1 Exercices

Exercice 1.1 1. Soit α un réel appartenant à $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

(a) Déterminer le module et l'argument du complexe $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$

(b) Calculer $\left(\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n$ pour tout entier naturel n.

(c) Résoudre l'équation $z^5=\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^3+\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^2+\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)+1=0$

Exercice 1.2 On pose $s_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\sin kx$ et $S_n(x)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}s_k(x)$.
Calculer $S_n(x)$.

Exercice 1.3 1. Justifier que $\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \dfrac{x}{1+x}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x$ puis que $\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \dfrac{x}{1+x^2}\leqslant\arctan x\leqslant x$

2. Soit n un entier, x un nombre réel et z_n le complexe défini par $z_n=(1+\dfrac{ix}{n})^n$

(a) Donner le module ρ_n de z_n ainsi que son argument φ_n.

(b) Encadrer $\ln\rho_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\rho_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho_n$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n$.
Interpréter géométriquement les résultats précédents.

Exercice 1.4 Soit f la fonction définie par $f:x\mapsto\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
2. Déterminer l'antécédent de 0 puis de 1.
3. Expliciter la réciproque de f

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. (a) Revoir les propriétés algébriques du module et de l'argument ainsi la méthode de détermination de l'argument par la tan
   (b) Ecrire $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ sous forme polaire et utiliser Euler
   (c) Ecrire $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ et z sous forme polaire. Utiliser ensuite que $re^{i\theta}=\rho e^{i\varphi}$ ssi $r=\rho$ et $\theta=\varphi \bmod 2\pi$, dans le cas où $r,\rho\in\mathbb{R}_+$ et $\theta,\varphi\in\mathbb{R}$
2. Justifier que $x=\tan\alpha$ pour un certain α, utiliser Moivre et se rappeler ce que vaut $1+q+q^2+q^3$

Indication pour l'exercice 1.2 : Pour la première somme, utiliser que $\sin kx=\operatorname{Im}\left[(e^{ix})^k\right]$ puis utiliser l'égalité que

$$\exp(a)\pm\exp(b)=\exp(\frac{a+b}{2})(\exp(\frac{a-b}{2})\pm\exp(-\frac{a-b}{2}))$$

pour simplifier la somme.
Pour la seconde somme, utiliser les formules de développement du type $\sin a\sin b=0$ puis exploiter l'astuce précédente $\sin kx=\operatorname{Im}\left[(e^{ix})^k\right]$ et $\cos kx=\cdots$

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Un encadrement $a\leqslant b\leqslant c$ signifie $a\leqslant b$ et $b\leqslant c$. Pour chaque inégalité, introduire une fonction convenable et dresser son tableau de variations en plaçant les bornes.
2. (a) Voir les propriétés algébriques du module et de l'argument ainsi la méthode de détermination de l'argument par la tan. Pour la valeur exacte de l'argument utiliser que $\rho\cos\varphi$ =abscisse
   (b) Pour les encadrements, voir la question 1. Pour l'interprétation, utiliser que $\rho_n\to\rho$ et $\varphi_n\to\varphi$ alors $\rho_n e^{i\varphi_n}\to\rho e^{i\varphi}$

Indication pour l'exercice 1.4 :

1. Pour le domaine de définition, justifier sans calcul qu'il contient $\mathbb{R}_+$ puis résoudre l'inéquation $x+\sqrt{x^2+1}$ lorsque $x<0$. Pour la bijection, il est utile de simplifier au maximum la dérivée)
2. Revoir la définition d'un antécédent. Pour 0, on peut le faire de tête. Pour le second se ramener à équation du type $a=\sqrt{b}$ puis élever au carré.
3. Pour y fixé, rechercher son antécédent par une méthode similaire au 2 en n'oubliant que l'antécédent doit appartenir à ...

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :

1. (a) $\rho = \left|\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right| = \dfrac{|1+i\tan\alpha|}{|1-i\tan\alpha|} = \dfrac{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}}{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}} = 1$ et $\arg\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \arg(1+i\tan\alpha) - \arg(1-i\tan\alpha)$.
Soit θ l'angle polaire de $1+i\tan\alpha$ alors $\tan\theta = \dfrac{\tan\alpha}{1} = \tan\alpha$ (faire un dessin en plaçant $z = x+iy$ et faire de la trigo dans le triangle $(O,(x,0),(0,y))$). On en déduit que $\theta = \alpha \bmod \pi$. Ensuite, on a $\rho\cos\theta = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+(\tan\alpha)^2}\cos\theta = 1 \Leftrightarrow \cos\theta = \sqrt{\dfrac{1}{1+(\tan\alpha)^2}} = \cos\alpha$ (puisque $\alpha \in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ donc $\cos\alpha > 0$). Par conséquent, les égalités $\cos\theta = \cos\alpha$ et $\tan\theta = \tan\alpha$ combinées au fait que θ et α appartiennent à $]-\pi,\pi[$ permettent d'écrire que $\theta = \alpha$, c'est-à-dire $\arg(1+i\tan\alpha) = \alpha$. En remplaçant α par $-\alpha \in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$, on peut écrire $\arg(1-i\tan\alpha) = -\alpha$ et on a donc $\arg\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \alpha-(-\alpha) = 2\alpha$.
Conclusion : on a montré que $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = e^{2i\alpha}$.

   (b) $\left(\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n = (e^{2i\alpha})^n = e^{2in\alpha} = \cos 2n\alpha + i\sin 2n\alpha$

   (c) Puisque $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ est un complexe non nul, on est assuré que les solutions de l'équation sont non nulles. Soit z une telle solution, on peut donc l'écrire $z = re^{i\varphi}$ (avec $r>0$ et $\varphi\in\mathbb{R}$) et puisque l'on a $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = e^{2i\alpha}$, on en déduit que $r^5e^{5i\varphi} = e^{2i\alpha}$. Cette dernière égalité est équivalente au système

$$\begin{cases} r^5 &= 1 \\ 5\varphi &= 2\alpha \bmod 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r &= 1 \\ \varphi &= \dfrac{2}{5}\alpha \bmod \dfrac{2\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r &= 1 \\ \varphi &= \dfrac{2}{5}\alpha + k\dfrac{2\pi}{5}, \quad k \in [\![0,4]\!] \end{cases}$$

(puisque les angles géométriques sont définis à 2π près ou encore que la fonction $t \mapsto e^{it}$ est 2π-périodique). Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation $z^5 = \dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ est $S = \{\exp(\dfrac{2}{5}\alpha + k\dfrac{2\pi}{5}), \quad k\in[\![0,4]\!]\}$.

2. La fonction $t \mapsto \tan t$ réalise une bijection de $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ donc il existe un (et un seul) réel α tel que $x = \tan\alpha$. L'équation

$$(E) : \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^3 + \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^2 + \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) + 1 = 0$$

s'écrit donc

$$\left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^3 + \left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right) + 1 = 0.$$

La question 1 montre que $\left(\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right) = e^{2i\alpha}$ ce qui nous donne l'équation

$$\left(e^{2i\alpha}\right)^3 + (e^{2i\alpha})^2 + e^{2i\alpha} + 1 = 0.$$

Si $e^{2i\alpha} = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = 0 \bmod 2\pi \Leftrightarrow \alpha = 0 \bmod \pi$ alors $x = \tan\alpha = 0$. Or $x = 0$ n'est pas solution de l'équation (E) car $1+1+1+1 \neq 0$. Donc on est assuré que $e^{2i\alpha} \neq 1$, ce qui nous donne

$$0 = \left(e^{2i\alpha}\right)^3 + (e^{2i\alpha})^2 + e^{2i\alpha} + 1 = \frac{1-(e^{2i\alpha})^4}{1-e^{2i\alpha}} = \frac{1-e^{8i\alpha}}{1-e^{2i\alpha}} \Leftrightarrow e^{8i\alpha} = 1 \Leftrightarrow 8\alpha = 0 \bmod 2\pi \Leftrightarrow \alpha = 0 \bmod \frac{\pi}{4}$$

Or nous avons vu que l'égalité $\alpha = 0 \bmod \pi$ est impossible et par définition $\alpha \in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ donc les seules valeurs possibles pour α sont $-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$. Par conséquent, les seules valeurs possibles pour x sont $x = \tan(-\dfrac{\pi}{4}) = -1$ et $x = \tan(\dfrac{\pi}{4}) = 1$. Réciproquement, puisque $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{|1-i|^2} = i$ et $\dfrac{1-i}{1+i} = -i$, un calcul, laissé au soin du lecteur, montre que $x = 1$ et $x = -1$ sont bien solutions de (E).

Correction de l'exercice 1.2 : Lorsque $x = 0 \mod \pi$, on a $\sin kx = 0$ donc $s_n(0) = 0$.
Si $x \neq 0 \mod \pi$, alors $e^{ix} \neq 1$ et $\sin \dfrac{kx}{2} \neq 0$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \sin kx = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(\exp(ikx)) = \mathrm{Im}\left[\sum_{k=0}^{n} \exp(ikx)\right] = \mathrm{Im}\left[\sum_{k=0}^{n} (\exp(ix))^k\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{1-(\exp(ix))^{n+1}}{1-\exp(ix)}\right] \\
&= \mathrm{Im}\left[\frac{1-(\exp(i(n+1)x)}{1-\exp(ix)}\right] \underset{\text{astuce}}{=} \mathrm{Im}\left[\frac{\exp\left(\frac{i(n+1)x}{2}\right)}{\exp(\frac{ix}{2})} \times \frac{\exp\left(-\frac{i(n+1)x}{2}\right) - \exp\left(\frac{i(n+1)x}{2}\right)}{\exp(-\frac{ix}{2}) - \exp(\frac{ix}{2})}\right] \\
&= \mathrm{Im}\left[\exp\left(\frac{inx}{2}\right) \frac{\exp\left(\frac{i(n+1)x}{2}\right) - \exp\left(-\frac{i(n+1)x}{2}\right)}{\exp(\frac{ix}{2}) - \exp(-\frac{ix}{2})}\right] = \mathrm{Im}\left[\exp\left(\frac{inx}{2}\right) \frac{2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{2i\sin(\frac{ix}{2})}\right] \\
&= \mathrm{Im}\left[\exp\left(\frac{inx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin(\frac{ix}{2})}\right] = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin(\frac{ix}{2})} \mathrm{Im}\left[\exp\left(\frac{inx}{2}\right)\right] = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin(\frac{x}{2})}
\end{aligned}$$

(dans la dernière ligne, on a utilisé que $\mathrm{Im}(\alpha z) = \alpha \,\mathrm{Im}\, z$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$).
Puisque l'on dispose de l'égalité $2\sin a \sin b = \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) - \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on a

$$2n\sin\left(\frac{x}{2}\right) S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x$$

La suite est indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.4 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)