1 Exercices

Exercice 1.1 Soit a un réel positif. On considère la fonction $f_a : x \mapsto (1+\frac{a}{x})^x$

1. On admet que $(E) : \forall y \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{y}{1+y} \leqslant \ln(1+y) \leqslant y$.
   Déterminer un encadrement de f_a. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a$..
2. Montrer que f_a réalise une bijection de $[a,+\infty[$ sur un intervalle à expliciter.
3. Démontrer l'inégalité (E).

Exercice 1.2 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad \operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th} 2x} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x)$

Exercice 1.3 On considère l'équation $(E) : z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

1. Résoudre directement dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
2. Soit z une solution de (E). On pose $Z = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.
   (a) Montrer que Z est solution d'une équation du second degré (E').
   (b) Résoudre (E').
   (c) Quelle les valeurs possibles de $\cos\frac{2\pi}{5}$?
   (d) Quelle est la valeur précise de $\cos\frac{2\pi}{5}$? En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{5}$ et de $\sin\frac{\pi}{5}$.
   (e) Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{2k\pi}{5}$ pour $k \in [\![2,4,]\!]$

Exercice 1.4 1. Donner l'expression de $\cos(a+b)$ et celle de $\cos(a-b)$. En déduire une autre expression de $\sin a \sin b$.

2. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin[(n+1)\theta]\sin(n\theta)$

Exercice 1.5 1. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kb)$ où a et b sont deux réels

2. Simplifier la somme suivante : $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{ch} ka}{(\operatorname{ch} a)^k}$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Prendre $y = \dfrac{a}{x}$ dans l'encadrement, passer à l'exponentielle et on invoque le théorème d'encadrement.

2. Calculer la dérivée seconde de f (en utilisant que $f(x) = \exp(...)$). En déduire le signe de f" donc la monotonie de f', placer la valeur de $f'(a)$, en déduire le signe de f' et enfin la monotonie de f. Pour l'intervalle à expliciter, $f([a, +\infty[) = [f(a), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))[$ (en évaluant chacune de ces expressions)Montrer que f_a réalise une bijection de $[a, +\infty[$ sur un intervalle à expliciter.

3. Introduire deux fonctions $\varphi(y) = \dfrac{y}{1+y} - \ln(1+y)$ et $\psi(y) = \ln(1+y) - y$, dresser leurs tableaux de variations respectifs sur $[0, +\infty[$ et placer des bornes facilement calculables.

Indication pour l'exercice 1.2 : Utiliser la formule de duplication $\mathrm{th}(2x) = \cdots$ en fonction de $\mathrm{th}\, x$.
Pour la somme, appliquer la formule précédente à $2^k x$ puis effectuer un principe des dominos (ou télescopage)

Indication pour l'exercice 1.3 : On considère l'équation $(E) : z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \cdots$

2. Soit z une solution de (E). On pose $Z = \dfrac{1}{2}(z + \dfrac{1}{z})$.

   (a) Développer Z^2, mettre au même dénominateur, utiliser que $z^4 = ..$ (cf. 1), regrouper les z et $\dfrac{1}{z}$ pour faire apparaitre Z

   (b) Faut pas pousser mamie dans les orties surtout quand elle est en short et qu'il fait froid :=)

   (c) Uiliser Euler pour écrire $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(?+?)$, or ? est solution de l'équation (E) donc $\cos\theta = Z$ de la question 2

   (d) Déterminer le signe de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.
   Utiliser la formules $\cos 2\theta = P(\cos\theta)$ pour obtenir une équation satisfaite par $\cos(\dfrac{\pi}{5})$ et en déduire $\cos(\dfrac{\pi}{5})$ à l'aide de son signe. Pour le sinus, utiliser la célébrissime formule $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

   (e) $\cos 2\theta = \cdots$, $\cos 3\theta = \cos(\theta + 2\theta)$, etc

Indication pour l'exercice 1.4 :

1. revoir son cours

2. Utiliser la formule précédente afin d'obtenir deux sommes, utiliser ensuite que $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$ puis les formules $e^{ab+c} = (e^a)^b e^c$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \cdots$

Indication pour l'exercice 1.5 :

1. $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, "casser" la somme par linéarité, $e^{xy+z} = (e^x)^y e^z$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \cdots$

2. $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, "casser" la somme par linéarité et aboutir à deux sommes de suites géométriques.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.4 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.5 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)