Exercices de mathématiques MPSI et PCSI

par Abdellah BECHATA

www.mathematiques.ht.st

Table des matières

1 Généralités sur les fonctions

Exercice 1.1
Etudier les fonctions

a. $x \mapsto \ln(e^{2x} - 2\operatorname{ch}(1)e^x + 1)$ b. $x \mapsto x(1 + \frac{1}{x})^x$

c. $x \mapsto \arccos(\frac{1-x}{1+x}) + \arcsin(\frac{\sqrt{2}x}{1+x})$ d. $x \mapsto (x-2)^{x^2-3x+2}$

e. $x \mapsto \arccos(1-x^2)$

Exercice 1.2
Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \operatorname{ch}(kx)$, $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \operatorname{sh}(kx)$.

Exercice 1.3
Résoudre l'équation $\sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(2+kx) = 0$

Exercice 1.4
Résoudre l'équation $\arcsin(2x) = \arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{2})$.

Exercice 1.5
Calculer $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$

Exercice 1.6
Résoudre l'équation $\tan(3 \arcsin x) = 1$. On exprimera les trois solutions au moyen de radicaux.

Exercice 1.7
Calculer $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3$.

Exercice 1.8
Etude de la fonction $\arccos(\frac{1-t^2}{1+t^2}) + \arcsin(\frac{2t}{1+t^2})$

Exercice 1.9
On donne deux entiers p et q vérifiant : $0 < p < q$.

1. Calculer $\arctan \frac{p}{q} + \arctan \frac{q-p}{q+p}$.
2. Calculer $4 \arctan \frac{1}{5}$ et à l'aide de la question précédente en déduire la formule de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

Exercice 1.10
1. Expliciter un polynôme Q tel que $\sin 3x = \sin x Q(\cos x)$
2. Résoudre l'équation $\sin 2x = \sin 3x$ de deux manières différentes.
3. En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\cos \frac{3\pi}{5}$, puis celle de $\cos \frac{2\pi}{5}$.
4. Montrer par récurrence (sans la formule du binôme) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n$ et Q_n deux polynômes tels que $\cos nx = P_n(\cos x)$ et $\sin nx = (\sin x)Q_n(\cos x)$

Exercice 1.11
Déterminer $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} \sup\limits_{x\in[0;1]} \mid x^2 + tx \mid$

Exercice 1.12
L'ensemble A suivant possède-t-il une borne sup, une borne inf, un max, un min. Si oui, les calculer.

$$A = \{\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n},\ n \geqslant 2\}$$

2 Continuité

Exercice 2.1
Soit f une fonction définie sur $[0,1]$

1. Montrer que (f continue et injective sur $[0,1]$) $\Rightarrow$ (f monotone)
2. Montrer que (f monotone sur $[0,1]$ et $\forall z \in [f(0), f(1)]$, $\exists c \in [0,1]$ tel que $f(c) = z$) $\Rightarrow$ (f continue sur $[0,1]$)

Exercice 2.2
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $\forall x \in [0,1]$

1. $f(x) < g(x)$ alors $\exists m$ tel que $\forall x \in [0,1],\ f(x) + m \leq g(x)$
2. $0 < f(x) < g(x)$ alors $\exists C > 1$ tel que $\forall x \in [0,1],\ Cf(x) \leq g(x)$

Exercice 2.3
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{4}} - 1}{x}$

1. Montrer que f se prolonge par continuité en 0.
2. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$.
3. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et atteint ses bornes.

Exercice 2.4
Soit f une fonction continue en 0 et telle que $f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$

1. Calculer $f(0)$. Etudier la parité de f.
2. Montrer que $f(nx) = n^2 f(x)$ pour tout entier n et tout réel x.
3. Montrer que $f(px) = p^2 f(x)$ pour tout rationnel p et tout réel x.
   Indication : on calculera de deux façons $b^2 f(\frac{a}{b}x))$
4. Conclure

Exercice 2.5
Soit f.une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. Montrer que
   a) $f(px) = pf(x)$ $\forall p \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ b) $f(0) = 0$ et $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$
2. En déduire que
   a) $f(n) = nf(1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ b) $f(n) = nf(1)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ c) $f(x) = xf(1)$ $\forall x \in \mathbb{Q}$
3. Déterminer f.

Exercice 2.6
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et telle que $(f(x))^2 = 1$ $\forall x \in [a,b]$
Montrer que $f(x) = 1$ $\forall x \in [a,b]$ ou $f(x) = -1$ $\forall x \in [a,b]$

Exercice 2.7
Soit f une fonction continues sur $[a,b]$.
Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x, y \in [a,b], \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon + \alpha(x-y)^2$.

Exercice 2.8
On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f
2. Déterminer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$

3 Dérivabilité

Exercice 3.1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \exp(\dfrac{x-1}{x^2}) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = a \end{cases}$
Etudier la continuité et la dérivablilité de f selon les valeurs de a. f' est-elle continue ?

Exercice 3.2
Soit f la fonction définie par $f(t) = (1-t)\sqrt{1-t^2}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son domaine de définition.
2. Calculer, le cas échéant, sa dérivée.

Exercice 3.3
Soit f une fonction définie sur un certain intervalle I contenant 0.
On suppose que f est continue et dérivable en 0 et que $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ pour tous $x, y \in I$

1. Calculer $f(0)$. Montrer qu'il existe un intervalle $]-a, a[$ sur lequel $|f(x)| < \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $]-a, a[$.
3. Montrer que la fonction f est dérivable sur $]-a, a[$ et calculer sa dérivée.
4. En déduire la fonction f recherchée. Pouvait-on l'intuiter ?

Exercice 3.4
On considère, pour tout entier n, les fonctions $f_n(t) = e^t \dfrac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$

1. Montrer que f_n est un polynôme de degré n et expliciter ses coefficients.
2. Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4 Fonctions de classes C^k

Exercice 4.1
Soit $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$
Appliquer le TAF sur $[0, x]$ à $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto t\cos(t) - \sin(t)$.
En déduire que f se prolonge de façon C^1 sur $\mathbb{R}$ puis calculer f'

Exercice 4.2
Quelle est la classe de la fonction $x \mapsto \begin{cases} x^4 \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$? Possède–t-elle un $DL_3(0)$?

Exercice 4.3
Pour n entier naturel, déterminer la classe de la fonction $f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^n & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
(c'est-à-dire déterminer le plus entier k tel que f soit C^k sur $\mathbb{R}$).

Exercice 4.4
On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} \exp(\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}) \text{ si } x \in]a, b[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ où $a < b$

1. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$
2. Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$.
3. On pose $h(x) = \exp \dfrac{1}{x-a}$.
   Montrer que pour tout entier n, il existe un polynôme P_n tel que $h^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} \exp(\dfrac{1}{x-a})$
4. En déduire la forme de $f^{(n)}$ et montrer, par récurrence, que f est C^n sur $\mathbb{R}$ pour tout n.

Exercice 4.5
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$

1. Calculer $f^{(n)}(x)$
2. Si $a = b$, calculer $f^{(n)}(x)$ par une autre méthode
3. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$

Exercice 4.6
Pour tout entier n, on pose $L_n(x) = ((x^2-1)^n)^{(n)}$

1. Calculer $((x^2-1)^n)^{(k)}_{|x=\pm 1}$ pour $k \in \{0, .., n-1\}$
2. Montrer que L_n possède n zéros distincts appartenant à $]-1, 1[$.
3. Montrer que $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 4.7
Soit f une fonction de classe C^3 sur $]a, b[$

1. Montrer que pour tout $x \in]a, b[$ et tout h suffisamment petit, il existe $\xi_{x,h} \in]a, b[$ tel que
   $\dfrac{f(x+3h) - 3hf(x+2h) + 3h^2 f(x+h) - f(x)}{h^3} = f^{(3)}(\xi_{x,h})$
2. Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+3h) - 3hf(x+2h) + 3h^2 f(x+h) - f(x)}{h^3}$

Exercice 4.8
Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(a)+f(b)}{2} = f(\dfrac{a+b}{2}) + \dfrac{(b-a)^2}{8} f''(c)$

2. On suppose que $f'' \geq 0$ sur $]a, b[$

   (a) Montrer que $\forall x, y \in [a, b]$ $f(\dfrac{x+y}{2}) \leq \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

   (b) En déduire que f est convexe sur $[a, b]$

Exercice 4.9
Soit f une fonction C^3 sur $[a, b]$.
Montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $f(b) = f(a) + (b-a) f'(\dfrac{a+b}{2}) + \dfrac{(b-a)^3}{24} f^{(3)}(\xi)$
(on pourra considérer $g(t) = f(\dfrac{a+b}{2} - t) - f(\dfrac{a+b}{2} + t)$)

Exercice 4.10
Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Soit k un entier et $a \in \mathbb{R}$.
On pose $(\Delta_{k,a} f)(h) = \dfrac{1}{h^k} \sum\limits_{q=0}^{k} (-1)^q C_k^q f(a + qh)$

1. Calculer $\lim\limits_{h \to 0} (\Delta_{1,a} f)(h)$ puis $\lim\limits_{h \to 0} (\Delta_{2,a} f)(h)$.

2. Calculer dans le cas général $\lim\limits_{h \to 0} (\Delta_{k,a} f)(h)$

Exercice 4.11
Soit f une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, $a_1 < .. < a_n$ des points de $[a, b]$.
Le polynôme interpolateur P de f en les (a_i) est défini par

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k) \prod_{j \neq k} \frac{x - a_j}{a_k - a_j}$$

Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-a_1)..(x-a_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

(on commencera par introduire une fonction $g(x) = f(x) - P(x) - A\dfrac{(x-a_1)..(x-a_n)}{n!}$ en choisissant A convenablement)

Exercice 4.12
Soit f une fonction C^1 et bornée sur $\mathbb{R}$. On suppose que f' possède une limite finie en $+\infty$.
Que peut-on dire de cette limite ?

5 Bijections

Exercice 5.1
Soit f définie sur $\mathbb{R}^\times$ par $f(x) = x + \ln(x)$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^\times$ sur $\mathbb{R}$
2. f^{-1} est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5.2
Soit $g : x \mapsto x + \ln x$.

1. Etudier g. Montrer que g possède une fonction réciproque f, strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $x - \ln x \leqslant f(x) \leqslant x \ \forall x \in \mathcal{D}_f$. En déduire que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{+\infty}{\rightarrow} 1$.
3. On considère la fonction $h(x) = f(x) - (x - \ln x)$.
   Montrer que $\dfrac{h(x)}{x} \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$ puis que $h(x) = -\ln(1 + \dfrac{h(x)}{x} - \dfrac{\ln x}{x})$.
   En déduire la limite de h en $+\infty$ puis l'asymptote de h en $+\infty$
4. Tracer les courbes de f et g.

Exercice 5.3
Etudier la fonction $f(t) = \dfrac{t}{1 - e^{-t}}$ et montrer qu'elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle à déterminer

6 Développements limités

Exercice 6.1
Déterminer les asymptotes (ainsi que leurs positions) en $+\infty$ et $-\infty$ de
$f(x) = x(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2})$

Exercice 6.2
Calulcer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{(\sin(x))^{\mathrm{sh}(x)} - (\mathrm{sh}(x))^{\sin(x)}}{(\tan(x))^{th(x)} - ((th(x))^{\tan(x)}}$

7 Groupes, anneaux, corps.

Exercice 7.1
Montrer que $\mathbb{R}$ munit des lois $x \oplus y = x + y - 1$ et $x \otimes y = x + y - xy$ est un anneau. Est-il commutatif ? $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ est-il un corps ?

Exercice 7.2
Les ensembles suivants sont-ils des groupes ? Si oui, sont-ils commutatifs ?

1. $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax + b \end{array} \right\}$
2. $\mathbb{R}^2$ muni de la loi $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + 2x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$
3. $]-1, 1[$ muni de la loi $x \oplus y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$

Exercice 7.3
Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}i) = \{a + b\sqrt{3}i,\ a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. Montrer que K est un corps.
2. Pour tout $x = a + b\sqrt{3}i \in K$, on pose $N(a + b\sqrt{3}i) = a^2 + 3b^2$.
   Montrer que N est un morphisme du groupe $(K, \times)$ dans $(\mathbb{R}_+^\times, \times)$.
3. Soit $A = \mathbb{Z}(\sqrt{3}i) = \{a + b\sqrt{3}i,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   (a) Montrer A est un anneau. Est-ce un corps ?
   (b) Montrer que $(x \in A$ et $x^{-1} \in A) \Leftrightarrow N(x) = \pm 1$.
   (c) Déterminer les éléments inversibles de A.

8 Polynômes

Exercice 8.1
Quelle est la multiplicité de a dans $P(X) = (X-a)^n - X^n - a^n$

Exercice 8.2
Factoriser $(X+1)^n - e^{2i\alpha}(X-1)^n$ dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$

Exercice 8.3
Déterminer les polynômes P tels que le reste de la division de P par

- $(X+1)^3$ soit -5
- $(X-1)^3$ soit 11

Exercice 8.4
Montrer que $\forall m, n, p, q \geq 0$ $X^3 + X^2 + X + 1 \mid X^{4m+3} + X^{4n+2} + X^{4p+1} + X^{4q}$

Exercice 8.5
Soit P un polynôme de la forme $P(X) = X^3 + pX + q$ où $p, q \in \mathbb{R}$

1. Montrer que P possède une racine double ssi $4p^3 + 27q^2 = 0$
2. On suppose que P possède 3 racines réelles distinctes.
   (a) Montrer que $4p^3 + 27q^2 < 0$.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 8.6
On veut déterminer tous les polynômes P tels que

$$P(X^2) = P(X)P(X-1). \tag{E}$$

1. Justifier que si z est racine de P alors z^2 et $(1+z)^2$ est racine de P.
2. On supose que z est une racine de P distincte de 0.
   Montrer que $|z| = 1$. (on pourra étudier la suite $z_{n+1} = z_n^2$ avec $z_0 = z$.
3. Montrer que $|z - j| = 1$ si $z \neq j$ et $\left|z - j^2\right| = 1$ si $z \neq j^2$.
4. Déterminer les racines possibles de P
5. En déduire tous les polynômes solutions de (E)

Exercice 8.7
Déterminer tous les polynômes complexes P tels que $P(1-2X) = P(X)$

Exercice 8.8
Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $3X^4 - 19X^3 + 9X^2 - 19X + 6$

Exercice 8.9
1. Montrer que $(X^5 - 1, X^2 + X + 1) = 1$
2. Déterminer explicitement une relation de Bezout entre $X^5 - 1$ et $X^2 + X + 1$

Exercice 8.10
Montrer que $\forall n \geq 0$, $(X-2)(X-3) \mid (X-2)^n + (X-3)^n - 1$

Exercice 8.11
$P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$
Calculer (P, P'). En déduire la factorisation de P.

Exercice 8.12
On pose $P(z) = (z+1)^n - \exp(2ina)$ où a est un nombre réel.

1. Factoriser P
2. En déduire que $1 - \exp(2ina) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} z_k$ puis que $\prod_{k=0}^{n-1} \sin(a + \frac{k\pi}{n}) = \frac{\sin(na)}{2^n} - 1$.
3. Calculer $\prod_{k=0}^{14} \cos(\frac{k\pi}{15})$

Exercice 8.13
Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(n)$ soit un nombre premier pour tout entier n.
(indication : on pourra considérer $P(n + P(n))$ et remercier Taylor)

Exercice 8.14
Soit $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. On suppose que tous les a_i sont des entiers.

1. Montrer que si p a une racine rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ alors α divise a_0 et β divise a_n.
2. On considère le nombre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. En calculant son carré, montrer que ce carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire, à l'aide du résultat précédent qu'il n'est pas rationnel

9 Fractions rationnelles

Exercice 9.1
Décomposer $\dfrac{X^3}{(X^4-1)^2}$ dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$

Exercice 9.2

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\deg Q = n$, admettant n racines réelles distinctes $x_1, .., x_n$ et $\deg P < n$
   Montrer que $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{P(x_k)}{Q'(x_k)(x-x_k)}$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg P = n$, admettant n racines réelles distinctes $x_1, .., x_n$
   (a) Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i P'(x_i)} = -\dfrac{1}{P(0)}$
   (b) Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{P'(x_k)} = 0$

10 Arithmétique

Exercice 10.1
Montrer que $2^n - 1 \mid 2^{nm} - 1$. En déduire que $2^n - 1$ premier $\Rightarrow n$ est premier.

Exercice 10.2
Pour tout entier n, on pose $F_n = 2^n + 1$.

1. Montrer que n est impair alors F_n n'est pas un nombre premier.
2. On suppose que n est de la forme $2^q(2k+1)$ avec $k \geq 1$. Montrer que F_n n'est pas un nombre premier.
3. En déduire que si F_n est nombre premier, alors n est une puissance de 2.

Exercice 10.3
Montrer que $\forall n \geq 1$,

1. $3 \mid 2^{2n+1} + 1$
2. $2^{2q} + 1 \mid 2^{2^{2q}(2n+1)} + 1 \ \forall q \geq 0$

Exercice 10.4
Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\forall k \in \{1, .., p-1\} \ p \mid C_p^k$
2. Montrer que $\forall n \geq 0 \ p \mid n^p - n$ puis que $p \mid n^{p-1} - 1$

Exercice 10.5
Déterminer les solutions entières (x, y) de $323x - 391y = 612$

Exercice 10.6
Soit n et m deux nombres premiers entre eux.
On note (E) l'équation $nx + my = nm - 1$

1. Déterminer la forme générale des solutions entières de (E)
2. Montrer que (E) ne possède pas de solutions entières positives.

Exercice 10.7
1. Soient n, m, q, r quatre nombres entiers positifs. tel que $n = qm + r$.
   Montrer que $(a^n - 1, a^m - 1) = (a^m - 1, a^r - 1)$ où $(,)$ désigne le pgcd
2. Montrer que $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(n,m)} - 1$

11 Nombres complexes.

Exercice 11.1
Soit $u \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\dfrac{z - u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |u| = 1$

Exercice 11.2
Résoudre l'équation $(\dfrac{1+iz}{1-iz})^n = \dfrac{1+ia}{1-ia}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

Exercice 11.3
Résoudre l'équation $\sin(4x) - \sqrt{3}\sin(3x) + 2\sin(2x) = 0$

Exercice 11.4
On considère l'équation $(E) : z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

1. Résoudre cette équation en posant $Z = z + \dfrac{1}{z}$
2. Montrer que les racines $5^{ème}$ (sauf 1) sont solutions de (E). En déduire la valeur de $\cos(\dfrac{2\pi}{5})$

Exercice 11.5
1. Résoudre l'équation $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.
2. Montrer que $e^{ia} + e^{ib} = 2\cos(\dfrac{a-b}{2})e^{i(\dfrac{a+b}{2})}$ et $e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin(\dfrac{a-b}{2})e^{i(\dfrac{a+b}{2})}$.
3. Retrouver ainsi des formules trigonométriques remarquables.
4. Résoudre l'équation $1 + (\dfrac{i-z}{i+z}) + (\dfrac{i-z}{i+z})^2 + (\dfrac{i-z}{i+z})^3 + (\dfrac{i-z}{i+z})^4 = 0$.

Exercice 11.6
1. Montrer que $\forall n \geq 0$, il existe un polynôme P_n de degré n tel que $P_n(X + \dfrac{1}{X}) = X^n + \dfrac{1}{X^n}$
2. En déduire $\cos(3x)$ et $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\dfrac{2\pi}{3})$ et $\cos(\dfrac{2\pi}{5})$

Exercice 11.7
Soient $z_1, .., z_n$ n nombres complexes

1. Montrer que $\mid \sum\limits_{k=0}^{n} z_k \mid \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \mid z_k \mid$
2. A quelle condtion a-t-on l'égalité (on traitera pour commencer le cas $n = 2$) ?

Exercice 11.8
On pose $\zeta = \exp(\dfrac{2\pi i}{n})$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \left|\zeta^k - 1\right|$

Exercice 11.9
Donner une CNS sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n$ soit un nombre entier positif.

Exercice 11.10
Soient $\Pi = \{z \in \mathbb{C}$ tel que $Im(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C}$ tel que $\mid z \mid < 1\}$.

1. Montrer que $\forall z \in \Pi$, $\dfrac{z-i}{z+i} \in D$.
2. Montrer que l'application $f : \begin{array}{c} \Pi \to D \\ z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$ est une bijection puis calculer sa réciproque.

Exercice 11.11
Simplifier l'expression $\dfrac{\cos(6x) + 6\cos(4x) + 15\cos(2x) + 10}{\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos(x)}$

Exercice 11.12
Résoudre l'équation $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = 0$

Exercice 11.13

1. Soit z un nombre complexe différent de 1, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $\sum\limits_{k=1}^{n} ki^{k-1} = \dfrac{i - ni^n - (n+1)i^{(n+1)}}{2}$
3. En déduire les sommes
   $S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^p(2p+1)$ et $S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + (-1)^{(p+1)}2p$.

12 Suites

Exercice 12.1
Soient u et v deux suites telles que $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n + 2n \\ v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n + 1 \end{cases}$
On introduit les deux suites t et s définies par $t_n = u_n + v_n$ et $s_n = u_n - v_n$.

1. Exprimer une relation de récurrence satisfaite par t et s.
2. Calculer de deux façons différentes $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k)$. En déduire t_n en fonction de n et de t_0.
3. Montrer que la relation de récurrence vérifiée par s est satisfaite pour une suite de la forme $an + b$.
4. Etudier la suite $s_n - (an + b)$ où a et b ont été déterminer par la question précédente. En déduire s_n.
5. Expliciter u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Exercice 12.2
On considère la suite $v_n = \prod\limits_{k=1}^{n-1}(\frac{k^3 + 3k^2 + 2k + 2}{k^3 + 3k^2 + 2k})$

1. Etudier la monotonie de v.
2. Montrer que $\forall x \in [0, 1]$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.
3. Décomposer en éléments simples $\frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 2}{x^3 + 3x^2 + 2x}$.
4. Montrer que la suite v est bornée. Conclusion

Exercice 12.3
Soit u une suite définie par $u_{n+1} = 2\sqrt[3]{u_n}$ avec $u_0 > 0$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $u_n > 0$.
2. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite (indication : on pourra s'aider la suite $v_n = \ln u_n$)

Exercice 12.4
Etudier la suite $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$

Exercice 12.5
On pose $u_n = (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \ln(n)$ et $v_n = (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \frac{1}{n} - \ln(n)$.

1. Etudier les suites u et v.
2. En déduire un encadrement de $(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k})$ puis un équivalent

Exercice 12.6
Soit $\alpha \geq 2$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$

1. Montrer que la suite S converge si $\alpha = 2$ (on pourra comparer $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$)
2. Si $\alpha > 2$, que peut-on dire de la suite S ?

Exercice 12.7
Montrer que la suite $u_n = \frac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n} k!$ converge vers 1.

Exercice 12.8
1. Montrer que pour tout entier n non nul, on a $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \frac{1}{2(n+1)\sqrt{n+1}}$

2. En déduire que la suite $d_n = \frac{1}{1\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + .. + \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge

Exercice 12.9
On pose $P_n(x) = -1 + \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$.

1. Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ possède une unique solution x_n appartenant à $[0;1]$.
2. Montrer la suite x est décroissante, minorée par $\frac{1}{2}$
3. Montrer que la suite x converge vers $\frac{1}{2}$

Exercice 12.10
$u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$

1. Montrer que u et v converge vers la même limite l $(= e)$.
2. On suppose que $l \in \mathbb{Q}$. Que peut-on dire de $n!l$ lorsque n est assez grand.
3. Encadrer $n!l$ et en déduire une contradiction

Exercice 12.11
On pose $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que ces deux suites convergent.
2. Soit α un réel $\geqslant 2$. Montrer que la suite $c_n = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + ... + \frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha}$ converge

Exercice 12.12
Soit k un nombre entier non nul et $u_n = \sum\limits_{l=n+1}^{kn} \frac{1}{l}$.
Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite

Exercice 12.13
Soit $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n-1} (1 + \frac{k}{n^2})$.

1. Vérifier que $x - \frac{x^2}{2} \leq ln(1+x) \leq x \ \forall x \in [0,1]$
2. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite
3. Montrer que pour tout $\alpha \geqslant 1$, la suite $v_n = \prod\limits_{k=0}^{n} (1 + \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}})$ converge.

Exercice 12.14
1. Montrer que la suite $(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k})_n$ est convergente.
2. Montrer que la suite $(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k+1})_n$ est convergente.

Exercice 12.15
Soient a un nombre réel positif et u la suite définie par $u_{n+1} = \frac{1 + au_n}{a + u_n}$ $(u_0 \geq 0)$
Vérifier que $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ définie une suite géométrique. En déduire $\lim\limits_{+\infty} u$

Exercice 12.16
On pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
Montrer que $ln(n+1) \leq u_n \leq ln(n) + 1$
En déduire un équivalent de u_n

Exercice 12.17
Soit $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Montrer que la suite $(e^{2\pi i\alpha n})_{n\geq 0}$ n'est pas convergente

Exercice 12.18
soit $x \in \mathbb{R}$ et $u_n = \prod_{k=0}^{n} \cos(\frac{x}{2^k})$

1. Simplifier $\sin(x)u_1, \sin(x)u_2, \sin(x)u_3$. Que remarque-t-on ?
2. En déduire une forme simplifiée de u_n puis déterminer $\underset{+\infty}{lim} u$

Exercice 12.19
Soit α un nombre irrationnel. On pose $u_n = n\alpha - E(n\alpha)$.

1. Montrer que $u_n \in [0; 1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et que $u_n \neq u_m$ si $n \neq m$
2. Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n, m \in \{1, .., N+1\}$ tels que $|u_n - u_m| \leqslant \frac{1}{N}$.
   (on écrira $[0; 1]$ comme la réunion de N intervalles de longueurs $\frac{1}{N}$).
3. En déduire que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p, q \in \mathbb{Z}^{\times}$ tel que $0 < |p\alpha + q| < \varepsilon$.
4. Encadrer $x - (p\alpha + q)E(\frac{x}{p\alpha + q})$. En déduire que l'ensemble $\{n\alpha + m,\ n, m \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12.20
Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites u et v par

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \geqslant 0, u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $0 < u_n < v_n$.
2. Démontrer que $\forall n \geqslant 0$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
3. Montrer que les deux suites u et v sont convergentes.
4. Calculer de deux façons différentes la limite de $u_{n+1}v_{n+1}$. En déduire la limite de u et v.

13 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 13.1
Etudier les suites suivantes

1. $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2u_n}$ $u_0 > 0$
2. $u_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{u_n}$ (étude complète)
3. $u_{n+1} = u_n + \dfrac{a}{u_n}$ avec $a > 0$ et $u_0 \neq 0$.

Exercice 13.2
Soit f définie sur $\mathbb{R}^{\times}$ par $f(x) = x + \ln(x)$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{\times}$ sur $\mathbb{R}$
2. On pose $u_n = f^{-1}(n)$ pour $n > 0$.
   (a) Etudier la monotonie de u puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
   (b) Montrer que $n - \ln(n) \leq u_n \leq n$. En déduire un équivalent de u_n
   (c) On pose $v_n = u_n - n$. Montrer que $v_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$
   (d) Montrer que $u_n \underset{+\infty}{=} n - \ln(n) - \dfrac{\ln(n)}{n} + o(\dfrac{1}{n})$

Exercice 13.3
On considère $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que la fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ puis dresser ses variations.
2. Montrer que f' est bornée par $\dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$
3. On considère la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $x_0 = 0$.
   Montrer que la suite est bien définie et qu'elle converge.

Exercice 13.4
On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.
2. Résoudre l'inéquation $f^{-1}(x) \geqslant x$..
3. On considére la suite u définie par $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ et $u_0 \in]0, \ln 2[$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \in]0, \ln 2[$.
   (b) Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

Exercice 13.5
Etude complète de la suite $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$

Exercice 13.6
Etude complète de la suite u définie par $u_{n+1} = 2u_n + \sqrt{u_n}$ avec $u_0 > 0$.

Exercice 13.7
On considère la suite $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n})$ avec $x_0 = a$ et $a > 0$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0,\ x_n > 0$.

2. Ecrire un algorithme qui demande la valeur de a ainsi que n et qui calcule x_n.

3. On pose $v_{n+1} = \dfrac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}}$.

   (a) Montrer que la suite v satisfait une relation de récurrence que l'on explicitera.

   (b) Montrer que la suite x converge vers $\sqrt{a}$.

Exercice 13.8
Soit $a \in [0, 1[$. On considère la suite u définie par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k!}$.

1. Montrer que la suite u est majorée (indication :$\forall k \geqslant 0,\ \dfrac{a^k}{k!} \leqslant a^k$).

2. Montrer que la suite u converge.

3. Ecrire un algorithme qui calcul $\dfrac{a^k}{k!}$.

4. Ecrire un algorithme qui calcule $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k!}$.

5. On admet que la suite u converge vers e^a. Comment calculer e^x si $x \geqslant 0$? si $x \leqslant 0$?

Exercice 13.9
On considère la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{u_n^2}{2}}$ avec $u_0 \in]-1, 1[$.

1. Ecrire un algorithme qui demande la valeur de u_0 et de n et qui calcule u_n.

2. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ u_n \in [0, 1]$.

3. Etudier la monotonie de u.

4. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite

14 Ensembles

Exercice 14.1
Soit $\mathcal{R}$ une relation symétrique et réflexive sur un ensemble X. On définit une relation $\mathcal{S}$ sur X par
$x\mathcal{S}y$ ssi $\exists\ n \in \mathbb{N}$ et $z_0, .., z_n \in X$ tel que $z_0 = x$, $z_n = y$ et $\forall i \in \{0, .., n-1\}\ z_i \mathcal{R} z_{i+1}$
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur X.

Exercice 14.2

1. Combien y-a-t-il de multiples de p^α dans $\{1, .., n\}$?
2. Quelle est la puissance de p dans $n!$?

Exercice 14.3
Soient n dans $\mathbb{N}^\times$ et E un ens fini à n éléments. Déterminer le nombre de couples (X, Y) dans $\mathcal{P}(E)^2$ tq $X \subset Y$.

Exercice 14.4
Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Combien y-a-t-il de couples (A, B) de parties de E tels que
   (a) $A \cap B = \varnothing$?
   (b) $A \cup B = E$?
2. Combien y-a-t-il de triplets (A, B, C) de parties de E tels que $A \cup B \cup C = E$?

15 Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 15.1
Montrer que $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$ avec $F_1 = \text{Vect}(\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix})$ et $F_2 = \text{Vect}(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix})$

Exercice 15.2
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y + z = 0\}$

1. Montrer que F est un espace vectoriel et déterminer une famille génératrice
2. Montrer que $G = \text{Vect}((2, 1, 0))$ est un supplémentaire de F. Est-ce le seul ?
3. Déterminer la projection de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G
4. Déterminer la symétrie de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G

Exercice 15.3
Soit f l'application définie par $f : \begin{array}{c}\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2\\ (x, y, z, t) \mapsto (x + 3y - 2z - 5t, x + 2y + z - t)\end{array}$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$.
2. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 15.4
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(x, y, z) = (x + 2y, 4x - y, -2x + 2y + 3z)$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\frac{1}{3}f$ est une symétrie et la caractériser.
3. L'application f est-elle bijective ? Si oui, déterminer f^{-1}.

Exercice 15.5
On considère l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z, t) = (x - y + z + 2t, -x + 2y + 3z + t)$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer son noyau et son image
3. Montrer que $\ker f$ et $F = \text{Vect}((1, 0, 0, 1), ((0, 0, 1, 0))$
4. Déterminer le projecteur de $\mathbb{R}^4$ sur $\ker f$ parallèlement à F.

Exercice 15.6
Soient $e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $e_5 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
Posons $F = \text{Vect}\{e_1, e_2\}, G = \text{Vect}\{e_3, e_4\}, G' = \text{Vect}\{e_3, e_4, e_5\}$.

1. Montrer que $E = F \oplus G$ et $E \neq F \oplus G'$.
2. Déterminer le projecteur de $\mathbb{R}^4$ sur F parallèlement à G.

Exercice 15.7

1. Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans $\mathbb{R}^4$ par le système (e_1, e_2) où $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$?
2. Déterminer la symétrie de $\mathbb{R}^4$ sur $\text{Vect}(e_1, e_2)$ parallèlement à $\text{Vect}((1, 0, 0, 0), ((1, 1, 0, 0))$

Exercice 15.8
$E = \mathbb{R}_n[X]$

1. Montrer que $f : \begin{array}{c} E \to E \\ P \mapsto (X-1)P' - 2P \end{array}$ appartient à $\mathcal{L}(E)$

2. $f \in GL(\mathcal{L}(E))$?

Exercice 15.9
Soit $u : \begin{array}{c} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P(X) + P(X+1) \end{array}$
Déterminer $Ker\ u$, $Im\ u$, $Ker(u - 2Id)$, $Im(u - 2Id)$

Exercice 15.10
$E = \mathbb{R}_n[X]$ et si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $u(P) = X^n P(\frac{1}{X})$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.

2. Calculer u^2 puis caractériser u (on tiendra compte de la parité de n)

Exercice 15.11
$E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $\varphi_\lambda : \begin{array}{c} E \to E \\ P \mapsto XP' - \lambda P \end{array}$

1. Montrer que $\varphi_\lambda \in \mathcal{L}(E)$

2. Lorsque $n = 3$, Déterminer une CNS sur λ pour que $\varphi_\lambda \in GL(\mathcal{L}(E))$

3. Traiter le cas général

Exercice 15.12
Soit $f(x, y) = \frac{1}{3}(-x + 2y, -2x + 4y)$.
Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ puis déterminer $\ker(f - \lambda Id)$ et $\mathrm{Im}(f - \lambda Id)$ en fonction de λ

Exercice 15.13
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f^2 + f$
Montrer que $Ker(f) \oplus Ker(f^2 - f - Id) = E$

Exercice 15.14
Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\Delta : \begin{array}{c} E \to E \\ u \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n \geq 0} \end{array}$

1. Déterminer $Ker(\Delta)$, $Ker(\Delta^2)$.

2. Déterminer $Ker(\Delta^k)$ $\forall k \geq 1$

3. Déterminer toutes les suites tels que $u_{n+4} - 4u_{n+3} + 6u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0$

16 Familles génératrices, libres, bases.

Exercice 16.1
$E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel qu'il existe quatres réels a, b, c, d pour lesquels $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \ \forall x \in \mathbb{R}\}$
$V = \{f \in E$ tel que $f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E$ tel que $f'(2) = 0\}$.

1. Montrer que E, V et W sont des espaces vectoriels.
2. Déterminer des familles génératrices pour chacune de ces parties ainsi que pour $V \cap W$.
3. Montrer que $E = V + W$.

Exercice 16.2
On considère $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ ainsi que la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de E définie par

$$P_0(X) = 1, \text{ et si } k \geqslant 1, \ P_k(X) = \frac{X(X-1)(X-2)..(X-k+1)}{k!}$$

1. Montrer que, si $n = 3$, $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre de E_n.
2. Montrer que ce résultat reste vrai pour n quelconque.
3. On dit qu'une famille de polynômes $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de $E = \mathbb{R}[X]$ est échelonnée en degré si

$$\forall k \in \{0, .., n\}, \ \deg P_{k+1} > \deg P_k.$$

   Montrer que toute famille échelonnée en degré de E est libre dans E.

Exercice 16.3
Soient $a_1 < .. < a_n$ des nombres réels. Montrer que la famille $(x \to e^{a_i x}, \ 1 \leqslant i \leqslant n)$ est une famille libre.

Exercice 16.4
Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), .., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
2. Montrer que $Id_E - f \in GL(\mathcal{L}(E))$ et calculer $(Id_E - f)^{-1}$

Exercice 16.5
Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie tel que $u \circ v = 0$ et $u + v \in GL(E)$.

1. Que peut-on dire de $\operatorname{Im} v$ et $\ker u$?
2. Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = \dim E$

Exercice 16.6
Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et a_0, a_1, a_2 trois nombres réels distincts.
On définit des applications φ_i sur E par $\forall P \in E$ et $\forall i = 1, 2, 3 \quad \varphi_i(P) = P(a_i)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\varphi_i)_{i=1,2,3}$ est une base de E.
2. Montrer que $H : E \to \mathbb{R}^3$ définie par $H(P) = (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$ est un isomorphisme. Déterminer H^{-1}.
3. On considère l'application $\varphi : P \mapsto \int\limits_a^b P(t)dt$. Déterminer les constantes (α_i) tels que $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{3} a_i \varphi_i$.

Exercice 16.7
$E = \mathbb{R}_n[X]$. Considérons $P_0(X) = 1$ et $\forall k \in \{1, .., n\}$, $P_k(X) = \dfrac{X(X-1)..(X-k+1)}{k!}$

1. Montrer que la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E.
2. Soit $\Delta : \begin{array}{c} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{array}$.

(a) Calculer soigneusement $\Delta P_k, \Delta^2 P_k$ puis $\Delta^l P_k$ pour $\forall k, l \in \{0, .., n\}$

(b) En déduire $(\Delta^l P_k)(0)$

(c) En déduire que $\forall P \in E$, $P = \sum\limits_{k=0}^{n} (\Delta^l P_k)(0) P_k$

(d) Déterminer la base duale de $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$

Exercice 16.8
Soit E un ev de dimension n.
Un endomorphisme f de E est dit cyclique s'il existe $x_0 \in E$ tel que
la famille $(x_0, f(x_0), .., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

1. Montrer que si $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$ alors f est cyclique

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique. Montrer qu'il existe des nombres réels $(a_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ tel que $f^n + \sum\limits_{0 \leq k \leq n-1} a_k f^k = 0$

17 Calcul matriciel

Exercice 17.1
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $(A - 6I_3)\left(A^2 - 3I_3\right) = 0_3$
2. Montrer que $\forall n \geq 0$, $\exists P_n \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $A^n = P_n(A)$

Exercice 17.2
Calculer A^n lorsque

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix}_p$

Exercice 17.3
Soient u, v, w les suites définies par $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}$
$v_{n+1} = 3v_n + 2w_n$ et $w_{n+1} = v_n + 2w_n$.
On suppose que $u_0 \geq 0$, $v_0 = u_0$ et $w_0 = 1$

1. Montrer que $\forall n \geq 0$, $u_n = \dfrac{v_n}{w_n}$
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ puis $\forall n \geq 0$, $\begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$
   (b) Montrer que $A = PDP^{-1}$ puis que $\forall n \geq 0$, $A^n = PD^nP^{-1}$
   (c) En déduire v_n, w_n puis $\underset{n \to +\infty}{lim} u_n$

Exercice 17.4
Calculer A^n lorsque n est un entier positif et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 17.5
Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A - 6I_3)\left(A^2 - 3I_3\right) = 0_3$.
2. Déterminer une matrice B telle que $AB = BA = I_3$
3. Calculer A^n

Exercice 17.6
Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $(\varphi(P))(X) = P(X+1)$

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$
2. A l'aide de φ^{-1}, déterminer A^{-1}
3. Application.
   On veut dénombrer l'ensembles des surjections de $\{1, .., n\}$ dans $\{1, .., p\}$ (avec $n \geq p$)
   On note
   · $F_{n,p}$ l'ensemble des applications de $\{1, .., n\}$ dans $\{1, .., p\}$
   · $S_{n,p}$ l'ensembles des surjections de $\{1, .., n\}$ dans $\{1, .., p\}$
   · $F(n,p) = card(F_{n,p})$ et $S(n,p) = card(S_{n,p})$

(a) Calculer $F(n,p)$.

(b) Montrer que $F(n,p) = \sum_{k=1}^{p} C_p^k S(n,k)$.

(c) Vérifier que $\begin{pmatrix} F(n,n) \\ F(n,n-1) \\ \vdots \\ F(n,1) \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} S(n,n) \\ \vdots \\ S(n,2) \\ S(n,1) \\ 0 \end{pmatrix}$. En déduire $S(n,p)$

Exercice 17.7
On pose $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Pour quelle valeurs de λ, $A - \lambda I_3 \in GL_3(\mathbb{R})$?
2. Montrer que $Ker(A - I_3)$ est de dimension 2 et $Ker(A + 3I_3)$ est de dimension 1
3. Soit (e_1, e_2) une base de $Ker(A - I_3)$ et (e_3) une base de $Ker(A + 3I_3)$.
   (a) Montrer que $P = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$
   (b) Calculer $P^{-1}AP$. En déduire A^n

Exercice 17.8
On pose $\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

1. Pour quelles valeurs de λ, $A - \lambda I_3 \in GL_3(\mathbb{R})$?
2. Déterminer selon λ, $Ker(A - \lambda I_3)$ et $Im(A - \lambda I_3)$.

Exercice 17.9
Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C(A)$ l'ensemble des matrices M de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $MA = AM$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
2. On suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.
   (a) Expliciter $C(A)$.
   (b) On considère l'équation $(E) : X^2 = A$. Montrer que $X \in C(A)$ et déterminer l'ensemble des solutions de (E).
   (c) Combien y-a-t-il de solutions ? Est-ce normal ?
3. Refaire les questions précédentes avec $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

18 Intégration

Exercice 18.1
Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2+x^4}$

Exercice 18.2

1. Déterminer une primitive de $\dfrac{1}{1+\sin t}$
2. Déterminer une primitive de $\dfrac{1}{1+\cos t+\sin t}$

Exercice 18.3
Déterminer une primitive de $\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)(t+2)^2}$

Exercice 18.4
Calculer $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{1+\cos(x)\cos(\theta)}$ $(-\pi < \theta < \pi)$

Exercice 18.5
Soit $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x\sin(x)\cos(x)dx}{\tan^2 x+\text{cotan}^2\, x}$

1. A l'aide du changement de variable $x \leftarrow \dfrac{\pi}{2} - x$, montrer que $I = \dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(x)\cos(x)dx}{\tan^2 x+\text{cotan}^2\, x}$
2. En déduire I

Exercice 18.6
Calculer les primitives suivantes
a. $\int \dfrac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ b. $\int \dfrac{x-1}{x+1}\sqrt{2x-x^2}$ c. $\int \dfrac{\sqrt{x+1}}{x\sqrt{1-x}}dx$

Exercice 18.7
Calculer $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} (1+\dfrac{1}{x^2})\arctan(x)dx$

Exercice 18.8
Déterminer $\underset{+\infty}{lim} n^{-4} \prod\limits_{k=1}^{2n} (n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 18.9
On pose $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1+\sin(x)\cos(x)}}dx$ et $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)\cos(x)}}dx$

1. Calculer $I+J$
2. Montrer que $I = J$ (utiliser le changement de variable $x \leftarrow \dfrac{\pi}{2} - x$)
3. En déduire I et J

Exercice 18.10
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\int\limits_0^1 f = \dfrac{1}{2}$.
Montrer que f possède un point fixe sur $[0,1]$.

Exercice 18.11
Soit $a \in]-1,1]$ et n un entier. On pose $I_n = \int\limits_0^a \dfrac{x^n}{1+x}dx$

1. Calculer $\underset{n\to+\infty}{lim} I_n$.

2. Calculer de deux façons différentes $\int\limits_0^a \sum\limits_{k=0}^n (-1)^k x^k$.

3. En passant à la limite, quelle égalité remarquable obtient-on ?

Exercice 18.12
Soit f une fonction continue et strictement monotone de $[0, a]$ dans $[0, b]$ (avec $f(0) = 0$ et $f(a) = b$)

1. Montrer que $ab = \int\limits_0^a f + \int\limits_0^b f^{-1}$

2. Montrer que $\forall u \in [0, a]$ et $\forall v \in [0, b]$, $uv \leq \int\limits_0^u f + \int\limits_0^v f^{-1}$

Exercice 18.13
Soit f une fonction C^0 sur $[0, 1]$. On pose $I_n(f) = \int\limits_0^1 t^{n-1} f(t)dt$ pour $n \geq 1$

1. (a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(f)$ en fonction de f lorsque f est un polynôme.

   (b) Montrer que ceci reste vrai pour une f une fonction quelconque C^0 sur $[0, 1]$

2. On suppose $f(1) = 0$ et f C^1 sur $[0, 1]$

   (a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n(f)$ en fonction de f lorsque f est un polynôme.

   (b) Montrer que ceci reste vrai pour une f une fonction quelconque C^1 sur $[0, 1]$

19 Equations différentielles

Exercice 19.1
On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' - 2y = x$

1. Soit y une solution de (E).
   (a) Montrer que $z(t) = y(e^t)$ est solution d'une certaine équation différentielle
   (b) En déduire y sur $\mathbb{R}_+^\times$
2. Déterminer y sur $\mathbb{R}_-^\times$ (on posera $z(t) = y(-e^t)$)
3. Existe-t-il des solutions de (E) de classe C^2 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 19.2
Résoudre $xy' - 2y = x^4$

Exercice 19.3
Résoudre $x(x^2 + 1)y' = y$