

1 Exercices

Exercice 1.1 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $1 + x + x^2 + x^3$
2. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

Exercice 1.2 On considère un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est un nombre premier.

Montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

(On pourra considérer $P(n+m)$ en choisissant m convenablement pour que $P(n+m)$ ne soit pas premier).

Conclure.

Exercice 1.3 1. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(XY) = P(X)P(Y)$

(on commencera par montrer que si P admet une racine non nulle, alors P admet une infinité de racines non nulles)

2. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+Y) = P(X)P(Y)$
3. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(XY) = P(X) + P(Y)$

Exercice 1.4 1. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (P(X))^2$

2. Déterminer tous les polynômes P tels que $P(1-2X) = P(X)$
3. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $1 + x + x^2 + x^3$
2. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

Indication pour l'exercice 1.2 : On considère un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est un nombre premier. Montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

(On pourra considérer $P(n+m)$ en choisissant m convenablement pour que $P(n+m)$ ne soit pas premier).
Conclure.

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(XY) = P(X)P(Y)$
(on commencera par montrer que si P admet une racine non nulle, alors P admet une infinité de racines non nulles)
2. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+Y) = P(X)P(Y)$
3. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(XY) = P(X) + P(Y)$

Indication pour l'exercice 1.4 :

1. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (P(X))^2$
2. Déterminer tous les polynômes P tels que $P(1-2X) = P(X)$
3. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $1 + x + x^2 + x^3$
2. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

Correction de l'exercice 1.2 : On considère un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est un nombre premier. Montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. (On pourra considérer $P(n+m)$ en choisissant m convenablement pour que $P(n+m)$ ne soit pas premier). Conclure.

Correction de l'exercice 1.3 :

1. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(XY) = P(X)P(Y)$
(on commencera par montrer que si P admet une racine non nulle, alors P admet une infinité de racines non nulles)
2. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+Y) = P(X)P(Y)$
3. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(XY) = P(X) + P(Y)$

Correction de l'exercice 1.4 :

1. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (P(X))^2$
2. Déterminer tous les polynômes P tels que $P(1-2X) = P(X)$
3. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$