GEOMETRIE PLANE

Abdellah BECHATA

On considère $A\left|\begin{array}{c}-1\\-3\end{array}\right.$, $B\left|\begin{array}{c}2\\-2\end{array}\right.$ et $C\left|\begin{array}{c}0\\4\end{array}\right.$.

1. Donner une équation de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par A et B.
   solution
2. Donner une équation de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par C et orthogonale à $\mathcal{D}_1$ ainsi qu'une équation de la droite $\mathcal{D}_3$ passant par C et parallèle à $\mathcal{D}_1$. solution

Soit f l'application du plan dans lui-même qui au point $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$ associe le point $M' \left| \begin{array}{l} 10x + 4y - 3 \\ -8x - 2y + 1 \end{array} \right.$.

1. Démontrer qu'il existe un unique point Ω (dont on déterminera les coordonnées) tel que $f(\Omega) = \Omega$. solution
2. On pose $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.
   Montrer que les droites passant par Ω et dirigées respectivement par $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ sont invariantes par f. solution

On considère les points $A\left|\begin{array}{l}6\\3\end{array}\right.$, $B\left|\begin{array}{l}1\\2\end{array}\right.$ et $C\left|\begin{array}{l}4\\2\end{array}\right.$.

Déterminer une équation de la hauteur issue de C dans le triangle (ABC) ainsi que les coordonnées de l'orthocentre de (ABC).

solution

On considère le triangle (ABC) pour lequel les droites (AB), (AC) et (BC) ont pour équations respectives $2x + y = 3$, $x + y = 2$ et $3x + 2y = 4$.
Déterminer les coordonnées des sommets de ce triangle, une équation de chaque médiane et vérifier que les médianes sont concourantes. Calculer l'aire du triangle (ABC). solution

On fixe un vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, un point A et un réel k.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{AM} \right\rangle = k$. solution
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right) = k$. solution

On considère le point $M \left| \begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array} \right.$ ainsi que les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ d'équations respectives $3x + y - 5 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ et $4x - y - 9 = 0$.

Déterminer la distance de M à chacune de ces droites puis l'aire du triangle délimité par ces trois droites. ▸ solution

Soient $A \left| \begin{array}{l} 6 \\ 4 \end{array} \right.$ et $\mathcal{D}$ d'équation $2x - y - 3 = 0$.
Déterminer la distance de A à $\mathcal{D}$ ainsi que les coordonnées du projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. ▸ solution

On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega \left| \begin{array}{c} -2 \\ 1 \end{array} \right.$ et de rayon 5.

Montrer que le point $A \left| \begin{array}{c} 1 \\ 5 \end{array} \right.$ est sur ce cercle et déterminer une équation cartésienne de la tangente au cercle en ce point. solution

Déterminer le centre et le rayon des cercles d'équations respectives $x^2 + y^2 - 100 = 0$ et $x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0$.
Montrer que ces deux cercles sont tangents. solution

Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$. Ce cercle passe par O et coupe l'axe des abscisses en A, l'axe des ordonnées en B et la droite d'équation $y = x$ en D. On note $\mathcal{C}_1$ le cercle de diamètre $[OA]$, $\mathcal{C}_2$ de diamètre $[OB]$ et $\mathcal{C}_3$ le cercle de diamètre $[OD]$. Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en O et en un deuxième point I. Les cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ se coupent en O et un deuxième point J et les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$ se coupent en O et en un deuxième point K.

1. Déterminer les coordonnées des points A, B et D. solution
2. Déterminer des équations des cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$. solution
3. Déterminer les coordonnées des points I, J et K. solution
4. Vérifier que I, J et K sont alignés. solution

On considère le cercle de centre O et de rayon 1 et le cercle de centre $\Omega \left| \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right.$ et de rayon $R > 0$.

1. Déterminer une équation de chacun de ces cercles ainsi qu'une équation de leur axe radical Δ. ▸ solution
2. Calculer la distance de O à Δ et montrer qu'il existe deux valeurs de R pour lesquelles ces cercles sont tangents. ▸ solution
3. Déterminer alors les points d'intersection et vérifier qu'ils sont alignés avec les centres des cercles. ▸ solution

On considère le triangle (ABC) de sommets $A \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right.$, $B \left| \begin{array}{l} 10 \\ 13 \end{array} \right.$ et $C \left| \begin{array}{l} 13 \\ 6 \end{array} \right.$.

1. Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit ainsi que son rayon. solution
2. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle. solution
3. Déterminer (et interpréter géométriquement) le lieu des points $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$ vérifiant $d(M,(AB)) = d(M,(AC))$. solution

Soient $A\left|\begin{array}{l}1\\-2\end{array}\right.$ et $\mathcal{D}$ d'équation $3x+4y-1=0$.

1. Calculer la distance de A à $\mathcal{D}$. ▸ solution
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{D}$. ▸ solution
3. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. ▸ solution

Soit $t \in \mathbb{R}$, on pose $M_t \left| \begin{array}{l} \cos(t) \\ \sin(t) \end{array} \right.$ et $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, 1)$ (cercle de centre O et de rayon 1).

1. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}_t$ à $\mathcal{C}$ en M_t. solution
2. On fixe un point $P \left| \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right.$ distinct de O. Déterminer les coordonnées de $P_t \left| \begin{array}{l} x_t \\ y_t \end{array} \right.$ le projeté orthogonal de P sur $\mathcal{T}_t$.
   solution

Soit $t \in \mathbb{R}^{\times}$, on considère le vecteur $\overrightarrow{u_t}\left|\begin{array}{c} t^2 \\ -1 \end{array}\right.$ ainsi que le point $M_t\left|\begin{array}{c} t \\ 1/t \end{array}\right.$.

1. Déterminer l'équation de la droite $\mathcal{T}_t$ passant par M_t et dirigée par $\overrightarrow{u_t}$. ▸ solution
2. Déterminer l'équation de la droite $\mathcal{D}_t$ perpendiculaire à la droite $\mathcal{T}_t$ et passant par le point O. ▸ solution
3. Donner les coordonnées du projeté orthogonal P_t de O sur $\mathcal{T}_t$. ▸ solution

Soient A et B deux points distincts du plan et k un réel strictement positif.

Etudier le lieu des points M tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$. solution

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles. Soient $M \in \mathcal{C}$ et $M' \in \mathcal{C}'$ tels que la tangente à $\mathcal{C}$ en M et la tangente à $\mathcal{C}'$ en M' soient orthogonales et soit I le milieu de $[MM']$.
Décrire le lieu des points I obtenus de cette façon. solution

Soit (ABC) un triangle du plan, A', B' et C' les milieux des cotés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, G le centre de gravité du triangle (ABC).
Pour M point du plan, on définit les points P, Q, R symétriques de M par rapport à (respectivement) A', B', C'.
Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) ont un point commun que l'on précisera. solution

1. $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in \mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ y+3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$
$x - 3y - 8 = 0.$ retour à l'exercice

2. $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} x \\ y-4 \end{array} \right. . \left| \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right. = 0 \Leftrightarrow$
$3x + y - 4 = 0.$
$M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in \mathcal{D}_3 \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 3 \\ y-4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$
$x - 3y + 12 = 0.$ retour à l'exercice

1. $\Omega \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$ alors

$$\begin{aligned} f(\Omega) &= \Omega \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 10x + 4y - 3 \\ -8x - 2y + 1 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 10x + 4y - 3 = x \\ -8x - 2y + 1 = y \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 9x + 4y = 3 \\ -8x - 3y = -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x = -1 \\ y = 3 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

retour à l'exercice

2. On note $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$) la droite passant par Ω et de vecteur directeur $\overrightarrow{I}$ (resp. $\overrightarrow{J}$).
Soit

$$\begin{aligned} M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \quad \in \quad & \mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{I}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ y-3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -2x - y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Montrons que $f(M) \in \mathcal{D}_1$.

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{\Omega f(M)}, \overrightarrow{I}\right) &= \begin{vmatrix} (10x+4y-3)+1 & 1 \\ (-8x-2y+1)-3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -12x - 6y + 6 \\ &= 6(-2x - y + 1) = 0 \Rightarrow f(M) \in \mathcal{D}_1 \end{aligned}$$

Soit

$$M\left|\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. \quad \in \quad \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{J}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ y-3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -x-y+2=0.$$

Montrons que $f(M) \in \mathcal{D}_2$.

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{\Omega f(M)}, \overrightarrow{J}\right) &= \begin{vmatrix} (10x+4y-3)+1 & 1 \\ (-8x-2y+1)-3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -2x-2y+4 \\ &= 2(-x-y+2)=0 \Rightarrow f(M) \in \mathcal{D}_2 \end{aligned}$$

retour à l'exercice

Equation de la hauteur $\mathcal{D}_C$ issue de C.

$$M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in \mathcal{D}_C \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x-4 \\ y-2 \end{array} \right. . \left| \begin{array}{l} -5 \\ -1 \end{array} \right. = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x + y - 22 = 0.$$

Soit H l'orthocentre de (ABC), i.e. l'intersection des trois hauteurs issues de A, B et C. On détermine ses coordonnées en remarquant que c'est aussi l'intersection de la hauteur $\mathcal{D}_C$ issue de C et de la hauteur $\mathcal{D}_B$ issue de B

$$M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in \mathcal{D}_B \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x-1 \\ y-2 \end{array} \right. . \left| \begin{array}{l} -2 \\ -1 \end{array} \right. = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$$

$$H \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in \mathcal{D}_C \cap \mathcal{D}_B \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x + y - 22 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow H \left| \begin{array}{c} 6 \\ -8 \end{array} \right.$$

retour à l'exercice

Il suffit pour cela de déterminer les intersections deux à deux des droites $(AB), (AC)$ et (BC)

$$A\left|\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. \in (AB)\cap(AC) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x+y=3 \\ x+y=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow A\left|\begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}\right.$$

$$B\left|\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. \in (AB)\cap(BC) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x+y=3 \\ 3x+2y=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow B\left|\begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array}\right.$$

$$C\left|\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. \in (AC)\cap(BC) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y=2 \\ 3x+2y=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow C\left|\begin{array}{l} 0 \\ 2 \end{array}\right.$$

Si l'on note I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$, on a $I \left| \begin{array}{c} 3/2 \\ 0 \end{array} \right.$, $J \left| \begin{array}{c} 1/2 \\ 3/2 \end{array} \right.$, $K \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1/2 \end{array} \right.$

$$M \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \in (AK) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AK}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ y-1 & 1/2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$M \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \in (BJ) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BJ}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 3/2 \\ y+1 & -5/2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -5x - 3y + 7 = 0$$

$$M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in (CI) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CI}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -3/2 \\ y-2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 6 = 0$$

L'aire du triangle (ABC) vaut

$$\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}$$

retour à l'exercice

1. Si $\overrightarrow{u} = 0$ alors les deux ensembles sont vides sauf si $k = 0$. Dans ce cas, chacun de ces ensembles coïncident avec le plan. Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, on note $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{G}$) le premier ensemble (resp. le second).
Soit M_0 un point du plan tel que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM_0} = k$ (il suffit de considérer le point M_0 tel que $\overrightarrow{AM_0} = \dfrac{k\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}$ puisque l'on a

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM_0} = \overrightarrow{u}.\frac{k\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2} = \frac{k}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \frac{k}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\|\overrightarrow{u}\|^2 = k$$

.On a alors

$$\begin{aligned} M \quad \in \quad & \mathcal{H} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} = k = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM_0} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM_0} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{AM} - .\overrightarrow{AM_0}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{M_0M} = 0 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{H}$ est la droite passant par M_0 et de direction orthogonale à $\overrightarrow{u}$. retour à l'exercice

2. Soit M_1 un point du plan tel que $\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM_1}\right) = k$ (il suffit de considérer le point M_1 tel que $\overrightarrow{AM_1} = \dfrac{k\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}$ où $\overrightarrow{v}\left|\begin{matrix} -b \\ a \end{matrix}\right.$ si $\overrightarrow{u}\left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right.$ puisque l'on a

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM_1}\right) &= \det\left(\overrightarrow{u}, \frac{k\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\right) = \frac{k}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \\
&= \frac{k}{a^2+b^2}\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = \frac{k}{a^2+b^2}(a^2+b^2) = k.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right) = k = \det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM_1}\right) \\ \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right) - \det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM_1}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM} - .\overrightarrow{AM_1}\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{M_1M}\right) = 0 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{G}$ est la droite passant par M_1 et de direction $\overrightarrow{u}$.

retour à l'exercice

Comme on connait les équations des trois droites, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
d(M,\mathcal{D}_1) &= \frac{|3\times(-1)+2-5|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}},\\
d(M,\mathcal{D}_2) &= \frac{|(-1)-2\times 2+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}},\\
d(M,\mathcal{D}_3) &= \frac{|4\times(-1)-2-9|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}} = \frac{15}{\sqrt{17}}
\end{aligned}
$$

On détermine les sommets comme étant intersection des droites deux à deux

$$A \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - 5 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow A \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right.$$

$$B \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - 5 = 0 \\ 4x - y - 9 = 0. \end{array} \right. \Leftrightarrow B \left| \begin{array}{r} 2 \\ -1 \end{array} \right.$$

$$C \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 3 = 0 \\ 4x - y - 9 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow C \left| \begin{array}{l} 3 \\ 3 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \left| \det \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{array} \right| = \frac{7}{2}$$

◂ retour à l'exercice

Comme on connait l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$, on peut écrire

$$d(A,\mathcal{D}) = \frac{|2\times 6-4-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}.$$

Soit $H\left|\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right.$ le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. Le vecteur $\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{r} 2 \\ -1 \end{array}\right.$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

$$\left\{\begin{array}{c} H\in\mathcal{D} \\ \det\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{n}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x-y-3 \\ \begin{vmatrix} x-6 & 2 \\ y-4 & -1 \end{vmatrix}=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x-y-3 \\ x+2y-14=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow H\left|\begin{array}{l} 4 \\ 5 \end{array}\right.$$

retour à l'exercice

On a $\Omega A^2 = (1+2)^2 + (5-1)^2 = 25 = 5^2$ donc $\Omega \in \mathcal{C}$. La tangente $\mathcal{T}_A$ à $\mathcal{C}$ en A est la droite passant par A et orthogonale à $\overrightarrow{\Omega A}$ donc

$$\begin{aligned} M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in \mathcal{T}_A \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{\Omega A} = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x-1 \\ y-5 \end{array} \right. . \left| \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \right. = 0 \\ \Leftrightarrow 3x + 4y - 23 = 0 \end{aligned}$$

retour à l'exercice

Il est immédiat que le premier cercle $\mathcal{C}$ est de centre $O \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$ et de rayon 10. Pour le second, il s'agit du cercle $\mathcal{C}'$ de centre $\Omega \left| \begin{array}{l} 12 \\ 9 \end{array} \right.$ et de rayon 5 puisqu'on a

$$x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0 \Leftrightarrow (x-12)^2 - 144 + (y-9)^2$$
$$-81 + 200 = 0 \Leftrightarrow (x-12)^2 + (y-9)^2 = 25 = 5^2$$

Etant donné que $O\Omega = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 = 10 + 5$, on en déduit que les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ s'intersectent en un point donc ils sont tangents en ce point (on peut même affirmer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents extérieurement). ◂ retour à l'exercice

1. On trouve $A\left|\begin{array}{l}2\\0\end{array}\right.$, $B\left|\begin{array}{l}0\\4\end{array}\right.$ et $D\left|\begin{array}{l}3\\3\end{array}\right.$. retour à l'exercice

2. Les équations respectives des cercles sont :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &: x^2+y^2-2x=0,\\ \mathcal{C}_2 &: x^2+y^2-4y=0,\\ \mathcal{C}_3 &: x^2+y^2-3x-3y=0\end{aligned}$$

retour à l'exercice

3. On trouve ensuite $I\left|\begin{array}{l}\frac{4}{5}\\ \frac{8}{5}\end{array}\right.$, $J\left|\begin{array}{l}\frac{6}{5}\\ \frac{18}{5}\end{array}\right.$ et $K\left|\begin{array}{l}\frac{9}{5}\\ -\frac{3}{5}\end{array}\right.$. retour à l'exercice

4. $\det\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}\right) = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires ce qui entraine que les points I, J, K sont alignés.

◂ retour à l'exercice

1. Le premier cercle a pour équation $x^2 + y^2 = 1$ et le second pour équation $(x-2)^2 + (y-3)^2 = R^2$.
   Leur axe radical est défini par l'équation

$$\begin{aligned} M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \quad \in \quad & \Delta \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = (x-2)^2 + (y-3)^2 - R^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 4x - 6y - R^2 + 13 \\ \Leftrightarrow \quad & 4x + 6y + R^2 - 14 = 0 \end{aligned}$$

retour à l'exercice

2. On a $d(O,\Delta) = \dfrac{|R^2 - 14|}{\sqrt{4^2+6^2}} = \dfrac{|R^2-14|}{2\sqrt{13}}$. Ces deux cercles sont tangents ssi

$$\left\{\begin{array}{c} O\Omega = 1+R \\ \text{ou} \\ O\Omega = |R-1| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \sqrt{13} = 1+R \\ \text{ou} \\ \sqrt{13} = |R-1| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} R = \sqrt{13}-1 \\ \text{ou} \\ R-1 = \pm\sqrt{13} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} R = \sqrt{13}-1 \\ \text{ou} \\ R = 1\pm\sqrt{13} \end{array}\right. \underset{R\geqslant 0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{c} R = \sqrt{13}-1 \\ \text{ou} \\ R = 1+\sqrt{13} \end{array}\right.$$

retour à l'exercice

3. Dans ce cas, le point d'intersection $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$ de ces deux cercles est aussi sur l'intersection d'un des deux cercles, par exemple le premier pour la simplicité des calculs, et de l'axe radical.

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{13} - 1 : M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in \mathcal{D} \cap \Delta \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 4x + 6y + (\sqrt{13} - 1)^2 - 14 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x+3y-\sqrt{13}=0 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{\sqrt{13}}{2} \\ \left(-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)^2+y^2=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 13y^2-6y\sqrt{13}+9=0 \\ x=-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{3}{\sqrt{13}} \\ x=\dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{array}\right. \Leftrightarrow M \left| \begin{array}{c} \dfrac{2}{\sqrt{13}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{13}} \end{array}\right.$$

$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{13}+1 : M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in \mathcal{D} \cap \Delta \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 4x+6y+(\sqrt{13}+1)^2-14=0 \\ x^2+y^2=1 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x+3y+\sqrt{13}=0 \\ x^2+y^2=1 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=-\dfrac{3}{2}y-\dfrac{\sqrt{13}}{2} \\ \left(-\dfrac{3}{2}y-\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)^2+y^2=1 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 13y^2 + 6y\sqrt{13} + 9 = 0 \\ x = -\dfrac{3}{2}y - \dfrac{\sqrt{13}}{2} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -\dfrac{3}{\sqrt{13}} \\ x = -\dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{array} \right. \Leftrightarrow M \left| \begin{array}{l} -\dfrac{2}{\sqrt{13}} \\ -\dfrac{3}{\sqrt{13}} \end{array} \right.$$

Alignement des points

$$R = \sqrt{13}-1 : \det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O\Omega}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{13}} & 2 \\ \dfrac{3}{\sqrt{13}} & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow M \in (O\Omega)$$

$$R = \sqrt{13}+1 : \det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O\Omega}\right) = \begin{vmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{13}} & 2 \\ -\dfrac{3}{\sqrt{13}} & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow M \in (O\Omega$$

retour à l'exercice

1. Le cercle circonscrit au triangle (ABC) a pour centre $\Omega\left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right.$ l'intersection des médiatrices du triangle (ABC). Soient $I\left|\begin{array}{c}23/2\\19/2\end{array}\right.$ et $J\left|\begin{array}{c}7\\7/2\end{array}\right.$ les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AC]$.

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{I\Omega}.\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{J\Omega}.\overrightarrow{AC}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left|\begin{array}{l}x-\dfrac{23}{2}\\y-\dfrac{19}{2}\end{array}\right..\left|\begin{array}{c}3\\-7\end{array}\right.=0\\\left|\begin{array}{l}x-7\\y-\dfrac{7}{2}\end{array}\right..\left|\begin{array}{c}12\\5\end{array}\right.=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}3x-7y+32=0\\24x+10y-203=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{367}{66}\\y=\dfrac{153}{22}\end{array}\right.\Leftrightarrow\Omega\left|\begin{array}{c}\dfrac{367}{66}\\\dfrac{153}{22}\end{array}\right.$$

retour à l'exercice

2. Pour déterminer les coordonnées de l'orthocentre $H \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$, il suffit de déterminer l'intersection de deux des trois hauteurs.

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x-1 \\ y-1 \end{array} \right. . \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ -7 \end{array} \right. = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} x-10 \\ y-13 \end{array} \right. . \left\{ \begin{array}{c} 12 \\ 5 \end{array} \right. = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3x - 7y + 4 = 0 \\ 12x + 5y - 185 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{425}{33} \\ y = \dfrac{67}{11} \end{array} \right. \Leftrightarrow H \left| \begin{array}{c} \dfrac{425}{33} \\ \dfrac{67}{11} \end{array} \right.$$

retour à l'exercice

3. Le lieu des points $M\left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$ vérifiant $d(M,(AB)) = d(M,(AC))$ est simplement l'union des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ dont les équations sont respectivement

$$\begin{aligned} d(M,(AB)) &= d(M,(AC)) \Leftrightarrow \frac{|4x-3y-1|}{5} = \frac{|5x+12y+7|}{13} \\ &\Leftrightarrow \frac{4x-3y-1}{5} = \pm \frac{5x+12y+7}{13} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 27x-99y-48=0 \\ \text{ou} \\ 77x+21y+22=0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

retour à l'exercice

1. On trouve $d(A, \mathcal{D}) = \dfrac{6}{5}$. retour à l'exercice

2. Un vecteur normal de D est le vecteur $\overrightarrow{n}\left|\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right.$ qui est donc un vecteur directeur de Δ ce qui nous donne

$$\begin{aligned} M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right. \in \Delta &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ y+2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x - 3y - 10 = 0. \end{aligned}$$

retour à l'exercice

3. Le point H, intersection de $\mathcal{D}$ et Δ, a pour coordonnées

$$H\left|\begin{matrix}\dfrac{43}{25}\\ -\dfrac{26}{25}\end{matrix}\right.$$

retour à l'exercice

1. Rappelons que la tangente à un cercle en un point A est la droite passant par ce point et perpendiculaire au rayon de ce cercle passant par A

$$M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in \mathcal{T}_t \Leftrightarrow \overrightarrow{M_t M}.\overrightarrow{OM_t} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - \cos(t))\cos(t) + (y - \sin(t))\sin(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow x\cos(t) + y\sin(t) - (\cos^2(t) + \sin^2(t)) = 0$$
$$\Leftrightarrow x\cos(t) + y\sin(t) - 1 = 0$$

retour à l'exercice

2. Soit $P_t \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$ le projeté orthogonal de P sur $\mathcal{T}_t$. En remarquant que $\overrightarrow{OM_t}$ est un vecteur normal à $\mathcal{T}_t$, on a $\overrightarrow{PP_t}$ qui doit être colinéaire à $\overrightarrow{OM_t}$ donc

$$\left\{ \begin{array}{l} P_t \in \mathcal{T}_t \\ \det\left(\overrightarrow{PP_t}, \overrightarrow{OM_t}\right) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x\cos(t) + y\sin(t) - 1 = 0 \\ \left| \begin{array}{cc} x-a & \cos(t) \\ y-b & \sin(t) \end{array} \right| = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x\cos(t) + y\sin(t) = 1 \\ (x-a)\sin(t) - (y-b)\cos(t) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x\cos(t) + y\sin(t) = 1 \\ x\sin(t) - y\cos(t) = a\sin(t) - b\cos(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = \cos(t) - b\cos(t)\sin(t) + a\sin^2 t & (1)\cos(t) + (2)\sin(t) \\ y = \sin(t) - a\cos(t)\sin(t) + b\cos^2(t) & (1)\sin(t) - (2)\cos(t) \end{array} \right.$$

retour à l'exercice

1.

$$M\left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right. \in \mathcal{T}_t \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{M_tM},\overrightarrow{u_t})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-t & t^2 \\ y-1/t & -1\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -(x-t)-t^2\left(y-\frac{1}{t}\right)=0 \Leftrightarrow x+t^2y=2t$$

◂ retour à l'exercice

2. Puisque $\mathcal{D}_t$ est perpendiculaire à la droite $\mathcal{T}_t$ dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u_t}$, on en déduit que $\overrightarrow{u_t}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_t$ donc

$$M\left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right. \in \mathcal{D}_t \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{u_t}=0 \Leftrightarrow xt^2-y=0$$

◂ retour à l'exercice

3. Donner les coordonnées du projeté orthogonal P_t de O sur $\mathcal{T}_t$.

$$\left\{\begin{array}{l} P_t \in \mathcal{T}_t \\ \overrightarrow{OP_t}, \overrightarrow{u_t} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + t^2 y = 2t \\ xt^2 - y = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x = \dfrac{2t}{1+t^4} & (1) + t^2(2) \\ y = \dfrac{2t^3}{1+t^4} & (1)t^2 - (2) \end{array}\right.$$

◂ retour à l'exercice

On a $\dfrac{MA}{MB} = k$ si et seulement si $MA = kMB$, ou encore $MA^2 - k^2MB^2 = 0$. Cette dernière égalité peut encore s'écrire

$$\left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right) = 0.$$

Notons K le barycentre de (A, B) affecté des coefficients $(1, k)$. On a alors

$$(1+k)\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}$$

et l'égalité devient

$$\left(k\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}\right).\overrightarrow{MK} = 0.$$

On distingue alors deux cas.

- **Premier cas** : Si $k = 1$, l'égalité s'écrit $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MK} = 0$ et le lieu considéré est la droite passant pas K (qui est alors le milieu du segment $[AB]$) et orthogonale à (AB). C'est la médiatrice du segment $[AB]$.
- **Second cas** : Si $k \neq 1$, on désigne par H le barycentre de (A, B) affecté des coefficients $(1, -k)$. L'égalité s'écrit alors $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MK} = 0$ et le lieu considéré est le cercle de diamètre $[HK]$.

retour à l'exercice

On considère un repère orthonormé $(O,(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}))$ tel que O soit le centre de $\mathcal{C}$ et $O' = O + a\overrightarrow{i}$ le centre de $\mathcal{C}'$. On note R et R' les rayons de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Un point M de $\mathcal{C}$ s'écrit alors $O + R\overrightarrow{u}(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et un point M' de $\mathcal{C}'$ s'écrit $O + R'\overrightarrow{u}(\theta')$ avec $\theta' \in \mathbb{R}$. La tangente à $\mathcal{C}$ en M est alors orthogonale à $\overrightarrow{u}(\theta)$ tandis que la tangente à $\mathcal{C}'$ en M' est orthogonale à $\overrightarrow{u}(\theta')$. La condition d'orthogonalité des tangentes s'écrit donc $\theta' \equiv \theta \mod [\frac{\pi}{2}]$, autrement dit on a $\overrightarrow{u}(\theta) = \pm\overrightarrow{v}(\theta)$. Le milieu I de $[MM']$ s'écrit alors :

$$I = O + \frac{1}{2}\overrightarrow{OO'} + \frac{1}{2}\left(R\overrightarrow{u}(\theta) + R'\overrightarrow{v}(\theta)\right) = \Omega + \overrightarrow{w}(\theta)$$

où Ω est le milieu de $[OO']$ et $\overrightarrow{w}(\theta) = \frac{1}{2}(R\overrightarrow{u}(\theta) + R'\overrightarrow{v}(\theta))$. Alors $\|\overrightarrow{w}(\theta)\|^2 = R^2 + R'^2$. On en déduit que I décrit le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{R^2 + R'^2}$.

retour à l'exercice

On considère un repère orthonormé $\mathcal{R}$ d'origine M. On note :

$$M \left|_{\mathcal{R}} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right. , \quad A \left|_{\mathcal{R}} \begin{matrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{matrix} \right. , \quad B \left|_{\mathcal{R}} \begin{matrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{matrix} \right. , \quad C \left|_{\mathcal{R}} \begin{matrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{matrix} \right.$$

On a alors :

$$A' \left|_{\mathcal{R}} \begin{matrix} \dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2} \\ \dfrac{\beta_2+\beta_3}{2} \end{matrix} \right. , \quad B' \left|_{\mathcal{R}} \begin{matrix} \dfrac{\alpha_1+\alpha_3}{2} \\ \dfrac{\beta_1+\beta_3}{2} \end{matrix} \right. , \quad C' \left|_{\mathcal{R}} \begin{matrix} \dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \\ \dfrac{\beta_1+\beta_2}{2} \end{matrix} \right.$$

Les points P, Q et R sont les symétriques de M, donc de l'origine du repère, par rapport à ces points. On a donc :

$$P \left|_{\mathcal{R}} \begin{matrix} \alpha_2+\alpha_3 \\ \beta_2+\beta_3 \end{matrix} \right. , \quad Q \left|_{\mathcal{R}} \begin{matrix} \alpha_1+\alpha_3 \\ \beta_1+\beta_3 \end{matrix} \right. , \quad R \left|_{\mathcal{R}} \begin{matrix} \alpha_1+\alpha_2 \\ \beta_1+\beta_2 \end{matrix} \right.$$

Notons maintenant une équation de (AP) sous la forme $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Les coordonnées des points A et P doivent vérifier cette équation donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1 & = & 0 \\ a_1(\alpha_2 + \alpha_3) + b_1(\beta_2 + \beta_3) + c_1 & = & 0 \end{array}\right.$$

En ajoutant ces deux équations, on obtient :

$$a_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + b_1(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + 2c_1 = 0$$

qui peut également s'écrire :

$$a_1\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2} + b_1\frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{2} + c_1 = 0$$

De même, si on note $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ une équation de (BQ) et $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ une équation de (CR) on trouve :

$$a_2\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{2} + b_2\frac{\beta_1+\beta_2+\beta_3}{2} + c_2 = 0$$
$$a_3\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{2} + b_3\frac{\beta_1+\beta_2+\beta_3}{2} + c_3 = 0$$

Par conséquent, le point $K \left| \begin{array}{c} \dfrac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{2} \\ \dfrac{(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}{2} \end{array} \right._{\mathcal{R}}$ est commun aux droites (AP), (BQ) et (CR). Ce point est le barycentre du système $\{(A,1),(B,1),(C,1),(M,-1)\}$. ◂ retour à l'exercice