



THE LORD OF THE MATHS

TRIGONOMETRIE

TRIGONOMETRIE

Abdellah BECHATA



Résoudre les équations suivantes :

① $\sin(x) + \sin(2x) = 0$. [▶ solution](#)

② $3 \tan(x) = 2 \cos(x)$ [▶ solution](#)

③ $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$ [▶ solution](#)

④ $\cos(2x) = \cos(3x)$ [▶ solution](#)

⑤ $\cos(2x) = \sin(3x)$ [▶ solution](#)

⑥ $\tan(x) = \tan(\pi - x)$ [▶ solution](#)

⑦ $\tan(2x) = 2 \tan(x)$ [▶ solution](#)



On considère l'équation

$$(\mathcal{E}) : \sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1.$$

- 1 Montrer que si x est une solution alors on a :

$$\begin{cases} \sqrt{\cos(x)} = \cos^2(x) \\ \text{et} \\ \sqrt{\sin(x)} = \sin(x) \end{cases}$$

► solution

- 2 Résoudre l'équation $(\mathcal{E})$. ► solution



- ❶ Compter le nombre de solutions réelles à l'équation $(\mathcal{E}) : \cos(x) = x$.

Pouvez vous donner un encadrement à la main de chacune de ces solutions ? [▶ solution](#)

- ❷ Résoudre l'équation : $(\mathcal{F}) : \sin(x) = x$. [▶ solution](#)



Donner le domaine d'étude optimal des fonctions suivantes :

① $f : x \mapsto \sin^4(x) + \cos^4(x)$. ► solution

② $g : x \mapsto \sin(3x) + \cos(2x)$ ► solution



On considère la fonction $f : x \mapsto \cos^3(x) + \sin^3(x)$.

Effectuer l'étude complète de f puis justifier qu'elle réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ sur $[-1, 1]$. [▶ solution](#)



THE LORD OF THE MATHS

EXERCICE

TRIGONOMETRIE

EXERCICE 6

Etudier la fonction $f : x \mapsto \frac{\tan(x)}{1 + 2 \cos(x)}$ ► solution



Déterminer pour quels $x \in \mathbb{R}$ les expressions suivantes sont définies et les simplifier :

① $\tan(2 \arctan(x))$. ▶ solution

② $\tan(3 \arctan(x))$ ▶ solution

③ $\tan(\arcsin(x))$ ▶ solution

④ $\tan(\arccos(x))$ ▶ solution

⑤ $\arctan\left(\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}\right)$ ▶ solution

⑥ $\arcsin\left(\frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)}\right)$ ▶ solution



On considère le réel : $A = \arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$.

① Donner un encadrement à priori du réel A . ► solution

② Calculer $\tan(A)$. En déduire la valeur de A . ► solution

③ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\arctan(x - 3) + \arctan(x) + \arctan(x + 3) = \frac{5\pi}{4}. \quad \text{► solution}$$

④ Par un procédé similaire, calculer le réel

$$B = \arctan(2) + \arctan(3) + \arctan(2 + \sqrt{3}). \quad \text{► solution}$$

⑤ Par un procédé similaire, calculer le réel

$$C = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right). \quad \text{► solution}$$



Déterminer toutes les solutions réelles des équations suivantes :

① $\arccos(x) = \arcsin(2x)$. ▶ solution

② $2 \arcsin(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$. ▶ solution

③ $\arctan(x) + \arctan\left(x\sqrt{3}\right) = \frac{7\pi}{12}$. ▶ solution



Domaine de définition, dérivée, variations et étude des asymptotes de la fonction $f : x \mapsto \arcsin(e^{-x^2})$. [► solution](#)



THE LORD OF THE MATHS

EXERCICE

TRIGONOMETRIE

EXERCICE 11

Montrer que : $\forall x \in [0, 1[, \arcsin(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. [▶ solution](#)



Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

► solution



Etudier la fonction f puis expliciter sa dérivée sur son ensemble de dérivabilité. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ lorsque :

1 $f : x \mapsto \arctan \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) .$ ► solution

2 $f : x \mapsto \arccos \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) .$ ► solution



Etudier les fonctions suivantes :

1 $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2} e^{\arcsin(x)}$ ► solution

2 $f : x \mapsto \operatorname{th} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$ ► solution



THE LORD OF THE MATHS

EXERCICE

TRIGONOMETRIE

EXERCICE 15

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, simplifier l'expression

$$A = \operatorname{sh}^2(x) \cos^2(y) + \operatorname{ch}^2(x) \sin^2(y).$$

► solution



Déterminer pour quelles valeurs de x l'expression suivante a un

sens puis la simplifier : $\argch \left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x) + 1}{2}} \right)$ ► solution



① En utilisant la formule de duplication, on obtient :

$$\sin(x) + \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) [1 + 2\cos(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \text{ou} \\ 1 + 2\cos(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \bmod(\pi) \\ \text{ou} \\ \cos(x) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \bmod(\pi) \\ \text{ou} \\ x = \frac{2\pi}{3} \bmod(2\pi) \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2\pi}{3} \bmod(2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ k\pi, \quad \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$



◀ retour à l'exercice

- 2 Cette équation a un sens lorsque

$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$. Dans ce cas, on a

$$3 \tan(x) = 2 \cos(x) \Leftrightarrow 3 \sin(x) = 2 \cos^2(x) = 2(1 - \sin^2(x))$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2(x) + 3 \sin(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 + 3X - 2 = 0 \quad (X = \sin(x))$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \times 2} \Leftrightarrow X \in \left\{ -2, \frac{1}{2} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = -2 & \text{impossible} \\ \text{ou} \\ \sin(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \sin(x) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \bmod(2\pi) \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} \bmod(2\pi) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

◀ retour à l'exercice

3 On utilise les formules d'addition

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x + x) = \sin(2x) \cos(x) + \cos(2x) \sin(x) \\ &= \sin(x) (2 \cos^2(x) + 2 \cos^2(x) - 1) \\ &= \sin(x) (4 \cos^2(x) - 1) \end{aligned}$$



ce qui nous donne

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x)(1 + 2\cos(x) + 4\cos^2(x) - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x)\cos(x)(1 + 2\cos(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \bmod \pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} \bmod \pi \text{ ou } x = \pm \frac{2\pi}{3} \bmod 2\pi)$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \bmod \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \pm \frac{2\pi}{3} \bmod 2\pi)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{k\pi}{2}, \quad -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

◀ retour à l'exercice



4

$$\begin{aligned}\cos(3x) = \cos(2x) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2x \bmod(2\pi) \\ \text{ou} \\ 3x = -2x \bmod(2\pi) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \bmod(2\pi) \\ \text{ou} \\ 5x = 0 \bmod(2\pi) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \bmod(2\pi) \\ \text{ou} \\ x = 0 \bmod \frac{2\pi}{5} \end{cases}\end{aligned}$$

On remarque si $x = 0 \bmod \left(\frac{2\pi}{5}\right)$ alors $x = 0 \bmod(2\pi)$ donc les solutions de cette équation sont les réels

$$x = 0 \bmod \left(\frac{2\pi}{5}\right) \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{2\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

[◀ retour à l'exercice](#)

- 5 On remarque pour commencer que $\sin(a) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$
donc

$$\begin{aligned}\cos(2x) = \sin(3x) &\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - 3x \bmod(2\pi) \\ \text{ou} \\ 2x = -\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \bmod(2\pi) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} \bmod(2\pi) \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} \bmod(2\pi) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} \bmod\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} \bmod(2\pi) \end{cases} &\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{10} + 2k\pi, \quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}\end{aligned}$$

[◀ retour à l'exercice](#)



6 Cette équation a un sens lorsque

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} \bmod(\pi) \\ \text{et} \\ \pi - x \neq \frac{\pi}{2} \bmod(\pi) \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} \bmod(\pi)$$
$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \tan(\pi - x) \Leftrightarrow x = \pi - x \bmod(\pi) \\ \Leftrightarrow 2x &= \pi \bmod(\pi) = 0 \bmod(\pi) \Leftrightarrow x = 0 \bmod\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow x &\in \left\{ \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$



Soit $k \in \mathbb{Z}$, on remarque que $\frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + q\pi$ pour un certain $q \in \mathbb{Z}$ si et seulement si $\frac{k}{2} = \frac{1}{2} + q \Leftrightarrow k = 2q + 1$ autrement dit k est impair. Par conséquent, $\frac{k\pi}{2}$ est une valeur interdite si et seulement k est impair et lorsque k décrit les entiers relatifs pairs alors $\frac{k\pi}{2} = \frac{k}{2} \times \pi$ décrit les multiples de π donc

$$\tan(x) = \tan(\pi - x) \Leftrightarrow x \in \{k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

◀ retour à l'exercice



7 Cette équation a un sens lorsque

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{2} \bmod(\pi) \\ \text{et} \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} \bmod(\pi) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{2} \bmod(\pi) \\ \text{et} \\ x \neq \frac{\pi}{4} \bmod \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$



Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}\tan(2x) = 2 \tan(x) &\Leftrightarrow \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} = 2 \tan(x) \\ &\Leftrightarrow 2 \tan(x) = 2 \tan(x) (1 + \tan^2(x)) \\ &\Leftrightarrow 2 \tan^3(x) = 0 \Leftrightarrow \tan(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \bmod \pi \Leftrightarrow x \in \{k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

Aucune de ces solutions n'est une valeur interdite donc on a bien toutes les solutions de l'équation initiale.

[◀ retour à l'exercice](#)



- ① Cette équation a un sens lorsque $\cos(x) \geq 0$ et $\sin(x) \geq 0$ c'est-à-dire lorsque $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right]$. On se rappelle que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \quad \begin{cases} 0 \leq \sin(x) \leq 1 \\ 0 \leq \cos(x) \leq 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2(x) \leq \sqrt{\sin(x)} \\ \cos^2(x) \leq \sqrt{\cos(x)} \end{cases}$$

Par conséquent, si $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1$, on en déduit que

$$1 = \sin^2(x) + \cos^2(x) \leq \sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)} = 1$$



Par conséquent, si $\cos^2(x) < \sqrt{\cos(x)}$ ou si $\sin^2(x) < \sqrt{\sin(x)}$ alors

$$1 = \sin^2(x) + \cos^2(x) < \sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)} = 1$$

ce qui est absurde donc $\begin{cases} \cos^2(x) = \sqrt{\cos(x)} \\ \text{et} \\ \sin^2(x) = \sqrt{\sin(x)} \end{cases}$

[◀ retour à l'exercice](#)



THE LORD OF THE MATHS

SOLUTIONS

TRIGONOMETRIE

SOLUTION EXERCICE 2

② On a alors :

$$\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos^2(x) = \sqrt{\cos(x)} \\ \text{et} \\ \sin^2(x) = \sqrt{\sin(x)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = 0 \text{ ou } \cos^{3/2} x = 1 \\ \text{et} \\ \sin(x) = 0 \text{ ou } \sin^{3/2} x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = 1 \\ \text{et} \\ \sin(x) = 0 \text{ ou } \sin(x) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = 0 \text{ et } \sin(x) = 1 \\ \text{ou} \\ \sin(x) = 0 \text{ et } \cos(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi \\ \text{ou} \\ x = 0 \bmod 2\pi \end{cases}$$



Puisqu'on a procédé par implication, il est nécessaire de vérifier si les solutions obtenues sont bien solutions de l'équation initiale ce qui se vérifie immédiatement. Par conséquent, x est solution de l'équation initiale ssi

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \bmod 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi. \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left\{ 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

◀ retour à l'exercice



- ① On introduit la fonction $f : x \mapsto \cos(x) - x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme de deux telles fonctions) et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= -\sin(x) - 1 = -(\sin(x) + 1) \leq 0 \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \sin(x) = -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} \bmod(2\pi) \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}\end{aligned}$$

Par conséquent, f' est négative sur $\mathbb{R}$ et elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur chaque intervalle borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ (il n'y a qu'un nombre fini d'entiers dans un intervalle borné). On en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et elle est continue sur $\mathbb{R}$ (puisque dérivable sur $\mathbb{R}$) ce qui entraîne qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Etant donné que $0 \in \mathbb{R}(= f(\mathbb{R}))$, on est assuré que



l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par f).

Pour localiser la solution de $(\mathcal{E})$, que l'on note α , on remarque que $\cos(\alpha) \in [-1, 1]$ donc

$\alpha = \cos(\alpha) \in [-1, 1] \subset \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. On en déduit que

$\cos(\alpha) \in]0, 1]$ donc $\alpha = \cos(\alpha) \in]0, 1]$. [◀ retour à l'exercice](#)

- 2 On introduit la fonction $f : x \mapsto \sin(x) - x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme de deux telles fonctions) et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \cos(x) - 1 \leq 0 \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0 \bmod(2\pi) \\ &\Leftrightarrow x \in \{2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

Par conséquent, f' est négative sur $\mathbb{R}$ et elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur chaque intervalle borné $[a, b]$ de



THE LORD OF THE MATHS

SOLUTIONS

TRIGONOMETRIE

SOLUTION EXERCICE 3

$\mathbb{R}$ (il n'y a qu'un nombre fini d'entiers dans un intervalle borné). On en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et elle est continue sur $\mathbb{R}$ (puisque dérivable sur $\mathbb{R}$) ce qui entraîne qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Etant donné que $0 \in \mathbb{R}(= f(\mathbb{R}))$, on est assuré que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par f). En outre, on a $f(0) = \sin(0) - 0 = 0$ donc 0 est l'unique solution réelle de $\sin(x) = x$. [◀ retour à l'exercice](#)



- ① La fonction f est clairement définie sur $\mathbb{R}$ et elle est 2π -périodique. Est-ce la plus petite période ? On va tester les diviseurs successifs de 2π .

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + \pi) &= (\sin(x + \pi))^4 + (\cos(x + \pi))^4 \\ &= (-\sin(x))^4 + (-\cos(x))^4 = \sin^4(x) + \cos^4(x) = f(x) \\ f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)^4 + \left(\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)^4 \\ &= (\cos(x))^4 + (-\sin(x))^4 = \cos^4(x) + \sin^4(x) = f(x)\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction f est $\frac{\pi}{2}$ -périodique ce qui nous fait réduire le domaine d'étude à un intervalle de longueur $\frac{\pi}{2}$ et comme la fonction f est paire, on choisit un intervalle centrée en 0 ce qui entraîne que le domaine d'étude de f est



$\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ («partie positive» de l'intervalle d'étude).

Remarque : La plus petite période strictement positive de la fonction f est $\frac{\pi}{2}$. En effet, si $T \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est une période de T alors

$$\begin{aligned}f(T) &= f(0) = 1 \Leftrightarrow \cos^4(T) + \sin^4(T) = 1 \\&\Leftrightarrow \underbrace{(\cos^2(T) + \sin^2(T))^2}_{=1} - 2\cos^2(T)\sin^2(T) = 1 \\&\Leftrightarrow \cos^2(T)\sin^2(T) = 0 \Leftrightarrow \cos(T)\sin(T) = 0 \\&\Leftrightarrow T \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\} \Rightarrow T = 0\end{aligned}$$

◀ retour à l'exercice



- ② La fonction g est clairement définie sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ étant 2π -périodique, on en déduit que les fonctions $x \mapsto \sin(3x)$ et $x \mapsto \cos(2x)$ sont respectivement $\frac{2\pi}{3}$ -périodique et π -périodique donc la plus petite période commune est 2π . Ceci entraîne que la fonction g est 2π -périodique et comme elle n'admet pas de parité, on peut l'étudier à priori sur $[0, 2\pi]$. On remarque néanmoins que

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(\pi - x) &= \sin(3\pi - 3x) + \cos(2\pi - 2x) \\ &= \sin(\pi - 3x) + \cos(-2x) = \sin(3x) + \cos(2x) = g(x)\end{aligned}$$

La symétrie $s : x \mapsto \pi - x$ admet pour centre de symétrie le réel x vérifiant

$$x = \pi - x \Leftrightarrow 2x = \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$



On choisit alors comme intervalle l'intervalle de longueur 2π centré en $\frac{\pi}{2}$, i.e. $\left[\frac{\pi}{2} - \pi, \frac{\pi}{2} + \pi\right] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. La

connaissance de g sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ entraîne la connaissance de g

sur $s\left(\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc l'intervalle d'étude

optimal est $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. [◀ retour à l'exercice](#)



La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, elle est 2π -périodique et dérivable sur $\mathbb{R}$. On restreint son étude à $[0, 2\pi]$. Si l'on remarque que $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, donc $f(x + \pi) = -f(x)$, ce qui entraîne que la connaissance de f sur $[0, \pi]$ fournit sa connaissance sur $[\pi, 2\pi]$. La dérivée de f est donnée par

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= 3(-\sin(x)) \cos^2(x) + 3 \cos(x) \sin^2(x) \\ &= -3 \sin(x) \cos(x) [\cos(x) - \sin(x)] \\ &= 3\sqrt{2} \sin(x) \cos(x) \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) \right] \\ &= -3\sqrt{2} \sin(x) \cos(x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2} \sin(2x) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$



THE LORD OF THE MATHS

SOLUTIONS

TRIGONOMETRIE

SOLUTION EXERCICE 5

Le tableau de signe de f' est (on n'oublie le signe $-$ dans l'expression de f)

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π
$\sin(2x)$	0	+		+	0	-		-	0
$\cos(x + \pi/4)$		+		-		-	0	-	
$f'(x)$	0	-		+	0	-	0	-	0

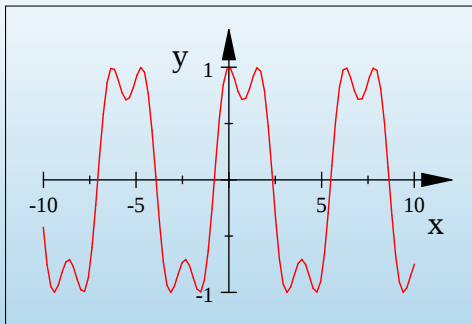
ce qui nous donne les variations de f sur $[0, \pi]$ puis sur $[\pi, 2\pi]$ (en se rappelant que $f(x + \pi) = -f(x)$ et que l'opposée d'une fonction croissante et décroissante et vice-versa)

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π
$f(x)$	1		$\sqrt{2}/2$		1		0		-1



x	π		$5\pi/4$		$3\pi/2$		$7\pi/4$		2π
$f(x)$	-1		$-\sqrt{2}/2$		-1		0		1

Sa représentation graphique est :



La fonction f est continue sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (car dérivable sur cet intervalle) et strictement décroissante sur cet intervalle (car sa dérivée y est strictement négative sauf en $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ et π) donc elle réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ sur $f\left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right) = [-1; 1]$.

◀ retour à l'exercice



La fonction f est définie ssi $\tan$ est définie (i.e. sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$) et

$$1 + 2 \cos(x) \neq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Par conséquent, f est définie sur

$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, \pm 2\pi/3 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Cette fonction est impaire et 2π -périodique donc on restreint son étude à

$$[0, \pi] \setminus \{\pi/2, 2\pi/3\} = \left[0, \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \left[\cup \right] \frac{2\pi}{3}, \pi \right].$$



La fonction f est dérivable sur son domaine de définition (comme quotient de deux telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet ensemble de définition) et sa dérivée vaut

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathcal{D}_f; f'(x) &= \frac{(1 + \tan^2(x))(1 + 2 \cos(x)) - \tan(x)(-2 \sin(x))}{(1 + 2 \cos(x))^2} \\&= \frac{1 + 2 \cos(x) + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{2 \sin^2(x)}{\cos(x)} + 2 \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}}{(1 + 2 \cos(x))^2} \\&= \frac{1 + 2 \cos^3 x + 4 \sin^2(x) \cos(x)}{(1 + 2 \cos(x))^2 \cos^2(x)} \\&= \frac{1 + 2 \cos^3 x + 4(1 - \cos^2(x)) \cos(x)}{(1 + 2 \cos(x))^2 \cos^2(x)} \\&= \frac{1 + 4 \cos(x) - 2 \cos^3 x}{(1 + 2 \cos(x))^2 \cos^2(x)}\end{aligned}$$



Les factorisations usuelles ne semblant plus être possibles, on remarque que le numérateur est un polynôme en $\cos(x)$.

Considérons la fonction polynomiale $P : x \mapsto -2x^3 + 4x + 1$. Nous allons étudier ses variations sur $[-1, 1]$ (les valeurs que prend $\cos$ sur $[0, \pi]$) afin d'établir son signe. Sa dérivée vaut

$P'(x) = -6x^2 + 4$ qui est positive sur $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ et négative en dehors. Les variations de P sur $[-1, 1]$ sont

x	-1		$-\sqrt{2/3}$		$\sqrt{2/3}$		1
$P'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f(-\sqrt{2/3})$	$\nearrow$	$f(\sqrt{2/3})$	$\searrow$	3



avec $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{8}{9}\sqrt{6} + 1 > 0$ et $f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 1 - \frac{8}{9}\sqrt{6} < 0$.

Par conséquent, le polynôme P s'annule une et une seule fois sur $[-1, 1]$ en une valeur $\alpha \in \left]-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right[$ (utiliser le théorème de bijection sur cet intervalle). Il est strictement négatif sur $[-1, \alpha[$ et strictement positif sur $[\alpha, 1]$. Puisque $P(0) = 1 > 0$, on peut même affirmer que $\alpha \in \left]-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right[$. Par conséquent, l'expression

$1 + 4\cos(x) - 2\cos^3 x$ est strictement négative lorsque $\cos(x) \in [-1, \alpha[$ et strictement positive lorsque $\cos(x) \in]\alpha, 1]$. Etant donné que $x \in [0, \pi]$, que la fonction $\cos$ est bijective sur cet intervalle et que sa réciproque est $\arccos$, on obtient que $1 + 4\cos(x) - 2\cos^3 x$ est strictement négative sur



$] \arccos(\alpha), \arccos(-1)] =] \arccos(\alpha), \pi]$ et strictement positive sur $[\arccos(1), \arccos(\alpha)[= [0, \arccos(\alpha)[$. Pour dresser le tableau de variation de f , il est nécessaire de localiser $\arccos(\alpha)$ par rapport à $0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ et π . Puisque l'on a $\alpha < 0$, il est immédiat que $\frac{\pi}{2} < \arccos(\alpha) < \pi$. Il reste à comparer $\arccos(\alpha)$ par rapport à $\arccos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$. On a $P(\alpha) = 0$ et $P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$ donc $P\left(-\frac{1}{2}\right) < P(\alpha)$. La fonction P étant strictement croissante sur $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ qui contient $-\frac{1}{2}$ et α , on en conclut que



THE LORD OF THE MATHS

SOLUTIONS

TRIGONOMETRIE

SOLUTION EXERCICE 6

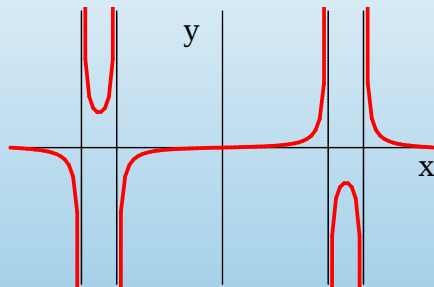
$-\frac{1}{2} < \alpha \Leftrightarrow \arccos(\alpha) < \frac{2\pi}{3}$ (la fonction arccos étant décroissante).

x	$-\pi$		$-2\pi/3$		$-\alpha$		$-\pi/2$		0
$f'(x)$		$-$	$\parallel$	$-$		$+$	$\parallel$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$+\infty$ $\parallel$ $-\infty$	$\searrow$	$-f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$ $\parallel$ $-\infty$	$\nearrow$	0

x	0		$\pi/2$		α		$2\pi/3$		π
$f'(x)$		$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\parallel$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$+\infty$ $\parallel$ $-\infty$	$\searrow$	0



Voici sa représentation graphique



◀ retour à l'exercice



- ① L'expression $\tan(2 \arctan(x))$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ sauf pour les réels x tels que $2 \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$. Puisque $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $2 \arctan(x) \in]-\pi, \pi[$ donc la condition d'existence est $2 \arctan(x) \neq \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arctan(x) \neq \pm \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x \neq \tan\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) \neq \pm 1$. Par conséquent, l'expression étudiée existe ssi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \tan(2 \arctan(x)) &= \frac{2 \tan(\arctan(x))}{1 - \tan^2(\arctan(x))} \\ &= \frac{2x}{1 - x^2}\end{aligned}$$

◀ retour à l'exercice



- ② L'expression $\tan(3 \arctan(x))$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ sauf pour les réels x tels que $3 \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$. Puisque $\arctan(x) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on a $3 \arctan(x) \in \left] -\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ donc la condition d'existence est $3 \arctan(x) \neq \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arctan(x) \neq \pm \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x \neq \tan\left(\pm \frac{\pi}{6}\right) \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Par



conséquent, l'expression étudiée existe ssi
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\}, \\ \tan(3 \arctan(x)) &= \tan(2 \arctan(x) + \arctan(x)) \\ &= \frac{\tan(2 \arctan(x)) + \tan(\arctan(x))}{1 - \tan(2 \arctan(x)) \tan(\arctan(x))} \\ &= \frac{x + \frac{2x}{1-x^2}}{1 - \frac{2x^2}{1-x^2}} = \frac{x^3 - 3x}{3x^2 - 1} \end{aligned}$$

◀ retour à l'exercice



- ③ L'expression $\tan(\arcsin(x))$ existe ssi ($x \in [-1, 1]$ et $\arcsin(x) \neq \frac{\pi}{2} \bmod \pi$). Puisque $\forall x \in [-1; 1], \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, il suffit d'exiger que $\arcsin(x) \neq \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$. Par conséquent, l'expression considérée existe ssi $x \in]-1, 1[$

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1, 1[, \quad \tan(\arcsin(x)) &= \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

◀ retour à l'exercice



- ④ L'expression $\tan(\arccos(x))$ existe ssi $(x \in [-1, 1])$ et $\arccos(x) \neq \frac{\pi}{2} \bmod \pi$. Puisque $\forall x \in [-1; 1], \arcsin(x) \in [0, \pi]$, il suffit d'exiger que $\arccos(x) \neq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Par conséquent, l'expression considérée existe ssi $x \in]0, \pi[$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \tan(\arccos(x)) = \frac{\sin(\arccos(x))}{\cos(\arccos(x))} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

◀ retour à l'exercice



5 Le quotient $\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$ existe ssi

$$\begin{aligned}\cos(x) &\neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi \bmod(2\pi) \\ \Leftrightarrow x &\notin \{\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\} = \{(2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Dans ce cas, le quotient est toujours positif puisque

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos(x) \geq 0 \\ 1 - \cos(x) \geq 0 \end{cases}$$

donc $\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}$ et la fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$,

on en déduit que $\arctan\left(\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}\right)$ existe ssi



$$x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dans ce cas, en utilisant les formules de duplication, on a

$$\cos(x) = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$\Rightarrow 1 + \cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \text{ et}$$

$$1 - \cos(x) = 2 - 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left(1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\right)$$

$$= \arctan\left(\sqrt{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \arctan\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)$$



En remarquant que la fonction $x \mapsto \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \right)$

est 2π -périodique et paire, lorsque $x \in [0, \pi[$, on a $\frac{x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan(x) \geq 0$ ce qui entraîne que

$$\forall x \in [0, \pi[, \quad \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \right) = \arctan \left(\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) = \frac{x}{2}$$



Lorsque $x \in]-\pi, 0]$ alors $-x \in [0, \pi[$ et la parité nous donne

$$\begin{aligned}\forall x \in]-\pi, 0], \quad \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \right) \\&= \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \cos(-x)}{1 + \cos(-x)}} \right) \\&= \arctan \left(\tan \left(\frac{-x}{2} \right) \right) = -\frac{x}{2}\end{aligned}$$

ce que l'on peut résumer par

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \quad \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \right) = \frac{|x|}{2}$$



THE LORD OF THE MATHS

SOLUTIONS

TRIGONOMETRIE

SOLUTION EXERCICE 7

Plus généralement, si

$x \in]-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi[=](2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi[$ alors
 $x - 2k\pi \in]-\pi, \pi[$ et la 2π -périodicité nous donne

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in](2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi[, \\ \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \right) &= \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \cos(x - 2k\pi)}{1 + \cos(x - 2k\pi)}} \right) \\ &= \frac{|x - 2k\pi|}{2}\end{aligned}$$

On en déduit la représentation graphique de

$\arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \right)$. En trait fin, sa représentation sur

l'intervalle $[0, \pi[$, en trait gras son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (i.e. sa représentation sur $] -\pi, 0]$) et en trait discontinu ses translatés par 2π .

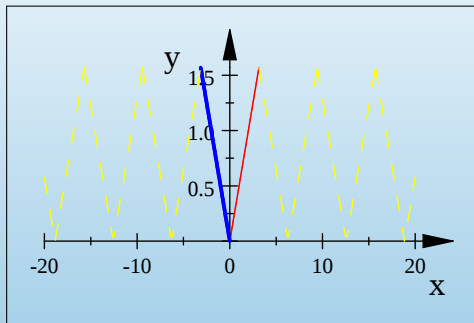


THE LORD OF THE MATHS

SOLUTIONS

TRIGONOMETRIE

SOLUTION EXERCICE 7



◀ retour à l'exercice



⑥ $\tan(x)$ existe lorsque

$$x \neq \frac{\pi}{2} \bmod \pi \Leftrightarrow x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Dans ce cas, le quotient $\frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$ existe bien (car le dénominateur est plus grand que 1 donc il ne s'annule pas).



La fonction arcsin étant définie sur $[-1, 1]$, l'expression $\arcsin\left(\frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)}\right)$ existe lorsque

$$-1 \leq \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -(1 + \tan^2(x)) \leq 2 \tan(x) \leq 1 + \tan^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \tan^2(x) + 2 \tan(x) \geq 0 \\ 1 + \tan^2(x) - 2 \tan(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \tan(x))^2 \geq 0 \\ (1 - \tan(x))^2 \geq 0 \end{cases}$$

ce qui est toujours vrai. Par conséquent,

$\arcsin\left(\frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)}\right)$ existe ssi

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k + 1)\pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$



Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}\frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} &= \frac{2 \tan(x)}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = 2 \tan(x) \cos^2(x) \\ &= 2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x)\end{aligned}$$

En remarquant que la fonction $x \mapsto \arcsin\left(\frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)}\right)$ est π -périodique, lorsque

$$2x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

qui est un intervalle de longueur $\frac{\pi}{2}$ alors

$$\arcsin\left(\frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)}\right) = \arcsin(\sin(2x)) = 2x$$



Lorsque $2x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$ alors
 $\frac{\pi}{2} - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \arcsin \left(\frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} \right) &= \arcsin(\sin(2x)) = \arcsin(\sin(\pi - 2x)) \\ &= \arcsin \left(\sin \left(2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right) \right) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \pi - 2x \end{aligned}$$

On a donc expliciter la fonction $x \mapsto \arcsin \left(\frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} \right)$
sur un intervalle de longueur π . Par conséquent, si



$$x \in \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right] = \left[\frac{(4k-1)}{4}\pi, \frac{(4k+1)}{4}\pi\right] \text{ alors}$$

$$x - k\pi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \text{ et la } \pi\text{-périodicité nous donne}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \left[\frac{(4k-1)}{4}\pi, \frac{(4k+1)}{4}\pi\right],$$

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)}\right) &= \arcsin\left(\frac{2 \tan(x - k\pi)}{1 + \tan^2(x - k\pi)}\right) \\ &= 2(x - k\pi) \end{aligned}$$



THE LORD OF THE MATHS

SOLUTIONS

TRIGONOMETRIE

SOLUTION EXERCICE 7

$$\text{et si } x \in \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi \right] = \left[\frac{(4k+1)\pi}{4}, \frac{(4k+3)\pi}{4} \right]$$

alors $x - k\pi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$ et la π -périodicité nous donne

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \left[\frac{(4k+1)\pi}{4}, \frac{(4k+3)\pi}{4} \right],$$

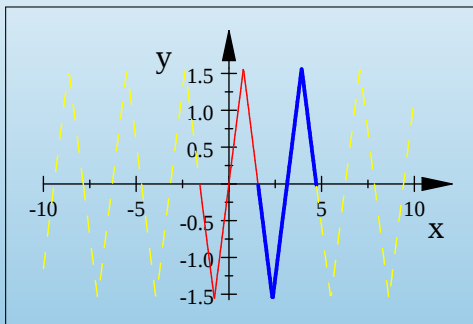
$$\begin{aligned} \arcsin \left(\frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} \right) &= \arcsin \left(\frac{2 \tan(x - k\pi)}{1 + \tan^2(x - k\pi)} \right) \\ &= \pi - 2(x - k\pi) \end{aligned}$$

On en déduit la représentation graphique de

$\arcsin \left(\frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} \right)$. En trait fin, sa représentation sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$, en trait gras sa représentation



graphique sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ et en trait discontinu ses translatés
par π .



◀ retour à l'exercice



- ① Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$, on a
 $-\frac{3\pi}{2} < A < \frac{3\pi}{2}$. On peut affiner le résultat en remarquant
que la fonction $\arctan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc
 $\forall x > \sqrt{3}$ (ce qui est le cas de 2, 5 et 8), on a
 $\arctan(x) > \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ donc $A > \frac{3\pi}{3} = \pi$ ce qui
entraîne que $\pi < A < \frac{3\pi}{2}$.

[◀ retour à l'exercice](#)



② En posant $a = \arctan(2) + \arctan(5)$, on a

$$\begin{aligned}\tan(A) &= \tan(a + \arctan(8)) \\ &= \frac{\tan(a) + \tan(\arctan(8))}{1 - \tan(a) \tan(\arctan(8))} = \frac{\tan(a) + 8}{1 - 8 \tan(a)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(a) &= \frac{\tan(\arctan(2)) + \tan(\arctan(5))}{1 - \tan(\arctan(2)) \tan(\arctan(5))} \\ &= \frac{2 + 5}{1 - 2 \times 5} = -\frac{7}{9}\end{aligned}$$

$$\tan(A) = \frac{-\frac{7}{9} + 8}{1 + 8 \times \frac{7}{9}} = \frac{\frac{-7 + 72}{9}}{\frac{9 + 56}{9}} = \frac{65}{65} = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$



THE LORD OF THE MATHS

SOLUTIONS

TRIGONOMETRIE

SOLUTION EXERCICE 8

Il existe donc un entier relatif k tel que $A = \frac{\pi}{4} + k\pi$ et en tenant compte de l'encadrement vérifié par A , on a

$$\begin{aligned}\pi < A < \frac{3\pi}{2} &\Leftrightarrow \pi < \frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{3\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} < k\pi < \frac{5\pi}{4} &\Leftrightarrow \frac{3}{4} < k < \frac{5}{4}\end{aligned}$$

et puisque k est un entier relatif, on en déduit que $k = 1$ ce qui entraîne que $A = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

◀ retour à l'exercice



3 La fonction

$f : x \mapsto \arctan(x - 3) + \arctan(x) + \arctan(x + 3) = \frac{5\pi}{4}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme somme de telles fonctions) ce qui entraîne qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \left] -\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$. Etant donné que $\frac{5\pi}{4} \in \left] -\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$, on en déduit que l'équation $f(x) = \frac{5\pi}{4}$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ (existence et unicité de l'antécédent de $\frac{5\pi}{4}$ par f sur $\mathbb{R}$). D'après la question b, $x = 5$ est une solution de cette équation donc c'est l'unique solution de l'équation considérée.

[◀ retour à l'exercice](#)



- ④ Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$, on a
 $-\frac{3\pi}{2} < A < \frac{3\pi}{2}$. On peut affiner le résultat en remarquant que la fonction $\arctan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x > \sqrt{3}$ (ce qui est le cas de 2, 3 et $2 + \sqrt{3}$), on a $\arctan(x) > \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ donc $B > \frac{3\pi}{3} = \pi$ ce qui entraîne que $\pi < B < \frac{3\pi}{2}$. En posant



$$b = \arctan(2) + \arctan(3), \text{ on } a$$

$$\begin{aligned}\tan(B) &= \tan\left(b + \arctan\left(2 + \sqrt{3}\right)\right) \\ &= \frac{\tan(b) + \tan\left(\arctan\left(2 + \sqrt{3}\right)\right)}{1 - \tan(b) \tan\left(\arctan\left(2 + \sqrt{3}\right)\right)} \\ &= \frac{\tan(a) + 2 + \sqrt{3}}{1 - \left(2 + \sqrt{3}\right) \tan(a)} \\ \tan(b) &= \frac{\tan(\arctan(2)) + \tan(\arctan(3))}{1 - \tan(\arctan(2)) \tan(\arctan(3))} \\ &= \frac{2 + 3}{1 - 2 \times 3} = -1\end{aligned}$$



THE LORD OF THE MATHS

SOLUTIONS

TRIGONOMETRIE

SOLUTION EXERCICE 8

$$\begin{aligned}\tan(B) &= \frac{-1+2+\sqrt{3}}{1+2+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

Il existe donc un entier relatif k tel que $B = \frac{\pi}{6} + k\pi$ et en tenant compte de l'encadrement vérifié par B , on a

$$\begin{aligned}\pi < B < \frac{3\pi}{2} &\Leftrightarrow \pi < \frac{\pi}{6} + k\pi < \frac{3\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{5\pi}{6} < k\pi < \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{6} < k < \frac{4}{3}\end{aligned}$$

et puisque k est un entier relatif, on en déduit que $k = 1$ ce qui entraîne que $B = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$.

[◀ retour à l'exercice](#)



- 5 Puisque $\forall x \in [-1, 1], -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$, on a $-\pi \leq C \leq \pi$. On peut affiner le résultat en remarquant que la fonction $\arcsin$ est strictement croissante sur $[-1, 1]$ donc $\forall x > 0$ (ce qui est le cas de $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$) $\arcsin(x) > \arcsin(0) = 0$ donc $C > 0$ ce qui entraîne que $0 < C < \pi$. Puisque

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2},$$



on a

$$\begin{aligned}\sin(C) &= \sin\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) \\&= \sin\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right) \cos\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) \\&\quad + \cos\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right) \sin\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) \\&= \frac{4}{5} \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} + \frac{3}{5} \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{16}{25}} + \frac{3}{5} \sqrt{\frac{9}{25}} \\&= \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$



Il existe donc un entier relatif k tel que $C = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et en tenant compte de l'encadrement vérifié par C , on a

$$\begin{aligned} 0 < C < \pi &\Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \pi \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < 2k\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et puisque k est un entier relatif, on en déduit que $k = 0$ ce qui entraîne que $C = \frac{\pi}{2}$.

[◀ retour à l'exercice](#)



- ① $\arccos(x)$ existe lorsque $x \in [-1, 1]$ et $\arcsin(2x)$ existe lorsque $2x \in [-1, 1] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ donc l'équation a un sens lorsque $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Commençons par localiser à priori les solutions de (1). Soit α une telle solution, puisque $\arccos(\alpha) \in [0, \pi]$, on en déduit que $\arcsin(2\alpha) = \arccos(\alpha) \geq 0 \Rightarrow 2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 0$ ainsi toute solution de (1) appartient nécessairement à $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Dans ce



cas, on est assuré que $\arccos(\alpha) = \arcsin(2\alpha) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ qui est un intervalle sur lequel $\sin$ est bijective

$$(1) \quad \underset{\sin \text{ bij sur } [0, \pi/2]}{\Leftrightarrow} \sin(\arccos(x)) = \sin(\arcsin(2x))$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 2x \underset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} 1-x^2 = (2x)^2 = 4x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{5} \underset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

◀ retour à l'exercice



- ② $\arcsin(x)$ existe ssi $x \in [-1, 1]$. Lorsque $x \in [-1, 1]$, $\sqrt{1-x^2}$ existe. Ainsi, lorsque $x \in [-1, 1]$, l'expression $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ existe ssi

$$\begin{aligned}-1 &\leq 2x\sqrt{1-x^2} \leq 1 \Leftrightarrow \left(2x\sqrt{1-x^2}\right)^2 \leq 1 \\&\Leftrightarrow 4x^2(1-x^2) \leq 1 \Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 + 1 \geq 0 \\&\Leftrightarrow (2x^2 - 1)^2 \geq 0\end{aligned}$$



ce qui est toujours vérifié. Par conséquent, l'équation considérée a un sens lorsque $x \in [-1, 1]$. En tenant compte que $x \in [-1, 1]$ et $2x\sqrt{1-x^2} \in [-1, 1]$, on a

$$\begin{aligned}2 \arcsin(x) &= \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \\ \Rightarrow \sin(2 \arcsin(x)) &= \sin(\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})) \\ \Leftrightarrow 2 \sin(\arcsin(x)) \cos(\arcsin(x)) &= 2x\sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow 2x\sqrt{1-x^2} &= 2x\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Cette égalité étant toujours vraie sur $[-1, 1]$, on en déduit que les solutions de l'équation initiale font partie de $[-1, 1]$! Cela nous fait une belle jambe :-). Ce qui nous a gêné, c'est l'implication initiale (passage au sinus). Effectuons une localisation à priori des solutions. On remarque que



$\forall x \in [-1, 1], \quad \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (par définition de arcsin) donc

$$\begin{aligned} 2 \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\Leftrightarrow \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \\ \Rightarrow x \in \left[\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] &= \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \end{aligned}$$

Ainsi les solutions de l'équation initiale appartiennent à l'intervalle $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Dans ce cas, on est assuré d'avoir $2x\sqrt{1-x^2} \in [-1, 1]$ (cf. le raisonnement initial) et



$2 \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Puisque la fonction $\sin$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$, on a l'équivalence suivante

$$\forall x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \quad \underbrace{2 \arcsin(x)}_{\in [-\pi/2, \pi/2]} = \arcsin(\underbrace{2x\sqrt{1-x^2}}_{\in [-1, 1]})$$
$$\Leftrightarrow \sin(2 \arcsin(x)) = \sin\left(\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)\right)$$

et d'après les calculs menées dans la première partie de l'exercice, cette égalité est toujours vérifiée. Par conséquent, tous les réels de l'intervalle $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ sont solutions de l'équation initiale et ce sont les seules solutions d'après notre analyse précédente.

[◀ retour à l'exercice](#)



③ Puisque $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$, l'équation a toujours un sens :

- **Première méthode** : Commençons par localiser les solutions éventuelles. Puisque $\arctan(x)$ et $\arctan(x\sqrt{3})$ sont du même signe que x et que $\arctan(x) + \arctan(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$ on



en déduit que $x \in \mathbb{R}_+$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow \tan \left(\arctan(x) + \arctan \left(x\sqrt{3} \right) \right) = \tan \left(\frac{7\pi}{12} \right) \\&= \tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \\&\Leftrightarrow \frac{\tan \left(\arctan(x) \right) + \tan \left(\arctan \left(x\sqrt{3} \right) \right)}{1 - \tan \left(\arctan(x) \right) \tan \left(\arctan \left(x\sqrt{3} \right) \right)} \\&= \frac{\tan \left(\frac{\pi}{3} \right) + \tan \left(\frac{\pi}{4} \right)}{1 - \tan \left(\frac{\pi}{3} \right) \tan \left(\frac{\pi}{4} \right)}\end{aligned}$$



THE LORD OF THE MATHS

SOLUTIONS

TRIGONOMETRIE

SOLUTION EXERCICE 9

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{x + x\sqrt{3}}{1 - x^2\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x(1 + \sqrt{3})}{1 - x^2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{1 - x^2\sqrt{3}} &= \frac{1}{1 - \sqrt{3}} \Leftrightarrow x(1 - \sqrt{3}) = 1 - x^2\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow x^2\sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})x - 1 &= 0\end{aligned}$$

Le discriminant de ce trinôme est

$$\Delta = (1 - \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3}(-1) = 2\sqrt{3} + 4 = (\sqrt{3} + 1)^2$$

donc ses racines sont

$$x = \frac{-(1 - \sqrt{3}) \pm (\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \left\{1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

Etant donné que x est nécessairement positif, on en déduit que l'équation (3) admet pour unique solution $x = 1$.



- **Deuxième méthode** : La fonction $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(x\sqrt{3})$ étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \left] \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$. Puisque $\frac{7\pi}{12} \in \left] \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$, on est assuré que l'équation $f(x) = \frac{7\pi}{6}$ admet une et une seule solution réelle (existence et unicité de l'antécédent $\frac{7\pi}{12}$ par f) et 1 est une solution évidente à l'équation ($\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ et $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$) donc c'est l'unique solution de (3). [◀ retour à l'exercice](#)



Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 \leq 0$ donc $0 < e^{-x^2} \leq 1$ et, comme $\arcsin$ est définie sur $[-1, 1]$, on en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction f étant paire, on détermine ses variations sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto -x^2$ étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $\exp$ et $\arcsin(x)$ étant strictement croissante sur leurs ensembles de définition respectifs, on en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et, par parité, strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$.

La fonction $a : x \mapsto e^{-x}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, $a(\mathbb{R}) =]0, 1]$, et la fonction $\arcsin$ étant dérivable sur $] -1, 1[$, on en déduit que f est dérivable sur

$$\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid a(x) = \pm 1\} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid a(x) = 1\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



et sa dérivée vaut

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\times}, \quad f'(x) = (e^{-x^2})' \frac{1}{\sqrt{1 - (e^{-x^2})^2}} = \frac{-2xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-2x^2}}}$$

Il est immédiat que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \arcsin 0 = 0$ donc l'asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ est la droite $y = 0$ et, par parité, $\mathcal{C}_f$ admet la même asymptote en $-\infty$. [◀ retour à l'exercice](#)



- **Première méthode** : On introduit la fonction auxiliaire $a : x \mapsto \arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ puis on détermine ses variations sur $[0, 1[$ afin d'en déduire son signe. La fonction $x \mapsto 1 - x^2$ est dérivable sur $[0, 1[$ et elle prend que des valeurs strictement positives sur cet intervalle. Etant donné que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on est assuré que la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $[0, 1[$. Par conséquent, la fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est dérivable sur $[0, 1[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. En



outre, la fonction arcsin est dérivable sur $[0, 1[$, ce qui entraîne la dérivabilité de a sur $[0, 1[$ et l'on a

$$\begin{aligned}\forall x \in [0, 1[, \quad a'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2} - x \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right)}{\left(\sqrt{1-x^2} \right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$



donc

$$\begin{aligned}a'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \\&= \frac{-x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \leq 0.\end{aligned}$$

Ainsi la fonction a est strictement décroissante sur $[0, 1[$ et $a(0) = 0$ donc

$$\forall x \in [0, 1[, \quad a(x) \leq 0 \Leftrightarrow \arcsin(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$



- **Seconde méthode** : Tout réel $x \in [0, 1[$ s'écrit $x = \sin(\theta)$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ (donc $\cos(\theta) \geq 0$) ce qui nous donne

$$\arcsin(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow \arcsin(\sin(\theta)) \leq \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}}$$

$$\Leftrightarrow_{\cos(\theta) \geq 0} \theta \leq \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

cette dernière mination étant vraie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ (cf. cours sur la trigonomie circulaire).

[◀ retour à l'exercice](#)



- **Première méthode** : Lorsque $x > 0$, les deux expressions sont bien définies. On pose

$$A = \arctan \frac{1}{2x^2}, \quad B = \arctan \frac{x}{x+1} - \arctan \frac{x-1}{x}.$$



et l'on a

$$\tan A = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)\right) = \frac{1}{2x^2}$$

$$\begin{aligned}\tan B &= \tan\left(\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) \\ &= \frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) - \tan\left(\arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)}{1 + \tan\left(\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) \tan\left(\arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)} \\ &= \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}}{1 + \frac{x}{x+1} \times \frac{x-1}{x}} = \frac{\frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x(x+1)}}{1 + \frac{x-1}{x+1}} = \frac{1}{2x^2}\end{aligned}$$



Par conséquent, $\tan A = \tan B \Rightarrow A = B \bmod \pi$. Il reste à déterminer précisément la congruence, i.e. à déterminer l'entier k (dépendant à priori de x) tel que $A = B + k\pi$. On localise à priori A et B .

Puisque $\frac{1}{2x^2} > 0$, on en déduit que

$$\forall x > 0, \quad \arctan \frac{1}{2x^2} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[.$$

D'autre part, $\forall x > 0, \quad 0 < \frac{x}{x+1} < 1$ donc, par la stricte

croissance de $\arctan$, $0 < \arctan \frac{x}{x+1} < \frac{\pi}{4}$.

Pour finir, $\frac{x}{x-1}$ n'étant pas de signe fixe lorsque x décrit $\mathbb{R}_+^\times$,



THE LORD OF THE MATHS

SOLUTIONS

TRIGONOMETRIE

SOLUTION EXERCICE 12

on peut simplement affirmer que $\arctan \frac{x}{x-1} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
Nous obtenons ainsi des encadrements à priori de A et B

$$\begin{aligned} 0 < A < \frac{\pi}{2}, \quad & \left\{ \begin{array}{l} 0 < \arctan \frac{x}{x+1} < \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{2} < -\arctan \frac{x}{x-1} < \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \\ \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < B < \frac{3\pi}{4} & \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < A - B < \frac{3\pi}{4} \\ \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < k\pi < \frac{3\pi}{4} & \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{3}{4} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow k = 0 \end{aligned}$$

donc on vient de prouver de $A = B \Leftrightarrow \arctan \left(\frac{1}{2x^2} \right) =$
 $\arctan \left(\frac{x}{x+1} \right) - \arctan \left(\frac{x-1}{x} \right)$ pour tout $x > 0$.



- **Seconde méthode** : Les fonctions $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$ et $g : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^\times$ (somme et / ou composée de telles fonctions) et on a pour $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2}{2x^3} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2x^2}\right)^2} = \frac{-1}{x^3} \cdot \frac{1}{\frac{4x^4 + 1}{4x^4}} \\ &= \frac{-4x^4}{x^3} \cdot \frac{1}{4x^4 + 1} = -\frac{4x}{4x^4 + 1} \end{aligned}$$



THE LORD OF THE MATHS

SOLUTIONS

TRIGONOMETRIE

SOLUTION EXERCICE 12

$$\begin{aligned}g'(x) &= \left(\frac{x}{x+1}\right)' \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2} - \left(\frac{x-1}{x}\right)' \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x}\right)^2} \\&= \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{\frac{(x+1)^2 + x^2}{(x+1)^2}} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{x^2 + (x-1)^2}{x^2}} \\&= \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2 + x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + (x-1)^2} \\&= \frac{1}{2x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} \\&= \frac{-4x}{(2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)} = -\frac{4x}{4x^4 + 1}\end{aligned}$$



Par conséquent, ces deux fonctions ont la même dérivée sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^\times$ donc il existe un réel C tel que, pour tout réel $x > 0$, on ait :

$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right) + C$$

$$\Rightarrow \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + C \quad (x=1) \Leftrightarrow C=0$$

$$\Rightarrow \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

◀ retour à l'exercice



- ❶ **Domaine de définition de f :** $\frac{1-x}{1+x}$ existe lorsque $x \neq -1$.

Le tableau de signe de $\frac{1-x}{1+x}$ est

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		+		+	0	-	
$1+x$		-	0	+		+	
$(1-x)/(1+x)$		-	$\parallel$	+	0	-	

donc $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ existe ssi $x \in]-1, 1]$ et comme la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, on en déduit que le domaine de définition de f est $] -1, 1]$.

Parité, périodicité : L'ensemble de définition de f n'étant ni symétrique par rapport à l'origine, ni stable par aucune



translation, on en déduit que f n'admet aucune parité et aucune périodicité.

Monotonie : La fonction $x \mapsto 1 - x$ est strictement décroissante et positive sur $] -1, 1]$. La fonction $x \mapsto 1 + x$ est strictement croissante et positive sur $] -1, 1]$ donc son inverse est strictement décroissante et positive sur $] -1, 1]$.

Par conséquent, la fonction $x \mapsto \frac{1 - x}{1 + x} = (-1 - x) \times \frac{1}{1 + x}$ est strictement décroissante sur $] -1, 1]$ comme produit de deux fonctions strictement décroissantes et positives sur $] -1, 1]$. Les fonctions $\sqrt{\cdot}$ et $\arctan$ étant strictement croissante sur leurs domaines de définition respectifs, on en déduit que f est strictement décroissante sur $] -1, 1]$.

Dérivabilité et dérivée de f : La fonction $x \mapsto \frac{1 - x}{1 + x}$ est



dérivable sur $] -1, 1]$ comme quotient de deux telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas sur $] -1, 1]$. Puisque la fonction $\sqrt{\cdot}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^{\times}$ et que

$$\forall x \in] -1, 1], \quad \frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow x \in] -1, 1[$$

on en déduit que la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ est dérivable sur $] -1, 1[$. La fonction arctan étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on est en droit d'affirmer que la fonction



THE LORD OF THE MATHS

SOLUTIONS

TRIGONOMETRIE

SOLUTION EXERCICE 13

$x \mapsto \arctan \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = f(x)$ est dérivable sur $] -1, 1[$ et on a pour tout $x \in] -1, 1[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)' \cdot \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)^2} = \frac{\left(\frac{1-x}{1+x} \right)'}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{-2}{(1+x)^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-2}{(1+x)^2} \cdot \frac{x+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \left(-\frac{1}{2} \arcsin(x) \right)' \end{aligned}$$



Ainsi, les fonctions f et $x \mapsto -\frac{1}{2} \arcsin(x)$ ont la même dérivée sur l'intervalle $] -1, 1[$ donc il existe un réel C tel que

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f(x) = -\frac{1}{2} \arcsin(x) + C$$

$$\Rightarrow_{x=1} 0 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + C \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \forall x \in] -1, 1[, \quad \arctan \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = -\frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{\pi}{4}$$

◀ retour à l'exercice

2

A finir

◀ retour à l'exercice



- ① Les fonctions $\arcsin$ et $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ étant définies sur $[-1, 1]$, il est immédiat que $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$. En outre, ces deux fonctions étant dérivables sur $] -1, 1[$ et $\exp$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est dérivable sur $] -1, 1[$ et sa dérivée vaut

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1, 1[, \quad f'(x) &= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin(x)} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin(x)} \\ &= e^{\arcsin(x)} \left[\frac{-x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \right]\end{aligned}$$

Il est immédiat que $x \in]-1, 0]$, $f'(x) > 0$ (le numérateur de la fractions étant somme de deux réels positifs qui ne sont pas



simultanément nuls). Il reste à déterminer son signe sur $] -1, 0]$.

$$-x + \sqrt{1-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \geq x \underset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} 1-x^2 \geq x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 \leq 1 \underset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Voici le tableau de variation de f ($\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$)

x	-1		$\sqrt{2}/2$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}/2 \exp(\pi/4)$	$\searrow$	0



◀ retour à l'exercice

- ② Puisque la fonction th est définie sur $\mathbb{R}$, l'expression $f(x)$ existe ssi $x \neq -1$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

La fonction $x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (comme quotient de deux fonctions dérivables sur cet ensemble et donc le dénominateur ne s'annule pas sur cet ensemble) et la fonction th étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f'(x) &= \left(\frac{x-1}{x+1} \right)' \left[1 - \text{th}^2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right] \\ &= \frac{2}{(x+1)^2} \left[1 - \text{th}^2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right] \end{aligned}$$



THE LORD OF THE MATHS

SOLUTIONS

TRIGONOMETRIE

SOLUTION EXERCICE 14

Puisque les valeurs de th appartiennent à $] -1, 1[$, on en déduit que le crochet est toujours strictement positif, ce qui entraîne que f' est strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Lorsque $x \mapsto \pm\infty$, $\frac{x-1}{x+1} \rightarrow 1$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \text{th}(1)$.

Lorsque $x \rightarrow -1^+$ (resp. -1^-), $\frac{x-1}{x+1} \rightarrow -\infty$ (resp. $+\infty$) et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th } x = 1$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th } x = -1$), on en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ (resp. 1). Le tableau de variation de f est donné par

x	$-\infty$			-1			$+\infty$
$f'(x)$		+				+	
$f(x)$	$\text{th}(1)$	$\nearrow$	1		-1	$\nearrow$	$\text{th}(1)$



THE LORD OF THE MATHS

SOLUTIONS

TRIGONOMETRIE

SOLUTION EXERCICE 14

◀ retour à l'exercice



$$\begin{aligned} & \operatorname{sh}^2(x) \cos^2(y) + \operatorname{ch}^2(x) \sin^2(y) \\ = & \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \cos^2 y + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 \sin^2 y \\ = & \frac{1}{4} \left[(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \cos^2 y + (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \sin^2 y \right] \\ = & \frac{1}{4} \left[e^{2x} (\cos^2 y + \sin^2 y) - 2(\cos^2 y - \sin^2 y) + e^{-2x} (\cos^2 y + \sin^2 y) \right] \\ = & \frac{1}{4} \left[e^{2x} - 2 \cos(2y) + e^{-2x} \right] = \frac{\operatorname{ch}(2x) - \cos(2y)}{2} \end{aligned}$$

◀ retour à l'exercice



L'expression est définie pour tout réel x puisque l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x \geq 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2} \geq 1 \text{ et } \operatorname{argch} \text{ est défini sur } [1, +\infty[.$$

Pour simplifier l'expression, on utilise la formule d'addition

$$\operatorname{ch}(x) = 2 \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Leftrightarrow \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{2}$$

$$\stackrel{\operatorname{ch} \geq 0}{\Leftrightarrow} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{2}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{argch}\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \operatorname{argch}\left(\sqrt{\frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{2}}\right)$$

On ne peut impunément affirmer que $\operatorname{argch}\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{x}{2}$ puisque argch réalise seulement une bijection de $[1, +\infty[$ sur



$[0, +\infty[$. Par conséquent, si $\frac{x}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$, on a
 $\operatorname{argch}\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{x}{2}$ et si $\frac{x}{2} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$, on a, par parité de ch ,

$$\operatorname{argch}\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \operatorname{argch}\left(\operatorname{ch}\left(-\frac{x}{2}\right)\right) \underset{-x/2 \geq 0}{=} -\frac{x}{2}$$

ce que l'on peut résumer par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argch} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x) + 1}{2}} = \frac{|x|}{2}$$

◀ retour à l'exercice