MPSI-PCSI-PTSI : BIJECTIONS

Abdellah BECHATA

Justifier les encadrements suivants :

1. $\forall x \geqslant 4, \quad \ln x \leqslant \sqrt{x}.$ solution
2. $\forall x \geqslant 0, \quad 1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + xe^x.$ solution
3. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall b \in \mathbb{R}_+^\times \quad ab \leqslant b \ln b + e^{a-1}$
   Indication : *On travaillera à b fixé.* solution

1. Combien de solutions l'équation $x^3 - 3x = m$ admet-elle selon les valeurs du réel m ? ▸ solution
2. Même question avec l'équation $x\ln(x) = m$. ▸ solution

Soient (p, q) deux réels. On considère l'équation
$(\mathcal{E}_{p,q}) : x^3 + px + q = 0.$
Compter le nombre de solutions réelles à l'équation $(\mathcal{E}_{p,q})$ selon les valeurs de p et q. ▸ solution

Résoudre l'équation $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$ par deux méthodes différentes.

▸ solution

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^\times$ tels que $a^a = b$ et $b^b = a$.
Montrer que $a = b = 1$. ▸ solution

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1. $$\begin{cases} x + y = 520 \\ \log_{10} x + \log_{10} y = 4 \end{cases}$$

solution

2. $$\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 15 \\ e^x e^y e^z = e^6 \\ \ln(3^x 3^y) = z \ln 3 \end{cases}$$

solution

Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x^2 - 1) + \ln 4 = \ln(4x - 1)$. solution
2. $\dfrac{1}{2}\ln(x-1) + \ln(x+1) = 2 + \ln\left(\sqrt{1+x}\right)$. solution
3. $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$. solution
4. $2\ln x + \ln(2x-1) = \ln(2x+8) + 2\ln(x-1)$. solution
5. $e^x + e^{-x} = 2a$, a étant un réel fixé. solution
6. $e^x - e^{-x} = 2a$, a étant un réel fixé. solution
7. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x} = a$. solution
8. $2^x = 3^x$. solution

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{1}{2}\ln(3x-1) < \ln(x+1)$. solution
2. $2^x > 3^x$. solution
3. $2^{x+1} + 8 \geqslant 4^x$. solution

Justifier les encadrements suivants :

1. $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x-1}{3x+4}\right)$. ▸ solution
2. $f : x \mapsto \frac{x^2 - x}{x-3}$. ▸ solution
3. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x+1}$. ▸ solution
4. $f : x \mapsto x^2 e^{-x^2}$. ▸ solution
5. $f : x \mapsto \ln(x^2+1)$. ▸ solution
6. $f : x \mapsto x\ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$. ▸ solution
7. $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$. ▸ solution
8. $f : x \mapsto x^{1+\frac{1}{x}}$. ▸ solution

On considère la fonction $f : x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer qu'elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle à expliciter. ▸ solution
2. Représenter graphiquement $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ puis calculer f^{-1}. ▸ solution

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{2x} - 2e^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à expliciter. solution
2. Représenter graphiquement $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ puis calculer f^{-1}. solution

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)$.

Montrer qu'elle réalise une bijection de $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer f^{-1}.

solution

On introduit la fonction $f : x \mapsto x + \ln(x)$.

1. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $\mathbb{R}$ puis résoudre l'équation $x + \ln(x) = 1$. solution
2. Justifier l'existence d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) + \ln(g(x)) = x$. solution
3. Quelle la monotonie de la fonction g ? Que vaut $g(1)$? En déduire le signe de $g(x)$ lorsque $x \geqslant 1$. solution
4. Comparer $g(x)$ à x puis $g(x)$ à $x - \ln(x)$ lorsque $x \geqslant 1$. solution

On introduit la fonction $f : x \mapsto x^3 + x$.

1. Justifier que la fonction f définie une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. ▸ solution
2. Résoudre les équations
   $x^3 + x = 0, \quad x^3 + x = 2, \quad x^3 + x = 3\sqrt{2}$. ▸ solution
3. Prouver l'existence d'une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (g(x))^3 + g(x) = x$. ▸ solution
4. Quelle est sa monotonie ? Sa parité ? Sa limite en $\pm\infty$? Sa représentation graphique ? ▸ solution
5. Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) \leqslant \sqrt[3]{x}$. Etudier alors l'existence d'asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$. ▸ solution

1. On introduit la fonction auxiliaire $f : x \mapsto \ln(x) - \sqrt{x}$ qui est dérivable sur $[4, +\infty[$ comme somme de deux telles fonctions et on a

$$\forall x \geqslant 4, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{2x} \leqslant 0$$

Ainsi la fonction f est décroissante sur $[4, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f(4) &= \ln 4 - \sqrt{4} = \ln(2^2) - 2 = 2\ln(2) - 2 \\ &= 2\left(\ln(2) - 1\right) \leqslant 2\left(\ln(e) - 1\right) = 0 \end{aligned}$$

donc f est négative sur $[4, +\infty[$ ce qui démontre l'inégalité souhaitée. retour à l'exercice

2. On commence par remarquer que

$$1+x \leqslant e^x \leqslant 1+xe^x \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x \leqslant e^x \\ \text{et} \\ e^x \leqslant 1+xe^x \end{cases}$$

On introduit les deux fonctions auxiliaires $f : x \mapsto 1+x-e^x$ et $g : x \mapsto e^x - 1 - xe^x$. Elles sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et produit de telles fonctions et leurs dérivées sont données, pour tout $x \geqslant 0$, par

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - e^x \leqslant 1 - e^0 = 1 \\ g'(x) &= e^x - (e^x + xe^x) = -xe^x \leqslant 0 \end{aligned}$$

Elles sont donc toutes les deux décroissantes sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0) = 0, \quad g(0) = 0$ donc elles sont toutes deux négatives sur $\mathbb{R}_+$ ce qui démontre l'encadrement souhaité.

retour à l'exercice

3. On fixe b et on considère la fonction de la variable réelle x définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = b \ln b + e^{x-1} - bx$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de telles fonctions et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = e^{x-1} - b$. Par conséquent $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = \ln b + 1$. La fonction f' est négative sur $]-\infty, 1 + \ln(b)]$ et elle ne s'annule qu'en $1 + \ln(b)$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1 + \ln(b)]$. La fonction f est positive sur $[1 + \ln(b), +\infty[$ et elle ne s'annule qu'en $1 + \ln(b)$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 1 + \ln(b)]$. Par conséquent, la fonction f atteint son minimum strict en $1 + \ln(b)$ et ce minimum vaut 0 donc f est positive sur $\mathbb{R}$ et elle ne s'annule qu'en $x = 1 + \ln(b)$. retour à l'exercice

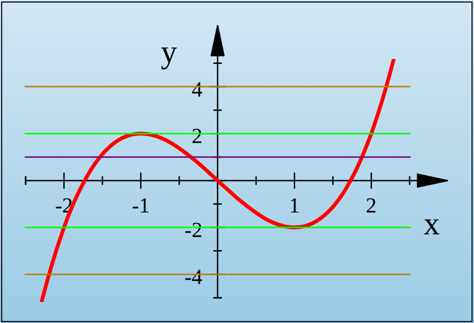
1. On introduit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x$ qui est paire donc il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. On étudie les variations de f sur $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de deux telles fonctions et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

Son tableau de variation est alors

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

ce qui montre que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. On dispose de tangentes verticales à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 1$ (et par imparité en $x = -1$) et la représentation graphique de f est



On constate alors visuellement que

- si $m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ alors m admet un seul antécédent par f i.e. l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution réelle.
- si $m \in \{-2, 2\}$ alors m admet deux antécédents distincts par f i.e. l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions réelles distinctes.
- si $m \in]-2, 2[$ alors m admet trois antécédents distincts par f i.e. l'équation $f(x) = m$ admet trois solutions réelles distinctes.

Pour justifier rigoureusement cette constatation graphique, on va invoquer le théorème de bijection continu sur différents intervalles. On commence par justifier que 2 et -2 admettent exactement deux antécédents sur $\mathbb{R}$.

- $m \in \{-2, 2\}$: La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ (car sa dérivée est positive sur cet intervalle et elle ne s'annule qu'une fois) donc elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f\left([1, +\infty[\right) = [-2, +\infty[$. Par conséquent, $2 \in [-2, +\infty[$ admet un et un seul antécédent, noté α, par f appartenant à $[1, +\infty[$. Etant donné que $f\left([0, 1[\right) =]-2, 0]$, on est assuré que 2 n'admet pas d'antécédent sur $[0, 1[$ donc 2 admet un et un seul antécédent $\alpha > 1$ sur $\mathbb{R}_+$ (une autre racine évidente à l'équation est 2 donc $\alpha = 2$ en fait mais cela n'est pas utile pour les raisonnements)
Par le même argumentaire, on obtient que 2 admet un et un seul antécédent par f qui appartienne à $\mathbb{R}_+$ (il s'agit de 1). Par imparité, -2 admet un et un seul antécédent $-\alpha < -1$ par f appartenant à $\mathbb{R}_-$ et 2 admet un et un seul antécédent par f appartenant à $\mathbb{R}_-$ (qui est -1).
Conclusion : Le réel 2 (resp. -2) admet exactement deux antécédents distincts -1 et α (resp. 1 et $-\alpha$) par f sur $\mathbb{R}$

c'est-à-dire que l'équation $f(x) = 2$ (resp. $f(x) = -2$) admet exactement deux solutions réelles.
On obtient ainsi le tableau de variation de f complété par $\pm\alpha$

x	$-\infty$		$-\alpha$		-1		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

- $m \in \left]-\infty, -2\right[$: La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty, -\alpha\right[$ (car $f' > 0$ sur cet intervalle) donc elle réalise une bijection de $\left]-\infty, -\alpha\right[$ sur $f\left(\left]-\infty, -\alpha\right[\right) = \left]-\infty, -2\right[$. Par conséquent, tout élément $m \in \left]-\infty, -2\right[$ admet un et un seul antécédent appartenant à $\left]-\infty, -\alpha\right[$. Etant donné que $f\left(\left[-\alpha, +\infty\right[\right) = \left[-2, +\infty\right[$ le réel m ne peut avoir d'antécédent appartenant à $\left[-\alpha, +\infty\right[$.
  Conclusion : tout réel $m \in \left]-\infty, -2\right[$ admet un et un seul antécédent par f sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire que l'équation $f(x) = m$ admet une et une seule solution réelle.
- $m \in \left]2, +\infty\right[$: $-m \in \left]-\infty, -2\right[$ donc il admet un et un seul antécédent m_1 par f appartenant à $\mathbb{R}$ donc, par imparité, m admet un et un seul antécédent $-m_1$ par f appartenant à $\mathbb{R}$.
  Conclusion : tout réel $m \in \left]2, +\infty\right[$ admet un et un seul antécédent par f sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire que l'équation $f(x) = m$ admet une et une seule solution réelle.

- $\underline{m \in \left]-2,2\right[}$: La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left]-\alpha,-1\right[$ (car $f' > 0$ sur cet intervalle) donc elle réalise une bijection de $\left]-\alpha,-1\right[$ sur $f\left(\left]-\alpha,-1\right[\right) = \left]-2,2\right[$.
  Par conséquent, tout élément $m \in \left]-2,2\right[$ admet un et un seul antécédent m_1 par f appartenant à $\left]-\alpha,-1\right[$.
  En procédant de même pour les intervalles $\left]-1,1\right[$ et $\left]1,\alpha\right[$, on obtient que m admet un et un seul antécédent m_2 (resp. m_3) sur $\left]-1,1\right[$ (resp. $\left]1,\alpha\right[$).
  Par ailleurs, m ne peut posséder d'antécédent par f appartenant à $\mathbb{R}\setminus\left]-\alpha,\alpha\right[$ puisque $f(\mathbb{R}\setminus\left]-\alpha,\alpha\right[) = \mathbb{R}\setminus\left]-2,2\right[$.
  Conclusion : tout réel $m \in \left]-2,2\right[$ admet m admet trois antécédents m_1, m_2 et m_3 par f appartenant à $\mathbb{R}$ et ils sont distincts puisque l'on a

$$-\alpha < m_1 < -1 < m_2 < 1 < m_3 < \alpha$$

c'est-à-dire que l'équation $f(x) = m$ admet trois racines réelles distinctes.

retour à l'exercice

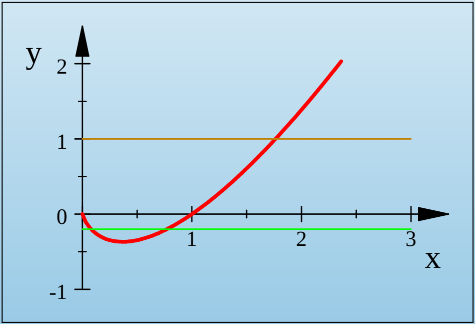
2. On introduit la fonction $f : x \mapsto x\ln(x)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ comme produit de deux telles fonctions et sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f'(x) &= \ln(x) + x.\frac{1}{x} = \ln(x) + 1 > 0 \\ \Leftrightarrow \ln(x) &> -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Son tableau de variation est alors

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 $\|$	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour la limite en 0, utilise les croissances comparées. On a une tangente horizontale au point d'abscisse $x = \dfrac{1}{e}$ et la représentation graphique de f est



On constate alors visuellement que

- si $m < -\dfrac{1}{e}$ alors m n'admet par d'antécédent par f appartenant à $\mathbb{R}_+^\times$
- si $m \in \left\{-\dfrac{1}{e}\right\} \cup \mathbb{R}_+$ alors m admet un seul antécédent par f appartenant à $\mathbb{R}_+^\times$ i.e. l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution réelle.
- si $m \in \left]-\dfrac{1}{e}, 0\right[$ alors m admet deux antécédents distincts par f appartenant à $\mathbb{R}_+^\times$ i.e. l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions réelles distinctes.

Pour justifier rigoureusement cette constatation graphique, on va invoquer le théorème de bijection continu sur différents intervalles. On commence par justifier que $-\dfrac{1}{e}$ et 0 admettent exactement un seul antécédent sur $\mathbb{R}_+^\times$.

- $m = -\dfrac{1}{e}$: On remarque que $f\left(\mathbb{R}_+^\times \setminus \left\{-\dfrac{1}{e}\right\}\right) = \left]-\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ donc $-\dfrac{1}{e}$ n'admet aucun antécédent par f appartenant à $\mathbb{R}_+^\times \setminus \left\{-\dfrac{1}{e}\right\}$ et comme $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$, on est assuré que $-\dfrac{1}{e}$ admet un et un seul antécédent par f appartenant à $\mathbb{R}_+^\times$.

  Conclusion : L'équation $f(x) = -\dfrac{1}{e}$ admet une unique solution réelle qui est $-\dfrac{1}{e}$.
- $m = 0$. On résout directement l''équation $f(x) = 0 \Leftrightarrow x\ln(x) = 0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

  Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle qui est 1.

- $m \in \mathbb{R}_+^\times$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $]1, +\infty[$ (car $f' > 0$ sur cet intervalle) donc elle réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $f(]1, +\infty[) = \mathbb{R}_+^\times$. Par conséquent, m admet un et un seul antécédent par f appartenant à $]1, +\infty[$ et, puisque $f(]0, 1]) = \left[-\dfrac{1}{e}, 0\right]$, m ne peut avoir d'antécédent par f appartenant à $]0, 1]$ ce qui entraine qu'il admet un et un seul antécédent par f appartenant à $\mathbb{R}_+^\times$.
  Conclusion : L'équation $f(x) = m$ admet une unique solution réelle.
- $m \in \left]-\dfrac{1}{e}, 0\right[$: De même, la fonction f réalise une bijection de $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$ sur $f\left(\left]0, \dfrac{1}{e}\right[\right) = \left]-\dfrac{1}{e}, 0\right[$ donc m admet un et un seul antécédent par f appartenant à $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$. Elle réalise également une bijection de $\left]\dfrac{1}{e}, 1\right[$ sur $f\left(\left]\dfrac{1}{e}, 1\right[\right) = \left]-\dfrac{1}{e}, 0\right[$

donc m admet un et un seul antécédent par f appartenant à $\left]\frac{1}{e},1\right[$. Pour finir, puisque $f\left(\left\{\frac{1}{e}\right\}\cup[1,+\infty[\right)=\left\{-\frac{1}{e}\right\}\cup[0,+\infty[$, m ne peut avoir d'antécédent par f appartenant à $\left\{\frac{1}{e}\right\}\cup[1,+\infty[$ ce qui entraine qu'il admet deux antécédents par f appartenant à $\mathbb{R}_+^\times$ et ils sont distincts car l'un appartient à $\left]0,\frac{1}{e}\right[$ et l'autre à $\left]\frac{1}{e},1\right[$.

Conclusion : L'équation $f(x)=m$ admet deux solutions réelles distinctes.

retour à l'exercice

A finir ◂ retour à l'exercice

Cette équation n'a un sens que si $x \geqslant 0$.

- **Première méthode** : On effectue alors le changement de variable $X = x^{1/6} \Leftrightarrow x = X^6$ (puisque $x \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$) ce qui nous donne

$$\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow \left(X^6\right)^{1/2} + \left(X^6\right)^{1/3} = 2$$
$$\Leftrightarrow X^3 + X^2 = 2 \Leftrightarrow X^3 + X^2 - 2 = 0$$

Une racine évidente est $X = 1$ donc on peut factoriser $X^3 + X^2 - 2$ par $X - 1$. Il existe donc trois réels a, b, c tels que

$$\forall X \in \mathbb{R}, \quad X^3 + X^2 - 2 = (X-1)(aX^2 + bX + c)$$

En considérant les coefficients dominant et constant et en évaluant en $X=-1$, on obtient

$$\begin{cases} 1 = 1.a \\ -2 = -1.c \\ -2 = -2(a-b+c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad X^3+X^2-2 = (X-1)\left(X^2+2X+2\right)$$

Le trinôme X^2+2X+2 a un discriminant strictement négatif donc il ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ ce qui nous donne

$$\sqrt{x}+\sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow X-1=0 \Leftrightarrow X=1 \Leftrightarrow x^{1/6}=1 \Leftrightarrow x=1^6=1$$

Par conséquent, l'équation considérée admet une unique solution réelle qui est $x=1$.

- **Deuxième méthode** : La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (comme somme de deux telles fonctions) donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+) = \underline{\mathbb{R}_+}$. Puisque $2 \in \underline{\mathbb{R}_+}$, on en déduit que 2 admet un et un seul antécédent par f appartenant à $\mathbb{R}_+$ autrement dit l'équation $f(x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$ admet une et une seule solution réelle. Puisque $x = 1$ est une solution évidente, c'est la seule.

retour à l'exercice

On a $(a^a)^b = b^b = a$, donc $a^{ab} = a$ et $ab = 1$. Par conséquent, on a $a^a = \dfrac{1}{a}$.

- **Premier cas** : si $a \in]0,1[$ alors $a^a \in]0,1[$ donc $\dfrac{1}{a} = a^a \in]0,1[$, ce qui est impossible car $\dfrac{1}{a} > 1$.
- **Second cas** $a \in]1,+\infty[$: alors $a^a \in]1,+\infty[$ce qui entraine que $\dfrac{1}{a} = a^a \in]1,+\infty[$, ce qui est impossible car $0 < \dfrac{1}{a} < 1$.

On en déduit que la seule possibilité est $a = 1$, qui est bien solution de l'équation $a^a = \dfrac{1}{a}$ et b vaut alors $b = \dfrac{1}{a} = 1$.

◂ retour à l'exercice

1. Rappelons que si x, y, a, b sont quatre réels, le système $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$ est équivalent au fait que x et y soient racines du trinôme $X^2 - aX + b$..
Le système considéré par l'énoncé a un sens lorsque x et y sont strictement positifs (pour la seconde équation, la première n'imposant aucune contrainte) et l'on a

$$\begin{cases} x+y & = & 520 \\ \log_{10} x + \log_{10} y & = & 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y & = & 520 \\ xy & = & 10000 \end{cases}$$

Par conséquent, x et y sont solutions de l'équation du second degré $X^2 - 520X + 10000 = 0$ dont les racines sont 20 et 500. On en déduit immédiat que les solutions du système initial sont $(x, y) = (20, 500)$ ou $(x, y) = (500, 20)$.

retour à l'exercice

2. Comme ln et exp réalisent des bijections, on a l'équivalence :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2^x+2^y+2^z & = & 15 \\ e^x e^y e^z & = & e^6 \\ \ln(3^x 3^y) & = & z\ln 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2^x+2^y+2^z & = & 15 \\ x+y+z & = & 6 \\ x+y & = & z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2^x+2^y+2^z & = & 15 \\ x+y & = & 3 \\ z & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 3 \\ y & = & 3-x \\ 2^x+2^{3-x}+2^3 & = & 15 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 3 \\ y & = & 3-x \\ 2^x+8.2^{-x} & = & 7 \end{array}\right.$$

Pour cette dernière équation, on pose le changement de variable $X = 2^x$ et remarquant que $X \neq 0$, on a On travaille sur la première équation avec $z = 3$:

$$X + \frac{8}{X} = 7 \Leftrightarrow \frac{X^2+8}{X} = 7 \Leftrightarrow X^2 - 7X + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} X = \dfrac{7+\sqrt{17}}{2} > 0 \\ \text{ou} \\ X = \dfrac{7-\sqrt{17}}{2} > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} e^x = \dfrac{7+\sqrt{17}}{2} > 0 \\ \text{ou} \\ e^x = \dfrac{7-\sqrt{17}}{2} > 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \ln\left(\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}\right) \\ \text{ou} \\ x = \ln\left(\dfrac{7-\sqrt{17}}{2}\right) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \ln\left(\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}\right), \quad y = 3 - \ln\left(\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}\right), \quad z = 3 \\ \text{ou} \\ x = \ln\left(\dfrac{7-\sqrt{17}}{2}\right), \quad y = 3 - \ln\left(\dfrac{7-\sqrt{17}}{2}\right), \quad z = 3 \end{array} \right.$$

retour à l'exercice

1. Cette équation a un sens lorsque l'on a simultanément

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ 4x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[\\ x \in \left]-\dfrac{1}{4},+\infty\right[\end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]1,+\infty\right[$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \ln(x^2-1)+\ln 4 = \ln(4x-1) &\Leftrightarrow \ln[4(x^2-1)] = \ln(4x-1) \\ &\Leftrightarrow 4(x^2-1) = 4x-1 \Leftrightarrow 4x^2-4x-3=0 \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation du second degré sont $x=-\dfrac{1}{2}$ ou $x=\dfrac{3}{2}$. La première valeur étant interdite (puisque l'on a nécessairement $x>1$), l'équation initiale ne possède qu'une unique solution $x = \dfrac{3}{2}$.

◂ retour à l'exercice

2. Cette équation a un sens lorsque a simultanément

$$\left\{\begin{array}{c} x-1>0 \\ x+1>0 \\ \sqrt{1+x}>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x>1 \\ x>-1 \\ x>-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left]1,+\infty\right[$$

Dans ce cas, on a

$$\frac{1}{2}\ln(x-1)+\ln(x+1) = 2+\frac{1}{2}\ln(1+x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(x+$$
$$\Leftrightarrow \ln(x-1)+\ln(x+1) = 4 \Leftrightarrow \ln[(x-1)(x+1)] = 4$$
$$\Leftrightarrow x^2-1 = e^4 \Leftrightarrow x^2 = 1+e^4 \underset{x>1\geqslant 0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{1+e^4}$$

◂ retour à l'exercice

3. Cette équation a toujours un sens et l'on a :

$$2^{x+4}+3^x=2^{x+2}+3^{x+2} \Leftrightarrow 2^4\times 2^x-2^2\times 2^x=3^2\times 3^x-3^x$$
$$\Leftrightarrow 2^x(2^4-2^2)=3^x(3^2-1) \Leftrightarrow 3\times 2^x=2\times 3^x \Leftrightarrow$$
$$3e^{x\ln 2}=2e^{x\ln 3} \Leftrightarrow e^{x(\ln 3-\ln 2)}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=1$$

◂ retour à l'exercice

4. Cette équation a un sens lorsque l'on a simultanément

$$\left\{\begin{array}{c} x>0 \\ 2x-1>0 \\ 2x+8>0 \\ x-1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x>0 \\ x>1/2 \\ x>-4 \\ x>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\,]1,+\infty[$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} 2\ln x + \ln(2x-1) &= \ln(2x+8) + 2\ln(x-1) \\ \Leftrightarrow \ln(x^2(2x-1)) &= \ln((2x+8)(x-1)^2) \\ \Leftrightarrow x^2(2x-1) &= (2x+8)(x-1)^2 \\ \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 &= 2x^3 - 4x^2 + 2x + 8x^2 - 16x + 8 \\ \Leftrightarrow 5x^2 - 14x + 8 = 0 &\Leftrightarrow x \in \left\{2, \frac{4}{5}\right\} \\ \Leftrightarrow x &= 2 \text{ car } x > 1 \end{aligned}$$

retour à l'exercice

5. On remarque pour commencer que $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ et que a doit être strictement positif (puisqu'il est la somme de deux réels strictement positifs). On suppose dorénavant que $a > 0$ et on effectue le changement de variable $X = e^x$ ce qui nous donne

$$\begin{aligned}(\mathcal{E}) \quad : \quad & e^x + e^{-x} = 2a \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = 2a \Leftrightarrow \frac{X^2+1}{X} = 2a \\ \Leftrightarrow \quad & X^2 + 1 = 2aX \Leftrightarrow X^2 - 2aX + 1 = 0\end{aligned}$$

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = (2a)^2 - 4 = 4(a^2 - 1)$.

- Si $a^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow a^2 < 1 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} a < 1$ alors l'équation $(\mathcal{E}')$ n'admet aucune solution réelle ce qui entraine que l'équation $(\mathcal{E})$ n'en admet également aucune.

- Si $a^2 - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 \geqslant 1 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} a \geqslant 1$ alors on a

$$(\mathcal{E}) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} X = \dfrac{2a + \sqrt{4(a^2-1)}}{2} \\ \text{ou} \\ X = \dfrac{2a - \sqrt{4(a^2-1)}}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} X = \dfrac{2a + 2\sqrt{a^2-1}}{2} \\ \text{ou} \\ X = \dfrac{2a - 2\sqrt{a^2-1}}{2} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} X = a + \sqrt{a^2-1} \\ \text{ou} \\ X = a - \sqrt{a^2-1} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} e^x = a + \sqrt{a^2-1} \\ \text{ou} \\ e^x = a - \sqrt{a^2-1} \end{array} \right.$$

On remarque ensuite que $\sqrt{a^2+1} > \sqrt{a^2} \underset{a>0}{=} a$ donc $a - \sqrt{a^2+1} < 0$ ce qui entraine que l'équation $e^x = a - \sqrt{a^2-1}$ est impossible dans $\mathbb{R}$. Etant donné que

$a+\sqrt{a^2+1}>0$ (car $a>0$), l'autre équation est possible donc

$$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow x=\ln\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)$$

Conclusion : L'équation $e^x+e^{-x}=2a$ admet aucune solution réelle si $a<1$ et admet une unique solution réelle si $a\geqslant 1$ qui est $x=\ln\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)$.

◂ retour à l'exercice

6. On remarque pour commencer que $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ puis on effectue le changement de variable $X=e^x$ ce qui nous donne

$$\begin{aligned}(\mathcal{E}) \quad : \quad & e^x-e^{-x}=2a \Leftrightarrow X-\frac{1}{X}=2a \Leftrightarrow \frac{X^2-1}{X}=2a \\ \Leftrightarrow \quad & X^2-1=2aX \Leftrightarrow (\mathcal{E}') : X^2-2aX-1=0\end{aligned}$$

Le discriminant de ce trinôme est
$\Delta = (2a)^2 + 4 = 4a^2 + 4 > 0$ donc il admet deux racines réelles distinctes.

$$(\mathcal{E}) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} X = \dfrac{2a + \sqrt{4(a^2+1)}}{2} \\ \text{ou} \\ X = \dfrac{2a - \sqrt{4(a^2+1)}}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} X = \dfrac{2a + 2\sqrt{a^2+1}}{2} \\ \text{ou} \\ X = \dfrac{2a - 2\sqrt{a^2+1}}{2} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} X = a + \sqrt{a^2+1} \\ \text{ou} \\ X = a - \sqrt{a^2+1} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} e^x = a + \sqrt{a^2+1} \\ \text{ou} \\ e^x = a - \sqrt{a^2+1} \end{array} \right.$$

On remarque ensuite que

$$\sqrt{a^2+1} \quad > \quad \sqrt{a^2} = |a| \geqslant \left\{ \begin{array}{c} a \\ -a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -a+\sqrt{a^2+1} > 0 \\ a+\sqrt{a^2+1} > 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a-\sqrt{a^2+1} < 0 \\ a+\sqrt{a^2+1} > 0 \end{array} \right.$$

ce qui entraine que l'équation $e^x = a - \sqrt{a^2+1}$ est impossible dans $\mathbb{R}$ tandis que l'autre équation est possible ce qui nous donne

$$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow x = \ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)$$

Conclusion : L'équation $e^x - e^{-x} = 2a$ admet une unique solution réelle quel que soit a dans $\mathbb{R}$ et cette solution vaut

$$x = \ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right).$$

◂ retour à l'exercice

7. On remarque pour commencer que $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ puis on effectue le changement de variable $X = e^x$ ce qui nous donne

$$(\mathcal{E}) \quad : \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = a \Leftrightarrow \frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} = a \Leftrightarrow \frac{\frac{X^2-1}{X}}{\frac{X^2+1}{X}} = a$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{X^2-1}{X} . \frac{X}{X^2+1} = a \Leftrightarrow \frac{X^2-1}{X^2+1} = a$$

$$\Leftrightarrow \quad X^2 - 1 = a(X^2+1) \Leftrightarrow X^2(1-a) = a+1$$

Si $1-a=0 \Leftrightarrow a=1$, alors $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow (\mathcal{E}') \Leftrightarrow 0=2$ ce qui est absurde. On suppose donc $a \neq 1$ ce qui nous donne

$$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow X^2 = \frac{a+1}{1-a} \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{a+1}{1-a}$$

cette équation ne peut avoir des solutions que si $\dfrac{a+1}{1-a} > 0 \Leftrightarrow a \in \left]-1,1\right[$ (faire le tableau de signe de $\dfrac{a+1}{1-a}$).
Lorsque $a \in \left]-1,1\right[$, on a

$$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{a+1}{1-a}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a+1}{1-a}\right)$$

Conclusion : L'équation $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = a$ admet aucune solution si $|a| \geqslant 1$ et si $|a| < 1$ alors elle admet une unique solution réelle qui vaut $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a+1}{1-a}\right)$.

retour à l'exercice

8. Cette équation a toujours un sens et on a

$$\begin{aligned} 2^x &= 3^x \Leftrightarrow e^{x\ln(2)} = e^{x\ln(3)} \Leftrightarrow x\ln(2) = x\ln(3) \\ &\Leftrightarrow x(\ln(2)-\ln(3)) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

car $2 < 3 \Leftrightarrow \ln(2) < \ln(3)$ donc $\ln(2) - \ln(3) \neq 0$.

retour à l'exercice

1. L'inégalité a un sens lorsque l'on a simultanément

$$\left\{\begin{array}{c} 3x-1>0 \\ x+1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x>1/3 \\ x>-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{3},+\infty\right[$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\ln(3x-1) < \ln(x+1) &\Leftrightarrow \ln(3x-1) < 2\ln(x+1) \\ &\Leftrightarrow \ln(3x-1) < \ln[(x+1)^2] \\ &\Leftrightarrow \exp\{\ln(3x-1)\} < \exp\{\ln[(x+1)^2]\} \\ &\Leftrightarrow 3x-1 < (x+1)^2 \Leftrightarrow 0 < x^2-x+2 \end{aligned}$$

Le trinôme x^2-x+2 possède un discriminant strictement négatif donc il est de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son coefficient dominant étant strictement positif, on en déduit que

$x^2 - x + 2 > 0$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, sous réserve que l'inéquation initiale ait un sens, l'inéquation initiale est toujours vraie, ce qui entraine qu'elle est vérifiée si et seulement si $x \in \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

◂ retour à l'exercice

2. L'inéquation a toujours un sens et l'on a

$$\begin{aligned} 2^x &> 3^x \Leftrightarrow e^{x\ln 2} > e^{x\ln 3} \Leftrightarrow x\ln 2 > x\ln 3 \\ \Leftrightarrow & \ x\underbrace{\left(\ln 2 - \ln 3\right)}_{<0} > 0 \Leftrightarrow x < 0 \end{aligned}$$

Ainsi l'inéquation initiale est vérifiée si et seulement si $x \in \mathbb{R}_-^\times$. ◂ retour à l'exercice

3. L'inéquation a toujours un sens. En remarquant que $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, on a

$$2^{x+1} + 8 \geqslant 4^x \Leftrightarrow 2 \times 2^x - (2^x)^2 + 8 \geqslant 0 \underset{X=2^x}{\Leftrightarrow} -X^2 + 2X + 8 \geqslant 0$$

Ce trinôme possède deux racines distinctes réelles -2 et 4 et son coefficient dominant est négatif donc ce trinôme est positif entre ses deux racines, c'est-à-dire lorsque

$$-2 \leqslant X \leqslant 4 \Leftrightarrow -2 \leqslant 2^x \leqslant 4 \qquad (A)$$

Comme le réel 2^x est toujours strictement positif, la contrainte $2^x \geqslant -2$ est toujours vérifiée (puisque $2^x > 0 \geqslant -2$) donc l'encadrement (A) est équivalent à la seule inégalité $2^x \leqslant 4 = 2^2 \Leftrightarrow x \leqslant 2$. Par conséquent, l'inéquation initiale est vérifiée si et seulement si $x \in \left]-\infty, 2\right]$.

◂ retour à l'exercice

1. **Domaine de définition** : La fonction f est définie pour tout réel x tel que $3x+4 \neq 0$ et $\dfrac{x-1}{3x+4} > 0$, ce qui donne $x < -\dfrac{4}{3}$ ou $x > 1$. Le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f est donc $\left]-\infty, -\dfrac{4}{3}\right[\cup]1, +\infty[$.

   Parité, périodicité : $\mathcal{D}_f$ n'étant pas symétrique par rapport à 0, la fonction f n'admet pas de parité. Le domaine de définition n'étant pas stable par translation d'un réel non nul (si c'est le cas alors $\mathbb{R} \backslash \mathcal{D}_f = \left[-\dfrac{4}{3}, 1\right]$ le serait pour un certain réel $T > 0$ donc $1 + T > 1$ serait dans $\mathbb{R} \backslash \mathcal{D}_f$ ce qui est absurde) donc la fonction f n'est pas périodique.

   Monotonie : Les opérations sur les fonctions monotones ne nous permettent pas de conclure. La fonction $x \mapsto \dfrac{x-1}{3x+4}$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ (comme quotient de deux telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas) donc la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ (comme somme de deux telles fonctions) et sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) &= \frac{1}{2} + \left(\frac{x-1}{3x+4}\right)' \cdot \frac{1}{\frac{x-1}{3x+4}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3x+4-3(x-1)}{(3x+4)^2} \cdot \frac{3x+4}{x-1} \\
&= \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{7}{(3x+4)^2}}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{3x+4}{x-1}}_{>0 \text{ du } \mathcal{D}_f} > 0
\end{aligned}$$

ce qui nous donne le tableau de variations de f

x	$-\infty$		$-4/3$	$\|\|$	1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	∞	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Justification des limites :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{x+1}{3x+4} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{3x\left(1+\frac{1}{3x}\right)} = \frac{1}{3}.\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{3x}} \underset{x\to\pm\infty}{\rightarrow} \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{3x+4}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\rightarrow} \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2}x = \pm\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$

Lorsque $x \longrightarrow 1^+$ alors $\dfrac{x-1}{3x+4} \longrightarrow 0^+$ donc $\ln\left(\dfrac{x+1}{3x+4}\right) \longrightarrow -\infty$ et puisque $\dfrac{1}{2}x \longrightarrow \dfrac{1}{2}$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$.

Lorsque $x \longrightarrow \left(-\dfrac{4}{3}\right)^-$ alors $\dfrac{x-1}{3x+4} \longrightarrow +\infty$ ($\dfrac{x+1}{3x+4} > 0$ sur $\mathcal{D}_f$!) donc $\ln\left(\dfrac{x+1}{3x+4}\right) \longrightarrow +\infty$ et puisque $\dfrac{1}{2}x \longrightarrow -\dfrac{2}{3}$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to(-4/3)^-} f(x) = +\infty$.

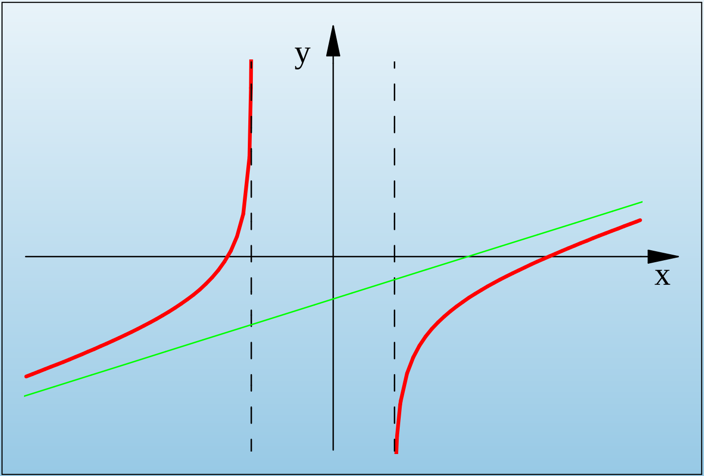
Asymptotes :

- en $-\frac{4}{3}$ et 1 : Puisque $\lim\limits_{x\to(-4/3)^-} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes verticales dont les équation respectives sont $x = -\frac{4}{3}$ et $x = 1$.
- en $\pm\infty$: Etant donné que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{3x+4}\right) = -\ln(3)$, on est assuré que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - \frac{x}{2}\right) = -\ln(3)$ donc la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - \ln(3)$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$. En outre, on a

$$f(x) - \left(\frac{x}{2} + \ln(3)\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{3x+4}\right) \geqslant -\ln(3) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{3x+4} \geqslant \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3x+4} - \frac{1}{3} \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{7}{3(3x+4)} \geqslant 0 \Leftrightarrow 3x+4 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{4}{3}$$

Par conséquent, cette asymptote est en dessous de $\mathcal{C}_f$ en tous les points d'abscisse $x < \dfrac{4}{3}$ et au dessus de $\mathcal{C}_f$ en tous les points d'abscisses $x > 1$.

Tangentes horizontales : Puisque f' en s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$, la courbe $\mathcal{C}_f$ n'admet pas de tangentes horizontales.
Représentation graphique : En trait épais, $\mathcal{C}_f$, en trait fin l'asymptote oblique, en pointillé les asymptotes verticales.



retour à l'exercice

2. **Domaine de définition** : La fonction f est clairement définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.
Parité, périodicité : Puisque $\mathcal{D}_f$ n'est pas symétrique par rapport à l'origine, f ne possède pas de parité. Elle ne possède pas de parité puisque $\mathcal{D}_f$ n'est pas stable par translation d'un réel non nul (sinon, $\mathbb{R}\backslash\mathcal{D}_f$ le serait donc $3 \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{D}_f$ et $3 + T \neq 3$ aussi ce qui est absurde).
Monotonie : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ comme quotient de deux telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}, \quad f'(x) = \frac{(2x-1)(x-3)-(x^2-x)}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{x^2-6x+3}{(x-3)^2}$$

Par conséquent, $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 6x + 3$. Les racines de ce trinôme sont $3 - \sqrt{6}$ et $3 + \sqrt{6}$ et le coefficient dominant du trinôme est $1 > 0$ donc le trinôme est négatif négatif entre ces deux racines et positifs à l'extérieur. On a donc le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		$3-\sqrt{6}$		3		$3+\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$\|$		0		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$5-2\sqrt{6}$	$\searrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\searrow$	$5+2\sqrt{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

Justification des limites :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,3\},\quad f(x) = \frac{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}$$

$$= \underbrace{x}_{\to\pm\infty} \cdot \underbrace{\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x}}}_{\to 1} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$$

$$f(x) = \frac{\overbrace{x(x-1)}^{\to 6}}{\underbrace{x-3}_{\to 0^-}} \underset{x\to 3^-}{\longrightarrow} -\infty,\quad f(x) = \frac{\overbrace{x(x-1)}^{\to 6}}{\underbrace{x-3}_{\to 0^+}} \underset{x\to 3^+}{\longrightarrow} +\infty$$

Asymptotes :

- en 3 : Puisque $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x\to 3^{+-}} f(x) = +\infty$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale dont l'équation est $x = 3$.
- en $\pm\infty$: Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on étudie $\dfrac{f(x)}{x}$. Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,3\}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \frac{x^2-x}{x(x-3)} = \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 1, \\
f(x)-1.x &= \frac{x^2-x-x(x-3)}{x-3} = \frac{2x}{x-3} \\
&= \frac{2x}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \frac{2}{1-\frac{3}{x}} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 2
\end{aligned}$$

donc la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$. En outre, on a

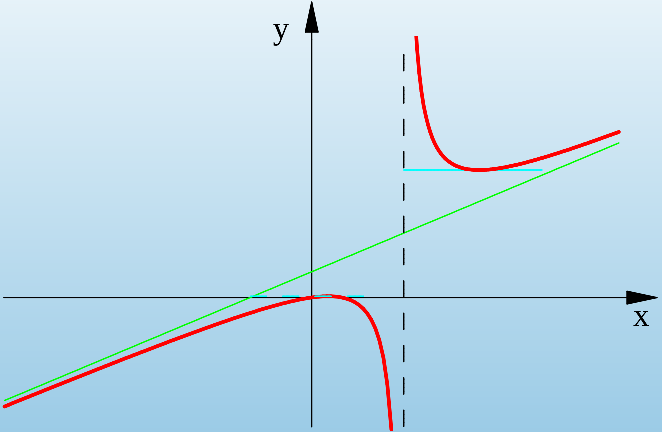
$$\begin{aligned} f(x) - (x+2) &\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - (x-3)(x+2)}{x-3} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{6}{x-3} \geqslant 0 \Leftrightarrow x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 3 \end{aligned}$$

Par conséquent, cette asymptote est en dessous de $\mathcal{C}_f$ en tous les points d'abscisse $x > 3$ et au dessus de $\mathcal{C}_f$ en tous les points d'abscisses $x < 3$.

Tangentes horizontales : Puisque $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{3 - \sqrt{6}, 3 + \sqrt{6}\right\}$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet des tangentes horizontales aux points de coordonnées $x = 3 + \sqrt{6}$ et $x = 3 - \sqrt{6}$ dont les équations respectives sont

$$y = f\left(3 + \sqrt{6}\right) = 5 + 2\sqrt{6}, \quad y = f\left(3 - \sqrt{6}\right) = 5 - 2\sqrt{6} \simeq 0.1$$

Représentation graphique : En trait épais, $\mathcal{C}_f$, en trait fin l'asymptote oblique, les segments continus sont les tangentes horizontales, en pointillé les asymptotes verticales.



retour à l'exercice

3. **Domaine de définition** : La fonction f est clairement définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$.
Parité, périodicité : Puisque $\mathcal{D}_f$ n'est pas symétrique par rapport à l'origine, f ne possède pas de parité. Elle ne possède pas de parité puisque $\mathcal{D}_f$ n'est pas stable par translation d'un réel non nul (sinon, $\mathbb{R}\backslash\mathcal{D}_f$ le serait donc $-1 \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{D}_f$ et $-1+T(>-1) \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{D}_f$ donc $-1+T=0 \Leftrightarrow T=1$ et $0+T=1$ n'appartient pas à $\mathbb{R}\backslash\mathcal{D}_f$ ce qui est absurde).

Monotonie : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$ comme somme de deux telles fonctions et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}, \quad f'(x) &= \frac{-2}{x^3} + \frac{8}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2(4x^3 - x^2 - 2x - 1)}{x^3(x+1)^2} \\ &= \frac{(4x^3 - x^2 - 2x - 1)}{x} \cdot \frac{2}{x^2(x+1)^2} \end{aligned}$$

Comme $x = 1$ est racine évidente de $4x^3 - (x+1)^2$, on peut factoriser ce dernier polynôme par $x - 1$. Il existe donc trois réels a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 4x^3 - x^2 - 2x - 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

En considérant les coefficients dominant et constant et en évaluant en $x = -1$, on obtient

$$\begin{cases} 4 = 1.a \\ -1 = -1.c \\ -4 = -2(a - b + c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad 4x^3 - x^2 - 2x - 1 = (x-1)(4x^2 + 3x + 1)$$

Le trinôme $4x^2 + 3x + 1$ a un discriminant strictement négatif et son coefficient dominant est $4 > 0$ donc il est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, le signe de $f'(x)$ est celui de $\dfrac{x-1}{x}$ dont voici le tableau de signe

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)/x$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

et le tableau de variation de f est

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$		$\Vert$		0		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$	$\searrow$	-3	$\searrow$	0

Justification des limites : Il est immédiat que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= 0, \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty, \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= -\infty, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty. \end{aligned}$$

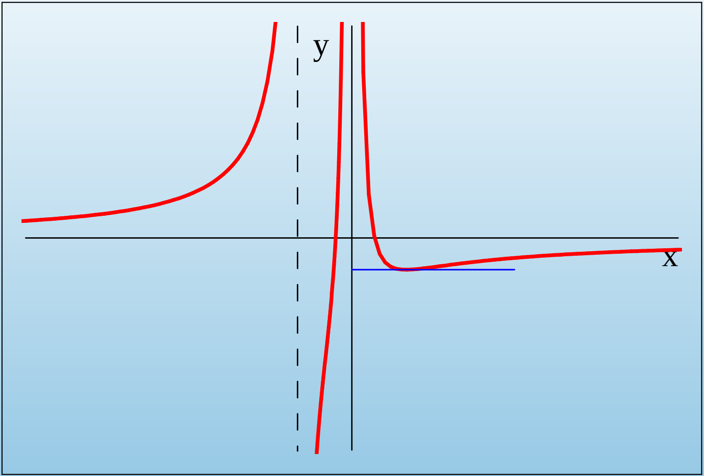
Asymptotes :

- en $-1, 0$: Puisque f tend vers $\pm\infty$ en ces deux points, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes verticales dont les équations respectives sont
$$x = -1, \quad x = 0.$$
- en $\pm\infty$: Puisque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

Tangentes horizontales : Puisque $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point de coordonnée $x = 1$ d'équation

$$y = f(1) = -3$$

Représentation graphique : En trait épais, $\mathcal{C}_f$, en trait fin la tangente horizontale, en pointillé les asymptotes verticales.



retour à l'exercice

4. **Domaine de définition** : La fonction f est clairement définie sur $\mathbb{R}$.
   Parité, périodicité : La fonction f est paire comme produit de fonctions paires donc on peut restreindre le domaine d'étude à $\mathbb{R}_+$. La fonction f n'est pas périodique (sinon si $T > 0$ est une période alors $0 = f(0) = T^2 e^{-T^2} > 0$ ce qui est absurde)
   Monotonie : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de telles fonctions et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2 \times (-2x)e^{-x^2} = 2e^{-x^2}x(1-x^2)$$

Par conséquent, le signe de $f'(x)$ est celui de $x(1-x^2)$ dont voici le tableau de signe

x	0		1		$+\infty$
$1-x^2$		$+$	0	$-$	
x	0	$+$		$+$	
$x(1-x^2)$	0	$+$	0	$-$	

Le tableau de variation de f est alors

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

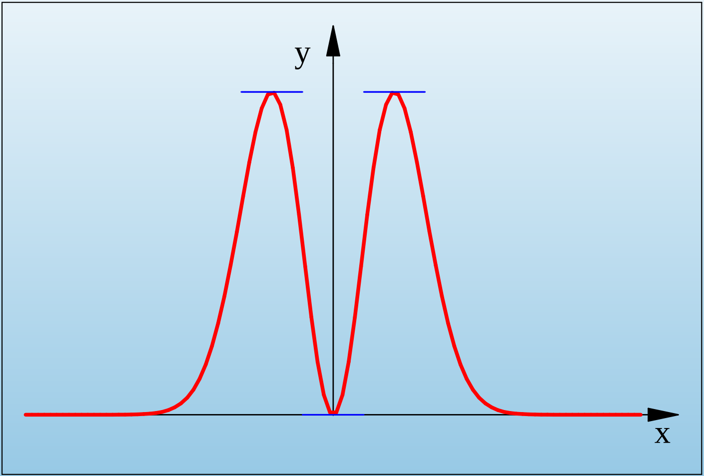
Justification des limites : A l'aide du changement de variable $t = x^2$ (quand $x \to \pm\infty$, $t \to +\infty$) et des croissances comparées, on a

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \underset{t=x^2}{=} \lim_{t \to +\infty} te^{-t} = 0$$

Asymptotes : en $+\infty$: Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.
Tangentes horizontales : Puisque $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale aux points de coordonnées $x = 0$ et $x = 1$ dont les équations respectives sont

$$y = f(0) = 0, \quad y = f(1) = \frac{1}{e}$$

Représentation graphique : En trait épais, $\mathcal{C}_f$, les segments continus correspondent aux tangentes horizontales.



retour à l'exercice

5. **Domaine de définition** : La fonction f est clairement définie sur $\mathbb{R}$.
   Parité, périodicité : La fonction f est paire donc on peut restreindre le domaine d'étude à $\mathbb{R}_+$. La fonction f n'est pas périodique (sinon si $T > 0$ est une période alors $0 = f(0) = \ln(1 + T^2) > \ln(1) = 0$ ce qui est absurde)
   Monotonie : La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme la fonction ln est strictement croissante, par composition la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Le tableau de variation de f est alors (je ne fais pas les limites quand même !)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Asymptotes : en $+\infty$: Puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, on étudie $\dfrac{f(x)}{x}$. En factorisant par le terme dominant en $+\infty$ dans le logarithme et en utilisant les croissances comparées, on a

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} = \frac{\ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$$= \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

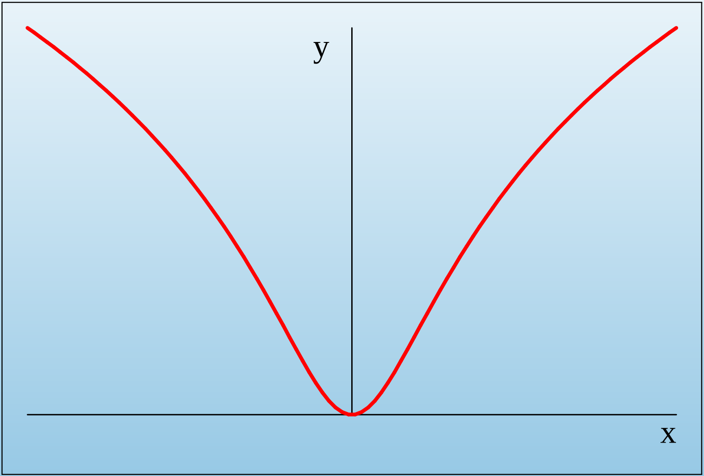
Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Tangentes horizontales :La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puisque la fonction $x \mapsto 1+x^2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ et que la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$. La dérivée de f est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Par conséquent, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point de coordonnées $x = 0$ dont l'équation est $y = f(0) = 0$.

Représentation graphique : En trait épais, $\mathcal{C}_f$.



retour à l'exercice

6. **Domaine de définition** : La fonction f est définie pour toute valeur de x telle que $x \neq 0$ et

$$e + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{ex+1}{x} > 0$$

Le tableau de signe de ce quotient est

x	$-\infty$		$-1/e$		0		$+\infty$
$ex+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$(ex+1)/x$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Par conséquent, le domaine de définition de f est $\left]-\infty, -\frac{1}{e}\right[\cup]0, +\infty[$.

Parité, périodicité : Puisque $\mathcal{D}_f$ n'est pas symétrique par rapport à l'origine, f ne possède pas de parité. Elle ne possède pas de parité puisque $\mathcal{D}_f$ n'est pas stable par translation d'un réel non nul (sinon, $\mathbb{R}\backslash\mathcal{D}_f = \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ le serait pour un certain réel $T > 0$ donc $0 + T = T > 0$ serait dans $\mathbb{R}\backslash\mathcal{D}_f$ ce qui est absurde).

Monotonie : La fonction $x \mapsto e + \frac{1}{x}$ est dérivable et strictement positive sur $\mathcal{D}_f$, la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc la fonction $x \mapsto \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

Pour finir, la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit de deux telles fonctions et on a

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) &= \ln\left(e+\frac{1}{x}\right) + x.\frac{\frac{-1}{x^2}}{e+\frac{1}{x}} \\
&= \ln\left(e+\frac{1}{x}\right) - x.\frac{1}{x^2}\frac{1}{\frac{ex+1}{x}} \\
&= \ln\left(e+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\frac{x}{ex+1} \\
&= \ln\left(e+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{ex+1}
\end{aligned}$$

Comme on ne peut déterminer directement le signe de f', on étudie les variations de f'. Pour cela, on remarque que la fonction f' est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme somme de deux telles fonctions et on a

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathcal{D}_f,\quad f''(x) &= \frac{\frac{-1}{x^2}}{e+\frac{1}{x}}+\frac{e}{(ex+1)^2}\\ &= \frac{-1}{x(ex+1)}+\frac{e}{(ex+1)^2}=\frac{-(xe+1)+ex}{x(ex+1)^2}\\ &= \frac{-1}{x(ex+1)^2}\end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variation de f (on ne cherchera pas à calculer $\lim\limits_{x\to(-1/e)^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ car f' est croissante sur $\left]-\infty,-\dfrac{1}{e}\right[$ et sur $]0,+\infty[$ et comme on a

$\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = 1 > 0$, on en déduit que f' est strictement positive sur $\mathcal{D}_f$).

x	$-\infty$		$-1/e$	$\|$	0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$\|$	$\|$	$\|$	$-$	
$f'(x)$	1	$\nearrow$	$\|$	$\|$	$\|$	$\searrow$	1
$f'(x)$		$+$				$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\|$	0	$\nearrow$	$+\infty$ 0

Justification des limites : Pour la troisième limite, on factorise par le terme dominant dans le logarithme, i.e. par $\dfrac{1}{x}$

(puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $e \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} e$!) puis on utilise les croissances comparées pour le premier terme $x\ln x$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(e+\frac{1}{x}\right) = \ln(e) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

$$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to(-1/e)^-} \ln\left(e+\frac{1}{x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to(-1/e)^-} x = -\frac{1}{e} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to(-1/e)^-} f(x) = +\infty$$

$$f(x) \underset{x>0}{=} x\ln\left(\frac{1}{x}\left[1+ex\right]\right) = x\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(1+ex\right)\right]$$

$$= \left[-\ln(x) + \ln(1+ex)\right] = \underbrace{-x\ln(x)}_{\to 0} + \underbrace{x\ln(1+ex)}_{\to 0} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

Asymptotes :

- en $-\dfrac{1}{e}$: Puisque f tend vers $+\infty$ en $-\dfrac{1}{e}$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale dont l'équation est $x = -\dfrac{1}{e}$.
- en 0 : Puisque f tend vers une limite finie en 0, il n'a pas lieu de considérée d'asymptote au point d'abscisse $x = 0$.
- en $\pm\infty$: Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on étudie $\dfrac{f(x)}{x}$

$$\frac{f(x)}{x} = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \ln(e) = 1$$

On étudie alors $f(x) - 1.x = f(x) - x$. Pour lever l'indétermination, on factorisation par le terme domaine dans le logarithme, ie. e car $\dfrac{1}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\begin{aligned} f(x) - 1.x &= x\left[\ln\left(e + \frac{1}{x}\right) - 1\right] = x\left[\ln\left(e\left(1 + \frac{1}{ex}\right)\right) - 1\right] \\ &= x\left[\ln(e) + \ln\left(1 + \frac{1}{ex}\right) - 1\right] = x\ln\left(1 + \frac{1}{ex}\right) \end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{1}{ex} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$, on se rappelle que

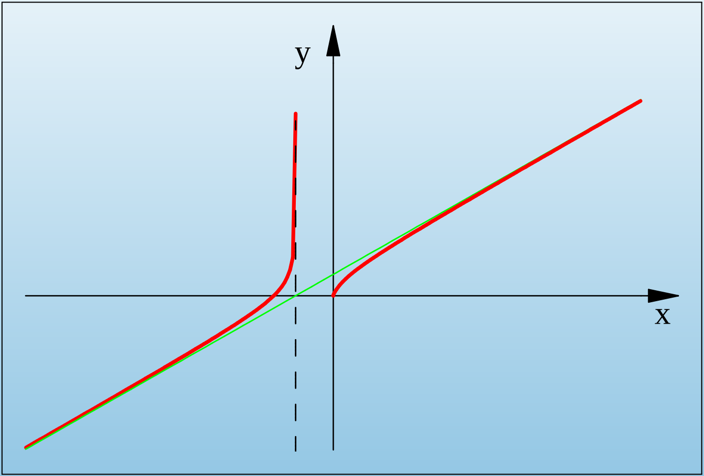
$$\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{ex}\right)}{\frac{1}{ex}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} ex\ln\left(1 + \frac{1}{ex}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} x\ln\left(1 + \frac{1}{ex}\right) = \frac{1}{e}$$

Par conséquent la droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{e}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$. Pour sa position relative, on remarque que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{ex} > 0 \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{ex}\right) > \ln(1) = 0$$
$$\underset{x>0}{\Rightarrow} x\ln\left(1 + \frac{1}{ex}\right) > 0 \Leftrightarrow f(x) - \left(x + \frac{1}{e}\right) > 0$$
$$\forall x < -\frac{1}{e} < 0, \quad \frac{1}{ex} < 0 \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{ex}\right) < \ln(1) = 0$$
$$\underset{x>0}{\Rightarrow} x\ln\left(1 + \frac{1}{ex}\right) > 0 \Leftrightarrow f(x) - \left(x + \frac{1}{e}\right) > 0$$

L'asymptote est ainsi toujours en dessous de $\mathcal{C}_f$.
Tangentes horizontales : Puisque $f' \geqslant 1$ sur $\mathcal{D}_f$, il n'y a pas de tangente horizontale.
Représentation graphique : En trait épais, $\mathcal{C}_f$, en trait fin l'asymptote oblique et pointillé les asymptotes verticales.



retour à l'exercice

7. On commence par remarque que
$f : x \mapsto x^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right)$
Domaine de définition : La fonction f est définie lorsque $x \neq 0$ (pour $\frac{1}{x}$) et $x > 0$ (pour $\ln(x)$) donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^\times$.
Parité, périodicité : Puisque $\mathcal{D}_f$ n'est pas symétrique par rapport à l'origine, f ne possède pas de parité. Elle ne possède pas de parité puisque $\mathcal{D}_f$ n'est pas stable par translation d'un réel non nul (sinon si $T > 0$ est une période, le réel $\frac{T}{2} > 0$ appartient à $\mathcal{D}_f$ donc $\frac{T}{2} - T = -\frac{T}{2} < 0$ devrait y appartenir aussi ce qui est absurde).
Monotonie : On commence par remarquer que la monotonie de f est celle de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}\ln(x)$ (puisque la

fonction $x \mapsto e^x$ est croissante). La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ comme le produit de deux telles fonctions et sa dérivée vaut

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad g'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln(x) + \frac{1}{x}.\frac{1}{x} = \frac{1-\ln(x)}{x^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e$$

On en déduit le tableau de variation de g donc de f

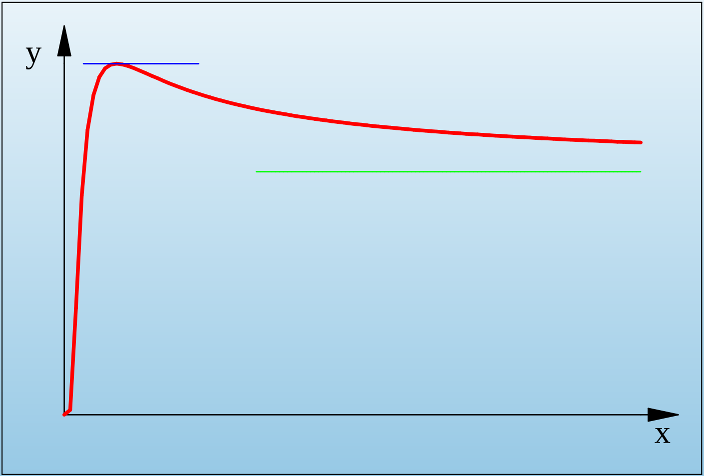
x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$1/e$ $\Vert$	$\searrow$	 0
$f(x)$	$\Vert$ 0	$\nearrow$	$e^{1/e}$	$\searrow$	$+\infty$ 1

Justification des limites : Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$. On applique les croissances comparées pour la limite en $+\infty$.

Asymptotes :

- en 0 : Puisque f tend vers une limite finie en 0, il n'a pas lieu de considérée d'asymptote au point d'abscisse $x = 0$.
- en $+\infty$: Puisque $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 1$, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et elle est en dessous de $\mathcal{C}_f$ lorsque $x \geqslant e$.

Tangentes horizontales : Puisque $f = \exp(g)$, on a $f' = g' \exp(g)$ qui ne s'annule que lorsque g' s'annule i.e. en $x = e$. L'équation de cette tangente verticale est alors $y = f(e) = e^{1/e}$
Représentation graphique : En trait épais, $\mathcal{C}_f$, en trait fin l'asymptote horizontale, le segment continu correspond à la tangente horizontale



retour à l'exercice

8. On commence par remarque que
$f : x \mapsto x^{1+1/x} = \exp\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$.
Domaine de définition : La fonction f est définie lorsque $x \neq 0$ (pour $\dfrac{1}{x}$) et $x > 0$ (pour $\ln(x)$) donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^\times$.
Parité, périodicité : Puisque $\mathcal{D}_f$ n'est pas symétrique par rapport à l'origine, f ne possède pas de parité. Elle ne possède pas de parité puisque $\mathcal{D}_f$ n'est pas stable par translation d'un réel non nul (sinon si $T > 0$ est une période, le réel $\dfrac{T}{2} > 0$ appartient à $\mathcal{D}_f$ donc $\dfrac{T}{2} - T = -\dfrac{T}{2} < 0$ devrait y appartenir aussi ce qui est absurde).
Monotonie : On commence par remarquer que la monotonie de f est celle de la fonction $g : x \mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln(x)$ (puisque

la fonction $x \mapsto e^x$ est croissante). La fonction $x \mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ comme le produit de deux telles fonctions et sa dérivée vaut

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad g'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln(x) + \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} = \frac{x+1-\ln(x)}{x^2}$$

Ainsi $g'(x)$ est du signe strict de la fonction $h : x \mapsto x+1-\ln x$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et on a :

$$\forall x > 0, \quad h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Le signe de $h'(x)$ est celui de $x-1$ (puisque $x>0$). On en déduit le tableau de variation de h puis son signe.

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\Vert$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

la fonction h est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ donc g' aussi ce qui entraine que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, il en est de même f. En outre, on a

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Pour déterminer la limite en 0^+ de g, on factorise par le terme dominant de $1 + \dfrac{1}{x}$, i.e. par $\dfrac{1}{x}$, on a

$$g(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty} \underbrace{\ln(x)}_{\to -\infty} \underbrace{(1+x)}_{\to 1} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty \Rightarrow f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

Asymptotes :

- en 0 : Puisque f tend vers une limite finie en 0, il n'a pas lieu de considérée d'asymptote au point d'abscisse $x = 0$.

- en $+\infty$: On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc on considère $\dfrac{f(x)}{x}$. En utilisant les règles de calcul sur les puissances puis les croissances comparées, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \frac{x^{1+1/x}}{x} = x^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1 \\
f(x) - 1.x &= f(x) - x = x^{1+1/x} - x \\
&= x\left(x^{1/x} - 1\right) = x\left(\exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right) - 1\right)
\end{aligned}$$

On remarque ensuite que $\dfrac{1}{x}\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et comme $\lim\limits_{u\to0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$ (dérivabilité de exp en 0 dont la dérivée vaut

1), on en déduit que

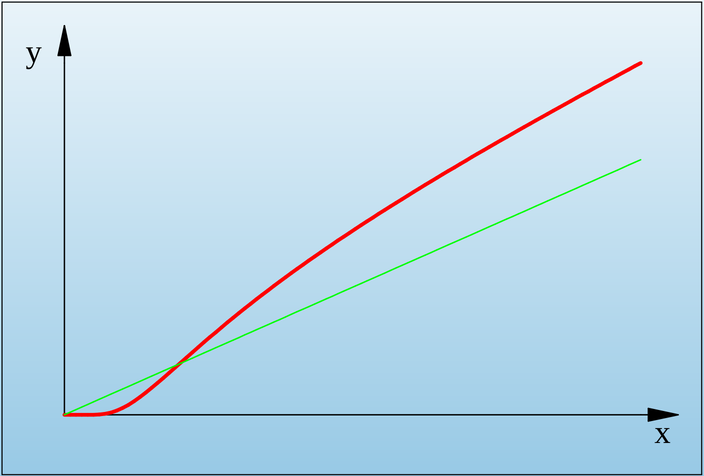
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right)-1}{\frac{1}{x}\ln(x)}=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x\exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right)-1}{\ln(x)}=1$$

$$\Rightarrow f(x)=\underbrace{\frac{x\left(\exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right)-1\right)}{\ln(x)}}_{\to 1}\times\underbrace{\ln(x)}_{\to+\infty}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$$

Par conséquent, la courbe $\mathcal{C}_f$ présente en $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$.

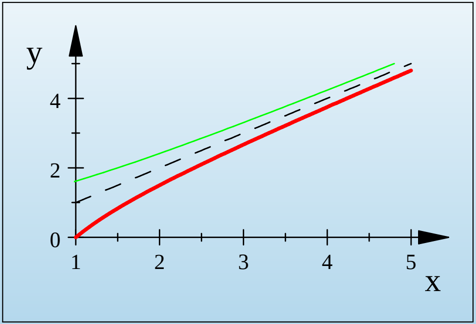
Tangentes horizontales : Puisque $f = \exp(g)$, on a $f' = g' \exp(g)$ qui ne s'annule que lorsque g' laquelle ne s'annule jamais dont il n'y a pas de tangente horizontale

Représentation graphique : En trait épais, $\mathcal{C}_f$, en trait fin la droite d'équation $y = x$.



retour à l'exercice

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^{\times}$ et elle y est continue comme somme de deux telles fonctions. Etant donné que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, on peut affirmer que la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ ce qui entraine la stricte croissance sur $[1, +\infty[$ de la fonction f (comme somme de deux telles fonctions). Par conséquent, le théorème de bijection continu s'applique et la fonction f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f\left([1, +\infty[\right) = [0, +\infty[$. retour à l'exercice
2. En trait épais, $\mathcal{C}_f$ sur $[1, +\infty[$, en trait fin $\mathcal{C}_{f^{-1}}$, en trait discontinu, la droite d'équation $y = x$.



Calculons f^{-1}. Soit $b \in [0, +\infty[$, déterminons son unique antécédent a par f appartenant à $[1, +\infty[$ i.e

$$f(a) = b \Leftrightarrow a - \frac{1}{a} = b \Leftrightarrow \frac{a^2 - 1}{a} = b$$
$$\Leftrightarrow a^2 - 1 = ab \Leftrightarrow a^2 - ab - 1 = 0$$

Ce trinôme en a a pour discriminant
$\Delta = (-b)^2 - 4(-1) = b^2 + 4 > 0$ ce qui nous donne

$$f(a) = b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = \dfrac{b + \sqrt{b^2+4}}{2} \\ \text{ou} \\ a = \dfrac{b - \sqrt{b^2+4}}{2} \end{array} \right.$$

Etant donné que b admet nécessairement un antécédent par f appartenant à $[1, +\infty[$, on est assuré que l'équation $f(a) = b$ admet nécessairement une et une seule solution supérieure ou égale à 1. Etant donné que

$$\sqrt{b^2+4} > \sqrt{b^2} \underset{b \geqslant 0}{=} b \Rightarrow b - \sqrt{b^2+4} < 0$$

cela ne peut être la seconde solution donc c'est nécessairement la première (sinon il n'y aurait aucune solution ce qui contredit l'existence de l'antécédent) ce qui entraine que $a = \dfrac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}$ et sans calcul on est assuré que $a \geqslant 1$.
Par acquis de conscience, on constate que

$$a = \frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2} \underset{b\geqslant 0}{\geqslant} \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$ (l'honneur est sauf :-))

On a donc $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ b & \longmapsto & \dfrac{b+\sqrt{b^2+4}}{2} \end{array} \right.$ ou encore

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} \end{array} \right.$$

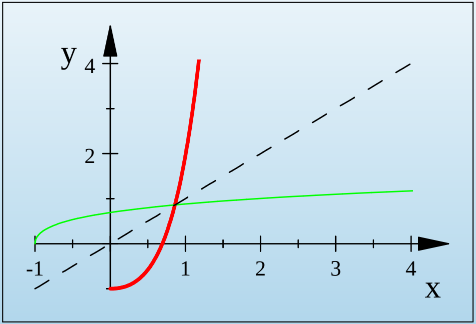
retour à l'exercice

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Pour étudier ses variations, on détermine le signe de sa dérivée. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (comme somme de deux telles fonctions) et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x\left(e^x - 1\right) \geqslant 0$$

Ainsi f' est positive sur $\mathbb{R}_+$ et elle ne s'annule qu'une fois (en $x = 0$) donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et continue donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+) = [-1, +\infty[$ (car $f(x) = \underbrace{e^{2x}}_{\to +\infty}\underbrace{\left(1 - 2e^{-x}\right)}_{\to 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$). retour à l'exercice

2. En trait épais, $\mathcal{C}_f$ sur $[1, +\infty[$, en trait fin $\mathcal{C}_{f^{-1}}$, en trait discontinu, la droite d'équation $y = x$.



Calculons f^{-1}. Soit $b \in [-1, +\infty[$, déterminons son unique antécédent a par f appartenant à $[0, +\infty[$ i.e

$$\begin{aligned} f(a) &= b \Leftrightarrow e^{2a} - 2e^a = b \Leftrightarrow (e^a)^2 - 2e^a - b = 0 \\ &\Leftrightarrow X^2 - 2X - b = 0 \quad (X = e^a) \end{aligned}$$

Ce trinôme en X a pour discriminant
$\Delta = (-2)^2 - 4(-b) = b + 4 \geqslant 3 > 0$ ce qui nous donne

$$f(a) = b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} X = \dfrac{2+\sqrt{4+b}}{2} \\ \text{ou} \\ X = \dfrac{2-\sqrt{4+b}}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} e^a = \dfrac{2+\sqrt{4+b}}{2} \\ \text{ou} \\ e^a = \dfrac{2-\sqrt{4+b}}{2} \end{array} \right.$$

Etant donné que b admet nécessairement un antécédent par f appartenant à $[1, +\infty[$, on est assuré que l'équation $f(a) = b$ admet nécessairement une et une seule solution supérieure ou égale à 0 donc on a nécessairement $e^a \geqslant 1$. Etant donné que

$$\sqrt{4+b} \underset{b \geqslant -1}{\geqslant} \sqrt{3} > 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{4+b} < 2 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{b+4}}{2} < 1$$

la seule solution possible est
$e^a = \dfrac{2+\sqrt{4+b}}{2} > 0 \Leftrightarrow a = \ln\left(\dfrac{2+\sqrt{4+b}}{2}\right)$ et ceci est bien solution de l'équation $f(a) = b$ avec $a \geqslant 0$ (sinon b n'aurait aucun antécédent par f appartenant à $\mathbb{R}_+$ ce qui est absurde).
Par acquis de conscience, en remarquant qu'une racine carré est toujours positive, on a $\dfrac{2+\sqrt{4+b}}{2} \geqslant \dfrac{2}{2} = 1$ donc
$\ln\left(\dfrac{2+\sqrt{4+b}}{2}\right) \geqslant 0.$

On a donc $f^{-1} : \left\{\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ b & \mapsto & \ln\left(\dfrac{2+\sqrt{4+b}}{2}\right)\end{array}\right.$ ou encore $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{2+\sqrt{4+x}}{2}\right) \end{array} \right.$

◂ retour à l'exercice

A finir

◂ retour à l'exercice

1. La fonction est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\times$ comme somme de deux telles fonctions donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur

$$\left]\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Pour la limite en $+\infty$, on utilise les croissances comparées en remarquant que $f(x) = \underbrace{x}_{\to+\infty} \underbrace{\left(1 + \dfrac{\ln(x)}{x}\right)}_{\to 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

L'équation $x + \ln(x) = 1$ est équivalente à l'équation $f(x) = 1$ autrement x est solution de $x + \ln(x) = 1$ si et seulement x est un antécédent de 1 par f appartenant à $\mathbb{R}_+^\times$. Puisque f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $\mathbb{R}$ et que $1 \in \mathbb{R}$, on est assuré de l'existence et de l'unicité d'un tel antécédent c'est-à-dire de l'existence et de l'unicité de la solution à $x + \ln(x) = 1$. Il est immédiat que $x = 1$ est solution de cette équation donc c'est la seule.

retour à l'exercice

2. Une telle fonction existe unique si $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) > 0$. Dans ce cas, on remarque que g vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(g(x)) = x$ et comme f est une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $\mathbb{R}$, en composant par f^{-1}, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f^{-1}(x)$ donc $g = f^{-1}$ convient et c'est la seule possibilité.

retour à l'exercice

3. $g = f^{-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
D'après la question 1, on a $f(\underline{1}) = 1$ donc $\underline{1}$ est un antécédent de 1 appartenant à $\mathbb{R}_+^\times$ et comme f est bijective de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $\mathbb{R}$ c'est le seul ce qui entraine que $\underline{1} = f^{-1}(1) = g(1)$.
Puisque g est croissante, on a
$\forall x \geqslant 1, \quad g(x) \geqslant g(1) = 1 > 0.$

◂ retour à l'exercice

4. Puisque $g(x) = f^{-1}(x)$, comparer un antécédent (par f) à des réels revient à comparer les images (par f). Pour $x \geqslant 1$, on a

$$\begin{array}{rcl} f(g(x)) & = & f(f^{-1}(x)) = x, \quad f(x) = x + \underbrace{\ln(x)}_{\geqslant 0} \geqslant x, \\ f(x-\ln(x)) & = & (x-\ln(x)) + \ln(x-\ln(x)) \\ & = & x + \ln(x-\ln(x)) - \ln(x) \\ & \leqslant & x \ (\text{car } x - \ln(x) \leqslant x \Rightarrow \ln(x-\ln(x)) \leqslant \ln(x)) \\ & \Rightarrow & f(x-\ln(x)) \leqslant f(g(x)) \leqslant f(x) \\ & \Rightarrow & x - \ln(x) \leqslant g(x) \leqslant x \quad (f^{-1} \text{ croissante}) \end{array}$$

retour à l'exercice

A finir On introduit la fonction $f : x \mapsto x^3 + x$.

1. Justifier que la fonction f définie une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
retour à l'exercice
2. Résoudre les équations
$x^3 + x = 0, \quad x^3 + x = 2, \quad x^3 + x = 3\sqrt{2}.$ retour à l'exercice
3. Prouver l'existence d'une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (g(x))^3 + g(x) = x.$ retour à l'exercice
4. Quelle est sa monotonie ? Sa parité ? Sa limite en $\pm\infty$? Sa représentation graphique ? retour à l'exercice
5. Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) \leqslant \sqrt[3]{x}$. Etudier alors l'existence d'asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$. retour à l'exercice