2} K_{\chi_1,\chi_2;\chi}(s_1,s_2;s)\times$$

$$|s_1-\sigma_1|^{-1}\,\chi_1(s_1-\sigma_1)\ \ |s_2-\sigma_2|^{-1}\,\chi_2(s_2-\sigma_2)\ ds_1\ ds_2 \tag{5.56}$$

et on voit que l'expression au second membre de (5.43), qui, comme on l'a vu, s'identifie à (5.52), s'écrit aussi

$$\int\limits_{\mathrm{Re}(\chi_1)=\varepsilon_1} d\chi_1 \int\limits_{\mathrm{Re}(\chi_2)=\varepsilon_2} d\chi_2 \iint\limits_{k^2} b_1(\chi_1,\sigma_1)\ b_2(\chi_2,\sigma_2)$$
$$< (|x-\sigma_1\xi|^{-1}\,\chi_1(x-\sigma_1\xi))\ \#\ (\,|x-\sigma_2\xi|^{-1}\,\chi_2(x-\sigma_2\xi))\ ,\ h_3 > d\sigma_1\ d\sigma_2. \tag{5.57}$$

Rappelons que ceci a été établi sous les hypothèses suivantes relatives à ε_1 et ε_2

$$\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, |\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2| < 1.$$

Par ailleurs, (5.7), (5.44) et une déformation de contour complexe fournissent, pour $0< \varepsilon_j < 1$,

$$
\begin{aligned}
h_j(x,\xi) &= \int\limits_{\mathrm{Re}(\chi_j)=\varepsilon_j} (h_j)_{\chi_j}\ (x,\xi)\ d\chi_j \\
&= \int\limits_{\mathrm{Re}(\chi_j)=\varepsilon_j} d\chi_j \int\limits_k (h_j)^{\sigma_j}_{\chi_j}(x-\sigma_j\xi)\ d\sigma_j \\
&= \int\limits_{\mathrm{Re}(\chi_j)=\varepsilon_j} d\chi_j \int\limits_k\ b_j(\chi_j,\sigma_j)\ \ |x-\sigma_j\xi|^{-1}\, \chi_j(x-\sigma_j\xi)\ d\sigma_j,
\end{aligned}
$$

où l'on a utilisé (5.51). D'où

$$
\begin{aligned}
< h_1 \# h_2, h_3 >=< (\int\limits_{\mathrm{Re}(\chi_1)=\varepsilon_1} d\chi_1 \int\limits_k\ b_1(\chi_1,\sigma_1)\ \ |x-\sigma_1\xi|^{-1}\, \chi_1(x-\sigma_1\xi)\ d\sigma_1)\# \\
(\int\limits_{\mathrm{Re}(\chi_2)=\varepsilon_2} d\chi_2 \int\limits_k\ b_2(\chi_2,\sigma_2)\ \ |x-\sigma_2\xi|^{-1}\, \chi_2(x-\sigma_2\xi)\ d\sigma_2)\ ,\ \ h_3 > .
\end{aligned}
$$

Cette expression est identique à (5.57) pourvu que l'on puisse enfin commuter les intégrations et l'opération de composition # dans la dernière expression. On voit donc qu'il s'agit d'écrire, au sens faible en testant contre une fonction appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$, l'identité

$$
\begin{aligned}
&(\int\limits_{\mathrm{Re}(\chi_1)=\varepsilon_1} d\chi_1 \int\limits_k\ b_1(\chi_1,\sigma_1)\ \ |x-\sigma_1\xi|^{-1}\, \chi_1(x-\sigma_1\xi) d\sigma_1)\# \\
&(\int\limits_{\mathrm{Re}(\chi_2)=\varepsilon_2} d\chi_2 \int\limits_k\ b_2(\chi_2,\sigma_2)\ \ |x-\sigma_2\xi|^{-1}\, \chi_2(x-\sigma_2\xi)\ d\sigma_2) \\
&= \int\limits_{\mathrm{Re}(\chi_1)=\varepsilon_1} d\chi_1 \int\limits_{\mathrm{Re}(\chi_2)=\varepsilon_2} d\chi_2 \int\limits_k \int\limits_k b_1(\chi_1,\sigma_1)\ b_2(\chi_2,\sigma_2)\times \\
&(\,|x-\sigma_1\xi|^{-1}\, \chi_1(x-\sigma_1\xi))\#\ (\,|x-\sigma_2\xi|^{-1}\, \chi_2(x-\sigma_2\xi))\ d\sigma_1\ d\sigma_2
\end{aligned}
\tag{5.58}
$$

ou l'identité analogue dans laquelle les quasi-caractères χ_1 et χ_2 sont fixés : l'intégration en $d\chi_1$ et $d\chi_2$ ne pose pas de problème.

Nous allons montrer pour commencer que chacun des deux membres de l'équation

$$
\begin{aligned}
&(\int\limits_k\ b_1(\chi_1,\sigma_1)\ \ |x-\sigma_1\xi|^{-1}\, \chi_1(x-\sigma_1\xi) d\sigma_1)\ \#\ \int\limits_k\ b_2(\chi_2,\sigma_2)\ \ |x-\sigma_2\xi|^{-1}\, \chi_2(x-\sigma_2\xi)\ d\sigma_2) \\
&= \int\limits_k \int\limits_k b_1(\chi_1,\sigma_1)\ b_2(\chi_2,\sigma_2)\ (\,|x-\sigma_1\xi|^{-1}\, \chi_1(x-\sigma_1\xi))\ \# \\
&(\,|x-\sigma_2\xi|^{-1}\, \chi_2(x-\sigma_2\xi))\ d\sigma_1\ d\sigma_2
\end{aligned}
\tag{5.59}
$$

(testé contre une fonction $h_3 \in \mathcal{S}_{alg}(k^2)$) est une fonction analytique de (χ_1, χ_2) dans le domaine

$$|Re(\alpha_1) - Re(\alpha_2)| < 1,\ Re(\alpha_1) > 0,\ Re(\alpha_2) > 0$$

$$\text{et } |Re(\alpha_1) - Re(\alpha_2)| + Re(\alpha_1) + Re(\alpha_2) < 2.$$

Nous montrerons ensuite l'identité des deux membres sous les hypothèses supplémentaires

$$\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(\chi_1) \text{ et } \frac{1}{2} < \mathrm{Re}(\chi_2).$$

Pour le membre de gauche de l'égalité (5.59), lequel s'écrit aussi $(h_1)_{\chi_1}\#\ (h_2)_{\chi_2}$, cela résulte de ce que chacune des deux fonctions $(h_j)_{\chi_j}$ s'écrit

$$(h_j)_{\chi_j}\phi + (h_j)_{\chi_j}(1-\phi),$$

décomposition dans laquelle le premier terme est sommable et le second est un symbole de poids 1, comme il en résulte de (5.44) et de $0 < \mathrm{Re}(\chi_j) < 1$: Par suite, l'expression $< (h_1)_{\chi_1}\#(h_2)_{\chi_2}, h_3 >$ dépend analytiquement de (χ_1, χ_2), pour tout $h_3 \in \mathcal{S}_{alg}(k^2)$.

Pour le second membre, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 35 *Soient $(\chi_j)_{j\in\{1,2\}} = ((\alpha_j, \dot{\chi}_j))_{j\in\{1,2\}}$ deux quasi-caractères tels que*

$$|Re(\alpha_1) - Re(\alpha_2)| < 1,\ Re(\alpha_1) > 0,\ Re(\alpha_2) > 0$$

$$\textit{et } |Re(\alpha_1) - Re(\alpha_2)| + Re(\alpha_1) + Re(\alpha_2) < 2$$

et soit h_3 une fonction appartenant à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$. Alors, pour tout couple (σ_1, σ_2) d'éléments de k^2 tel que $\sigma_1 \neq \sigma_2$, on a

$$\begin{aligned} &\left|<(|x-\sigma_1\xi|^{-1}\chi_1(x-\sigma_1\xi))\ \#\ (|x-\sigma_2\xi|^{-1}\chi_2(x-\sigma_2\xi)), h_3>\right| \\ &\qquad \leq C(\alpha_1,\alpha_2)\ |1,\sigma_1|^{\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}\,|\sigma_1-\sigma_2|^{-1+\mathrm{Re}\,\alpha_2}. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Démonstration : Nous allons donner une version modifiée du lemme 29. Soit δ est un nombre réel appartenant à $]0,1[$. La déformation de contour $\chi \mapsto |.|^{\delta}\chi$ dans la formule (5.26) montre que l'on a :

$$(|x|^{-1}\chi_1(x))\#(\,|\xi|^{-1}\chi_2(\xi)) = \int_{\widehat{k^\times}} h_\chi(x,\xi)\ d\chi \tag{5.61}$$

avec

$$\begin{aligned} h_\chi(x,\xi) = (1-|\varpi|)^{-1}\,|x|^{\dfrac{-1+\delta+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}}\ |\xi|^{\dfrac{-1+\delta+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}} \\ \times\sum_\nu c_\nu(\chi_1,\chi_2;|.|^{\delta}\chi)(\dot{\chi}_1\nu)(x)(\dot{\chi}_2\nu)(\xi). \end{aligned}$$

Les formules (5.25), (5.27) et (5.28) montrent que cette décomposition est valable si l'on suppose, outre les inégalités

$$0 < \mathrm{Re}(\chi_1) < 1,\ 0 < \mathrm{Re}(\chi_2) < 1,$$

que

$$Re(\chi_1) + Re(\chi_2) < 1 + \delta,\ |Re(\chi_1) - Re(\chi_2)| < 1 - \delta\ :$$

elle permet donc d'étendre le domaine de validité du lemme 29. Ensuite, nous appliquons au premier membre de (5.61) la formule de covariance (2.22) où g est la matrice $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma_1-\sigma_2} & -\dfrac{\sigma_1}{\sigma_1-\sigma_2} \\ 1 & -\sigma_2 \end{pmatrix} \in SL(2,k)$, ce qui nous donne

$$
\begin{aligned}
&< (\,|x-\sigma_1\xi|^{-1}\,\chi_1(x-\sigma_1\xi))\ \#\ (\,|x-\sigma_2\xi|^{-1}\,\chi_2(x-\sigma_2\xi)), h_3 > \\
&= (1-|\varpi|)^{-1}\ |\sigma_1-\sigma_2|^{\dfrac{-1-\delta-i\lambda+\alpha_1+\alpha_2}{2}} \int\limits_{\widehat{k^\times}} d\chi \iint\limits_{k^2} |x-\sigma_1\xi|^{\dfrac{-1+\delta+i\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{2}} \\
&\quad \times |x-\sigma_2\xi|^{\dfrac{-1+\delta+i\lambda-\alpha_1+\alpha_2}{2}} \sum_\nu \nu(\sigma_1-\sigma_2)^{-1}(c_\nu(\chi_1,\chi_2;|.|^\delta\,\chi) \\
&\quad \times(\dot\chi_1\nu)(x-\sigma_1\xi)(\dot\chi_2\nu)(x-\sigma_2\xi)\ h_3(x,\xi)\ dx\ d\xi.
\end{aligned}
$$

Posons (puisque $\dot\chi_1,\dot\chi_2$ et ν sont des caractères unitaires)

$$
\begin{aligned}
R(\sigma_1,\sigma_2) = &\iint\limits_{k^2} |x-\sigma_1\xi|^{\dfrac{-1+\delta+\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \\
&\times |x-\sigma_2\xi|^{\dfrac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} |h_3(x,\xi)|\ dx\ d\xi.
\end{aligned}
$$

La fonction h_3 appartient à $\mathcal{S}_{alg}(k^2)$ donc, pour tout entier N, elle est dominée par la fonction $|1,x,\xi|^{-2N}$, d'où

$$
\begin{aligned}
R(\sigma_1,\sigma_2) \le C_N \int\limits_k \int\limits_k |x-\sigma_1\xi|^{\dfrac{-1+\delta+\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} |x-\sigma_2\xi|^{\dfrac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \times \\
|1,x,\xi|^{-2N}\, dx\ d\xi
\end{aligned}
$$

où C_N est une certaine constante.

En vue de la majoration de $R(\sigma_1,\sigma_2)$, nous allons distinguer deux cas :

premier cas : $|\sigma_1|\le 1$. On effectue le changement de variable $x\mapsto x+\sigma_1\xi$ et, en remarquant que

$$|1,x+\sigma_1\xi,\xi| = |1,x,\xi|\,,$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
R(\sigma_1,\sigma_2) \le C_N \int\limits_k \int\limits_k |x|^{\dfrac{-1+\delta+\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} |x-(\sigma_2-\sigma_1)\xi|^{\dfrac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \\
\times |1,x,\xi|^{-2N}\, dx\ d\xi
\end{aligned}
$$

$$\leq C_N \int_k dx \ |x|^{\frac{-1+\delta+\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \ |1,x|^{-N}$$
$$\times \int_k |x-(\sigma_2-\sigma_1)\xi|^{\frac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \ |1,\xi|^{-N} \ d\xi$$

$$\leq C_N \ |\sigma_2-\sigma_1|^{\frac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \int_k dx \ |x|^{\frac{-1+\delta+\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \ |1,x|^{-N}$$
$$\times \int_k \left|\frac{x}{\sigma_2-\sigma_1}-\xi\right|^{\frac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \ |1,\xi|^{-N} \ d\xi.$$

La dernière intégrale de cette inégalité est bornée indépendamment de $\dfrac{x}{\sigma_2-\sigma_1}$, ce qui nous fournit les majorations suivantes

$$R(\sigma_1,\sigma_2) \leq C_N \ |\sigma_2-\sigma_1|^{\frac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \int_k dx \ |x|^{\frac{-1+\delta+\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \ |1,x|^{-N}$$
$$\times \sup_{x\in k} \int_k |x-\xi|^{\frac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \ |1,\xi|^{-N} \ d\xi$$

$$\leq C_N \ |\sigma_2-\sigma_1|^{\frac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \int_k dx \ |x|^{\frac{-1+\delta+\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \ |1,x|^{-N}$$
$$\leq C_N \ |\sigma_2-\sigma_1|^{\frac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}}.$$

deuxième cas : $|\sigma_1| > 1$.

$$R(\sigma_1,\sigma_2) \leq C_N \int_k \int_k |x-\sigma_1\xi|^{\frac{-1+\delta+\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \ |x-\sigma_2\xi|^{\frac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}}$$
$$\times |1,x,\xi|^{-2N} \, dx \ d\xi$$

$$\leq C_N \ |\sigma_1|^{\frac{-1+\delta+\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \int_k \int_k |\sigma_1^{-1}x-\xi|^{\frac{-1+\delta+\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}}$$
$$\times |x-\sigma_2\xi|^{\frac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \ |1,x,\xi|^{-2N} \, dx \ d\xi.$$

On effectue le changement de variable $\xi \mapsto \xi + \sigma_1^{-1}x$, en remarquant de nouveau que

$$\left|1, x, \xi + \sigma_1^{-1}x\right| = |1, x, \xi|,$$

ce qui nous donne

$$R(\sigma_1,\sigma_2) \leq C_N \ |\sigma_1|^{\frac{-1+\delta+\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \int_k \int_k |\xi|^{\frac{-1+\delta+\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}}$$
$$\times \left|x - \sigma_2(\xi + \sigma_1^{-1}x)\right|^{\frac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} |1, x, \xi|^{-2N} \, dx \, d\xi$$

$$\leq C_N \ |\sigma_1|^{\frac{-1+\delta+\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \int_k \int_k |\xi|^{\frac{-1+\delta+\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} |1,\xi|^{-N} \, d\xi$$
$$\times \left|\sigma_1^{-1}(\sigma_1-\sigma_2)x - \sigma_2\xi\right|^{\frac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} |1, x|^{-N} \, dx$$

$$\leq C_N \ |\sigma_1|^{\frac{-1+\delta+\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} \left|\sigma_1^{-1}(\sigma_1-\sigma_2)\right|^{\frac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}}$$
$$\times \int_k |\xi|^{\frac{-1+\delta+\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} |1,\xi|^{-N}$$
$$\times \int_k \left|x - \frac{\sigma_1\sigma_2\xi}{(\sigma_1-\sigma_2)}\right|^{\frac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}} |1, x|^{-N} \, dx \, d\xi.$$

A l'aide de l'argument utilisé à la fin du premier cas, nous obtenons la majoration suivante

$$R(\sigma_1,\sigma_2) \leq C_N \ |\sigma_1|^{\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)} \, |\sigma_1-\sigma_2|^{\frac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}}.$$

D'où, finalement

$$R(\sigma_1,\sigma_2) \leq C_N \ |1, \sigma_1|^{\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)} \, |\sigma_1-\sigma_2|^{\frac{-1+\delta-\mathrm{Re}(\alpha_1-\alpha_2)}{2}},$$

ce qui termine la preuve du lemme 35. ∎

Comme la fonction

$$|1, \sigma_1|^{-1-\mathrm{Re}(\alpha_2)} \, |1, \sigma_2|^{-1-\mathrm{Re}(\alpha_2)} \, |\sigma_1-\sigma_2|^{-1+\mathrm{Re}\,\alpha_2}$$

est intégrable sur k^2, le lemme 35 et la formule (5.50) montrent que le membre de droite de (5.59) dépend analytiquement de α_1 et α_2 sur le domaine défini par les conditions

$$|Re(\alpha_1) - Re(\alpha_2)| < 1, \ Re(\alpha_1) > 0 \text{ et } Re(\alpha_2) > 0,$$

$$|Re(\alpha_1) - Re(\alpha_2)| + Re(\alpha_1) + Re(\alpha_2) < 2.$$

En particulier, on peut se borner à prouver (5.59) sous l'hypothèse supplémentaire

$$\mathrm{Re}(\chi_1) > \frac{1}{2},\ \ \mathrm{Re}(\chi_2) > \frac{1}{2},$$

compatible avec ce qui précède, et que nous faisons désormais.

Introduisons à cet effet l'opérateur

$$L = Op(\max(1, |2x|, |2\xi|)),$$

analogue non-archimédien de l'oscillateur harmonique. On pose aussi

$$\delta_\chi(x,\xi) = |x|^{-1}\chi(x),$$

de sorte que, avec $g_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & -\sigma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a

$$(\delta_\chi \circ g_\sigma)(x,\xi) = |x - \sigma\xi|^{-1}\chi(x - \sigma\xi).$$

On introduit également l'opérateur $A_{\chi\ ,\ \sigma}$ de symbole de Weyl $\delta_\chi \circ g_\sigma$.

Regardant L comme un opérateur non-borné dans L^2, on note que L, de domaine initial $\mathcal{S}(k)$, est formellement auto-adjoint, et que, rappelant la famille $(\phi_Y) = (\phi_{y,\eta})$ d'états cohérents (cf. définition 1), on a les formules

$$L\phi_{y,\eta} = \max(1, |2y|, |2\eta|)\phi_{y,\eta}$$

et

$$Op(\max(1, |2\xi|))\phi_{y,\eta} = \max(1, |2\eta|)\phi_{y,\eta} :$$

rappelons pour la deuxième de ces identités que $Op(\max(1, |2\xi|))$ est l'opérateur noté J^1 en (2.2). Par suite, si l'on pose

$$D(L) = \left\{ u \in L^2(k) : \int_k \max(1, |2y|, |2\eta|)^2 \left|(u, \phi_{y,\eta})\right|^2\ dy\ d\eta < +\infty \right\},$$

on voit que L s'étend en un opérateur auto-adjoint sur $L^2(k)$ de domaine $D(L)$. En outre,

$$\begin{aligned} \|Op(\max(1, |2\xi|))u\|^2 &= \int_k \max(1, |2\eta|)^2 \left|(u, \phi_{y,\eta})\right|^2\ dy\ d\eta \\ &\le C \int_k \max(1, |2y|, |2\eta|)^2 \left|(u, \phi_{y,\eta})\right|^2\ dy\ d\eta \\ &\le C \|Lu\|^2. \end{aligned}$$

Il résulte de là que $D(L) \subset D(J^1) \subset L^\infty_{\mathrm{loc}}(k)$. Remplaçant $Op(\max(1, |2\xi|))$ dans l'identité précédente par $Op(\max(1, |2y|))$, on voit d'ailleurs que $D(L) \subset L^\infty(k)$: ceci montre que pour $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(\chi) < 1$, l'opérateur $Op(\delta_\chi)$ envoie $D(L)$ dans $L^2(k)$. En prenant l'adjoint, on voit qu'il envoie aussi $L^2(k)$ dans $D(L^{-1})$. L'avantage de l'espace de Hilbert $D(L)$ est qu'il est invariant par l'action de tous les opérateurs $\pm Met(g_\sigma)$ dans le cas où $|\sigma| \leq 1$. Cela résulte en effet de l'invariance du symbole de L sous l'action linéaire de $SL(2, \mathcal{O}_k)$, dont la vérification est immédiate. Il résulte de là que, pour $|\sigma| \leq 1$, l'opérateur $A_{\chi,\sigma}$ envoie $D(L)$ dans $L^2(k)$ et $L^2(k)$ dans $D(L^{-1})$ avec une norme indépendante de σ. Pour $|\sigma| > 1$ et sous la même hypothèse pour $\mathrm{Re}(\chi)$, on écrit

$$|x - \sigma\xi|^{-1} \chi(x - \sigma\xi) = |\sigma|^{-1} \chi(\sigma) \left|\sigma^{-1}x - \xi\right|^{-1} \chi(\sigma^{-1}x - \xi)$$

et on voit de même que $A_{\chi,\sigma}$ envoie $D(L)$ dans $L^2(k)$ et $L^2(k)$ dans $D(L^{-1})$ avec une norme moindre que $C\,|\sigma|^{-1+\mathrm{Re}(\chi)}$. Finalement, l'identité (5.59) équivaut à l'identité entre opérateurs

$$\begin{aligned}&(\int_k b(\chi_1, \sigma_1) A_{\chi_1,\sigma_1} d\sigma_1)(\int_k b(\chi_2, \sigma_2) A_{\chi_2,\sigma_2} d\sigma_2)\\ &= \int_k \int_k b(\chi_1, \sigma_1)\ b(\chi_2, \sigma_2)\ A_{\chi_1,\sigma_1} A_{\chi_2,\sigma_2}\ d\sigma_1\ d\sigma_2.\end{aligned}$$

Cette identité résulte, vu que l'on a maintenant

$$\mathrm{Re}(\chi_1) > \frac{1}{2},\ \ \mathrm{Re}(\chi_2) > \frac{1}{2},$$

et que

$$|b(\chi_j, \sigma_j)| \leq C\,|1, \sigma_j|^{-1-\mathrm{Re}(\chi_j)}$$

de ce que le second membre est une intégrale convergent dans l'espace des opérateurs bornés de $D(L)$ dans $D(L^{-1})$.

Chapitre 6

Bibliographie :

[G-G-P-S] **I.M Guelfand, M.I Graev, I.I Piateskii-Shapiro**,
Representation theory and automorphic functions, vol. 6, Academic Press,
Boston, 1990.
[S] **S. Haran**, Quantization and symbolic calculus over the
p-adic numbers, Annales de l'Institut Fourier 43,4 (1993), 997-1053.
[U1] **A.Unterberger** Analyse harmonique et analyse pseudodifférentielle du cône
de lumière,Astérisque 156, Société Mathématique de France, 1987.
[U2] **A. Unterberger**, Quantization and non-holomorphic
modular forms, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag 2000
[U3] **A. Unterberger**, Automorphic pseudodifferential analysis and higher-level Weyl calculi, Preprint 2000.
[U-U] **A.Unterberger, H.Upmeier**, Pseudodifferential analysis
on symmetric cones, CRC Press, Boca Raton (USA) 1996.
[W] A. Weil, Basic Number Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1967.