1 Exercices

Exercice 1.1 Soit x un réel. Déterminer la forme polaire de $\dfrac{1+ix}{1-ix}$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^n = e^{i\theta}$

Exercice 1.2 On pose $f(x) = \arctan(\dfrac{1}{x-2}) + \arctan(\dfrac{1}{x+3})$.
Combien de solutions possède l'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}$? Résoudre alors cette équation

Exercice 1.3 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > b > 0$. On pose $f(x) = \arcsin(ax) + \arccos(bx)$.

1. Chercher le domaine de définition de f; montrer que f admet une réciproque.
2. Calculer $\sin(f(x))$, $\cos(f(x))$; en déduire $\cos^2(f(x))$ en fonction de $\sin(f(x))$ puis donner l'expression de f^{-1}.
3. Application : résoudre $\arcsin \dfrac{4\pi x}{5} + \arccos \dfrac{3\pi x}{5} = 1$ (resp. $= 0$).

Exercice 1.4 Etudier la fonction $x \mapsto \arcsin(3x - 4x^3)$.

Exercice 1.5 Calculer la somme $C = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\cos k\alpha}{(\cos \alpha)^k}$ avec $\alpha \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \cdots$ et $\arg \frac{z}{z'} = \cdots$ Ensuite, utiliser que si $z = a + ib$ et $z = \rho e^{i\theta}$ alors $\tan\theta = \frac{b}{a}$ (faire un dessin pour s'en convaincre). On obtient ainsi l'angle polaire de z à π près. Ensuite se rappeler dans quel intervalle se localise $\arctan x$, pour x un réel quelconque puis faire un dessin pour localiser θ et enfin obtenir la valeur précise de θ. Utiliser la forme polaire précédente puis $e^{ia} = e^{ib} \Leftrightarrow \cdots$ puis effectuer un produit en croix pour obtenir x (penser à utiliser $e^a + e^b = e^{(a+b)/2}[?+?]$ afin d'obtenir une formule sympathique)

Indication pour l'exercice 1.2 : La fonction f est définie sur l'union de trois intervalles, montrer que f réalise une bijection sur chacun de ces intervalles, déterminer chaque image d'intervalle pour en déduire le nombre de solutions (on peut éventuellement utiliser un tableau de variations pour s'aider). Pour résoudre l'équation, utiliser une seule fois l'égalité

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \times \text{signe de} x$$

pour transformer l'équation et passer ensuite à la tangente (en n'oubliant pas que $\tan(\arctan x) = \cdots$)

Indication pour l'exercice 1.3 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > b > 0$. On pose $f(x) = \arcsin(ax) + \arccos(bx)$.

1. arcsin et arccos sont définies sur I donc il faut demander que ax et bx appartiennent à I donc x appartient à .... Appliquer le théorème de bijection (pour le signe de f', résoudre l'inéquation $f'(x) > 0$)
2. Utiliser les formules
$$\cos(\arccos x) = x, \quad \sin(\arcsin x) = x, \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{\cdots}, \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{\cdots}$$
en n'oubliant pas les domaines de validité.
Ensuite, si $g(f(x)) = x$ pour tout $x \in J$, puisque f est bijective, évaluer en $x = f^{-1}(t)$ donc on obtient f^{-1}.
3. l'équation est équivalente à $f(x) = 1$ pour a et b convenable donc $x = f^{-1}(1)$ (car f est bijective)

Indication pour l'exercice 1.4 : Pour le domaine de définition, arcsin est définie sur I donc $3x - 4x^3 \in I$, ce qui amène deux inégalités $\alpha \leqslant \beta$ et $\beta \leqslant \gamma$. On les résoud en "passant tout du même côté", ce qui donne des inéquations du type $P(x) \leqslant 0$. On cherche une racine simple pour chaque polynôme, ce qui permet de le factoriser et d'établir le signe de $P(x)$. Justifier la dérivabilité par le théorème de composition et vérifier que

$$f'(x) = \frac{-3\,(2x-1)\,(2x+1)}{\sqrt{(1-x)\,(x+1)\,(2x-1)^2\,(2x+1)^2}}$$

(utiliser au maximum les identités remarquables). Après une petite discussion, obtenir une expression simplifier de $f'(x)$ ($\sqrt{x^2} = \cdots$ selon le signe de x). En se rappelant la dérivée de arcsin et arccos, obtenir l'expression de f en fonction de arcsin et arccos selon l'intervalle.

Indication pour l'exercice 1.5 : $\cos kx = \mathrm{Re}(e^{ikx})$ puis utiliser que $b\,\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(bz)$ si b est réel et enfin $\sum_{k=0}^{n} q^k = \cdots$

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.4 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.5 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)