1 Exercices

Exercice 1.1 Soit (C) une conique de foyer O et de directrice associée D, Γ un cercle passant par O, coupant (C) en quatre points M_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ et D en deux points P_1 et P_2; montrer que

$$OM_1.OM_2.OM_3.OM_4 = OP_1^2 OP_2^2.$$

Exercice 1.2 On considère l'application $(x,y) \mapsto (\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{2xy}{x+y})$ de $]0,+\infty[^2$ dans $]0,+\infty[^2$
Est-ce une injection ? une surjection ? une bijection ?

Exercice 1.3 Nature des coniques :

$$(C_\lambda) : (1+\lambda)(x^2+y^2) + 2(1-\lambda)xy - y + 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On distinguera les cas $\lambda = 0$, $\lambda < 0$, $0 < \lambda < 1$, $\lambda = 1$, $\lambda > 1$
Donner les centres et foyers de ces coniques

Exercice 1.4 On considère l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccl} S = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a^2 - 4b \geqslant 0 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & \text{la plus grande racine réelle du trinôme } X^2 + aX + b \end{array} \right.$$

Est-ce une injection ? une surjection ? une bijection ?

Exercice 1.5 Si $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$, on note (D_t) la droite d'équation $x + ty - at^2 = 0$ dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormée $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, (D_t) est tangente à la parabole $(P) : y^2 = -4ax$ en un point M_t dont on donnera les coordonnées;
2. déterminer les normales à (P) passant par $S \begin{pmatrix} -5a \\ -2a \end{pmatrix}$ et préciser les intersections de ces normales avec (P).

Exercice 1.6 L'application $F : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (p,q) & \mapsto & \dfrac{2p+3q}{p+q} \end{array}$ est-elle surjective ? injective ? bijective ?

2 Indications

3 Corrections