Limites des fonctions d'une variable réelle

Abdellah Bechata

www.mathematiques.fr.st

1 Limite d'une fonction en un point

1.1 Propriétés vérifiées au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$

Définition 1 (Propriété vérifiée au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit qu'une propriété $(\mathcal{P})$ est vérifiée par f au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si cette propriété est vérifiée sur un intervalle $J \subset I$ dont a soit l'une des extrémités (incluse ou exclue). Cela peut se traduire aussi par :

- *f vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si il existe $h > 0$ tel que f vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ au moins sur $]a-h, a[$ ou sur $]a, a+h[$ (voire sur $]a-h, a+h[\backslash\{a\}$ ou sur $]a-h, a+h[$)*
- *f vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si et seulement si il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ au moins sur $[A, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, A]$).*

Exemple 1
- Les fonctions $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, $\quad x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$, $\quad x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \sqrt{-x}$ sont définies au voisinage de 0.
- Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x-1}$ et $f : x \mapsto \ln\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ ne sont pas définies au voisinage de 0.
- Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^3-x-1}$, $\quad x \mapsto \dfrac{\sin x}{x+\cos x}$ et $x \mapsto \ln\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ sont définies au voisinage de $+\infty$ mais pas la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.
- La fonction $x \mapsto \ln\left(x-x^3\right)$ est définie au voisinage de $-\infty$ mais pas la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\sin x}$.
- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est bornée au voisinage de $+\infty$ mais la fonction $f : x \mapsto x \sin x$ ne l'est pas.
- La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ est bornée au voisinage de 1 mais la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas bornée au voisinage de 0.
- Les fonction $x \mapsto 1+x^2$ et $x \mapsto (\ln x)\cos(x)$ ne s'annulent pas au voisinage de 0 mais la fonction $f : x \mapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ s'annule sur tout voisinage de 0.
- La fonction $x \mapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ne s'annule pas sur un certain voisinage de $+\infty$ mais la fonction $f : x \mapsto x \sin x$ s'annule sur tout voisinage de $+\infty$.

Solution 1
- Les trois premières sont définies sur $]0, 1]$ et la dernière sur $[-1, 0]$.
- La première a pour domaine de définition $]-\infty, 1]$ donc elle ne peut être définie sur un intervalle $]0, h[$ ou $]-h, 0[$ lorsque $0 < h < 1$.

  Pour la seconde, quel que soit $h > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}^\times$ tel que $0 < \dfrac{1}{k\pi} < h$. On a alors $\dfrac{1}{k\pi} \in]0, h[$ (resp. $-\dfrac{1}{k\pi} \in [-h, 0[$) et $f\left(\dfrac{1}{k\pi}\right)$ n'est pas défini (car $\sin(k\pi) = 0$) donc f ne peut être définie sur tout $]0, h[$ (resp. $]-h, 0[$)

- Les deux premières sont définies sur $[2,+\infty[$ car

$$\forall x \geqslant 2, \quad x^3 = x.x^2 \geqslant 4x = x+3x \geqslant x+8 > x+1, \quad x+\cos x \geqslant 2+(-1)) = 1 > 0$$

et la troisième sur $\left]\dfrac{2}{\pi},+\infty\right[$ car

$$\forall x \geqslant \frac{2}{\pi}, \quad 0 < \frac{1}{x} \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

La quatrième fonction n'est pas définie au voisinage de $+\infty$ car elle n'est définie que sur $[-1,1]$ donc on ne peut la définir sur aucun intervalle $]A,+\infty[$ lorsque $A \geqslant 1$

- La première est définie sur $]-\infty,-2[$ car

$$\forall x \leqslant -2, \quad x^3 = x.x^2 \leqslant 4x = x+3x \leqslant x-6 < x \Rightarrow x - x^3 > 0$$

Pour la seconde, quel que soit $A \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi < A$. On a alors $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$ donc f n'est pas définie sur tout $]-\infty,A]$.

- Pour la première, on a $\forall x \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1$. Pour la deuxième, on procède par l'absurde en supposant qu'elle soit bornée sur $]A,+\infty[$ pour un certain A. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geqslant A, \quad |f(x)| \leqslant M$. Or il existe il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k > \max(A,M)$ et

$$\left|f\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right| = \frac{\pi}{2}+2\pi k\frac{\pi}{2}+2\pi k > M$$

ce qui est absurde donc f n'est bornée sur aucun voisinage de $+\infty$.

- Pour la première, on a

$$\forall x \in]0,2[\setminus\{1\}, \quad \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2 \Rightarrow -2 \leqslant \frac{x^2-3x+2}{x-1} \leqslant 0$$

Pour la seconde, on procède par l'absurde en supposant qu'elle soit bornée sur $]0,h[$ (resp. $]-h,0[$) pour un certain $h > 0$. Il existe $M \in \mathbb{R}_+^\times$ tel que $\forall x \in]0,h[$ (resp. $]-h,0[$), $|f(x)| \leqslant M$. Alors $x_0 = \min\left(\dfrac{h}{2},\dfrac{1}{2M}\right) \in]0,h[$ (resp. $x_0 = -\min\left(\dfrac{h}{2},\dfrac{1}{2M}\right) \in]-h,0[$) et l'on a

$$|f(x_0)| = \frac{1}{\min\left(\dfrac{h}{2},\dfrac{1}{2M}\right)} \geqslant \frac{1}{\dfrac{1}{2M}} = 2M > M$$

ce qui est absurde donc f n'est pas bornée au voisinage de 0.

- Pour les deux premières, on a

$$\forall x \in [-1,1], \quad 1+x^2 \geqslant 1 > 0, \quad \forall x \in]0,1[, \quad \begin{cases} \ln(x) < 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow (\ln x)\cos(x) < 0$$

Pour la troisième, on procède par l'absurde en supposant qu'il existe $h > 0$ tel que $\forall x \in]0,h[$ (resp. $]-h,0[$), $f(x) \neq 0$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $0 < \dfrac{1}{k\pi} < h$ (resp. $-h < \dfrac{1}{k\pi} < 0$) et $f\left(\dfrac{1}{k\pi}\right) = \dfrac{1}{k\pi}\sin(k\pi) = 0$ ce qui est absurde donc f s'annule sur tout voisinage de 0.

- Pour la première, on a

$$\forall x \in \left]\frac{2}{\pi},+\infty\right[, \quad 0 < \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

Pour la seconde, sur tout intervalle $]A,+\infty[$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k\pi > A$ et $f(k\pi) = 0$

1.2 Définitions de la limite d'une fonction

Définition 2 (Limites en $+\infty$)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On dit que

- *f tend vers $L \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M_\varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad x \geqslant M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ *ou* $\lim\limits_{+\infty} f = L$ *ou* $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} L$

- *f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists M_A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad x \geqslant M_A \Rightarrow f(x) \geqslant A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ *ou* $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$

- *f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ si et seulement si :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists M_A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad x \geqslant M_A \Rightarrow f(x) \leqslant A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ *ou* $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} -\infty$

Définition 3 (Limites en $-\infty$)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $-\infty$. On dit que

- *f tend vers $L \in \mathbb{R}$ en $-\infty$ si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M_\varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad x \leqslant M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ *ou* $\lim\limits_{-\infty} f = L$ *ou* $f(x) \underset{x \to -\infty}{\to} L$

- *f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ si et seulement si :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists M_A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad x \leqslant M_A \Rightarrow f(x) \geqslant A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ *ou* $f(x) \underset{x \to -\infty}{\to} +\infty$

- *f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ si et seulement si :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists M_A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad x \leqslant M_A \Rightarrow f(x) \leqslant A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ *ou* $f(x) \underset{x \to -\infty}{\to} -\infty$

Définition 4 (Limites en $a \in \mathbb{R}$)
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et $L \in \mathbb{R}$. On dit que

- *f tend vers $L \in \mathbb{R}$ en a si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in I \backslash \{a\}, \quad |x - a| \leqslant \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *ou* $\lim\limits_{a} f = L$ *ou* $f(x) \underset{x \to a}{\to} L$

- *f tend vers $+\infty$ en a si et seulement si :*

$$\forall A \in \mathbb{R}. \quad \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in I \backslash \{a\}, \quad |x - a| \leqslant \eta_\varepsilon \Rightarrow f(x) \geqslant A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{a} f = +\infty$ *ou* $f(x) \underset{x \to a}{\to} +\infty$

- *f tend vers $-\infty$ en a si et seulement si :*

$$\forall A \in \mathbb{R}. \quad \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in I \backslash \{a\}, \quad |x - a| \leqslant \eta_\varepsilon \Rightarrow f(x) \leqslant A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{a} f = -\infty$ *ou* $f(x) \underset{x \to a}{\to} -\infty$.

Remarque 1
Une fonction f peut posséder une limite en a sans être définie en a.

Exemple 2
Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=1$.

Solution 2

- Soit $A\in\mathbb{R}$, si $A\leqslant 0$ alors $\forall x\geqslant 0,\quad x^2+x+1\geqslant 0\geqslant A$. Si $A>0$, en choisissant $M_A=\sqrt{A}$, on a
$$\forall x\geqslant M_A,\quad x^2+x+1\geqslant x^2\geqslant A$$
Ainsi,
$$(\forall A\in\mathbb{R},\quad \exists M_A\in\mathbb{R},\quad \forall x\geqslant M_A,\quad x^2+x+1\geqslant A)\Leftrightarrow \lim_{+\infty} f=+\infty.$$

- Soit $\varepsilon>0$, on a
$$\forall x\geqslant 0,\quad \left|\sqrt{x}-2\right|=\left|\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2}\right|=\left|\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}\right|=\frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2}\leqslant\frac{|x-4|}{2}$$
En choisissant $\eta_\varepsilon=2\varepsilon>0$, $|x-4|\leqslant\eta_\varepsilon\Rightarrow|\sqrt{x}-2|\leqslant\dfrac{\eta_\varepsilon}{2}=\varepsilon$ donc
$$(\forall\varepsilon>0,\quad\exists\eta_\varepsilon>0,\quad\forall x\in\mathbb{R}_+\backslash\{4\},\quad |x-4|\leqslant\eta_\varepsilon\Rightarrow\left|\sqrt{x}-4\right|\leqslant\varepsilon)\Leftrightarrow\lim_4 f=2$$

- Soit $\varepsilon>0$, on a
$$\forall x\neq 2,\quad\left|\frac{x^2-3x+2}{x-2}-1\right|=\left|\frac{x^2-4x+4}{x-2}\right|=\left|\frac{(x-2)^2}{x-2}\right|=|x-2|$$
En choisissant $\eta_\varepsilon=\varepsilon>0$, si $x\in\mathbb{R}\backslash\{2\}$, $\quad|x-2|\leqslant\eta_\varepsilon\Rightarrow\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}-1\right|\leqslant\eta_\varepsilon=\varepsilon$ donc
$$(\forall\varepsilon>0,\quad\exists\eta_\varepsilon>0,\quad\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{2\},\quad|x-2|\leqslant\eta_\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{x^2-3x+2}{x-2}-1\right|\leqslant\varepsilon)\Leftrightarrow\lim_2 f=1$$

1.3 Premières propriétés des limites.

Lemme 1
Soit $f:I\to\mathbb{R}$ définie au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$. On note $L=\lim\limits_a f\in\overline{\mathbb{R}}$

- *Si $L\in\mathbb{R}$ alors f est bornée au voisinage de a.*
- *Si $L=+\infty$ alors $\forall m\in\mathbb{R},\quad f>m$ au voisinage de $+\infty$.*
- *Si $L=-\infty$ alors $\forall M\in\mathbb{R},\quad f<M$ au voisinage de $-\infty$.*
- *Si $L\neq 0$ alors f ne s'annule pas au voisinage de a.*

Proposition 1

- *Si $L>0$ alors $f>0$ au voisinage de a.*
- *Si $L<0$ alors $f<0$ au voisinage de a.*

Preuve :

- On note $L=\lim\limits_a f$. Si $a\in\mathbb{R}$ (resp. $a=+\infty$, resp. $a=-\infty$) en choisissant $\varepsilon=1$, il existe $\eta\in\mathbb{R}$ (resp. $M\in\mathbb{R}$) tel que
$$\forall x\in I\backslash\{a\},\quad |x-a|\leqslant\eta\text{ (resp. }x\geqslant M,\text{ resp. }x\leqslant M)\Rightarrow|f(x)-L|\leqslant 1\Rightarrow|f(x)|=|(f(x)-L)+L|\leqslant|f(x)-L|+|L|\leqslant 1+$$
- On applique la définition de la limite avec $A=m+1$.
- On applique la définition de la limite avec $A=M-1$.

■

Proposition 2 (Unicité de la limite)
Soient $a\in\overline{\mathbb{R}}$ et $f:I\mapsto\mathbb{R}$, définie au voisinage de a. Si f tend vers L et L' en a, alors $L=L'$.

Preuve :

- $a \in \mathbb{R}$.
  - Si $L \in \mathbb{R}$ alors la fonction f est bornée au voisinage de a donc il existe $\eta > 0$ (resp. $A \in \mathbb{R}$) et $M \in \mathbb{R}$ tel que
  $$\forall x \in I\backslash\{a\}, \quad |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)| \leqslant M$$
  Par conséquent, $L' \in \mathbb{R}$ (sinon $L = +\infty$ ou $L = -\infty$. En utilisant la définition de la limite dans chacun de ces cas, on obtient pour le premier que $f > M$ au voisinage de a et dans le second que $f < -M$, ce qui est impossible). Puisque $f(x) \underset{x\to a}{\to} L$ et $f(x) \underset{x\to a}{\to} L'$, on a
  $$\left.\begin{array}{l} \forall \varepsilon' > 0, \quad \exists \eta_{\varepsilon'} > 0, \quad \forall x \in I\backslash\{a\}, \quad |x-a| \leqslant \eta_{\varepsilon'} \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon' \\ \forall \varepsilon'' > 0, \quad \exists \eta_{\varepsilon''} > 0, \quad \forall x \in I\backslash\{a\}, \quad |x-a| \leqslant \eta_{\varepsilon''} \Rightarrow |f(x) - L'| \leqslant \varepsilon'' \end{array}\right\}$$
  En choisissant $\varepsilon' = \varepsilon'' = \dfrac{|L-L'|}{4}$, l'intervalle on obtient
  $$\begin{array}{rcl} \forall x & \in & I\backslash\{a\}, \quad |x-a| \leqslant \min(\eta_{\varepsilon'}, \eta_{\varepsilon''}), \quad |L-L'| = |(L-f(x)) + (f(x)-L')| \leqslant |L-f(x)| + |f(x)-L'| \\ & \leqslant & \dfrac{|L-L'|}{4} + \dfrac{|L-L'|}{4} = \dfrac{|L-L'|}{2} \Rightarrow |L-L'| \leqslant \dfrac{|L-L'|}{2} \Leftrightarrow |L-L'| \leqslant 0 \Rightarrow |L-L'| = 0 \Leftrightarrow L = L' \end{array}$$
  - Si $L = +\infty$ (resp. $-\infty$) alors $L' = +\infty$ (resp. $-\infty$). Si cela n'est pas le cas alors $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ (resp. $L \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$. Dans ce cas, f est majorée (resp. minorée) par une certaine constante M (resp. m) au voisinage de a et en choisissant $A = M+1$ (resp. $A = m-1$)dans la définition de $L = \lim\limits_a f$, on obtient que $f(x) \geqslant M+1 > M$ (resp. $f(x) \leqslant m-1 < m$) au voisinage de $+\infty$, ce qui est absurde.
- Si $a = +\infty$ (resp. $-\infty$) la preuve est identique en remplaçant η par A, $|x-a| \leqslant \eta_\varepsilon$ par $x \geqslant M_A$ (resp. $x \leqslant M_A$).

■

Lemme 2
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lim\limits_a f = L$ alors $\lim\limits_a |f| = |L|$.

Remarque 2
La réciproque est fausse.

Preuve :

- Si $a \in \mathbb{R}$
  - si $L \in \mathbb{R}$, en combinant la définition de $\lim\limits_a f = L$ et de l'inégalité triangulaire, on a
  $$\begin{array}{rcl} \forall \varepsilon & > & 0, \quad \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in I\backslash\{a\}, \quad |x-a| \leqslant \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon \\ & \Rightarrow & \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in I\backslash\{a\}, \quad |x-a| \leqslant \eta_\varepsilon \Rightarrow ||f(x)| - |L|| \leqslant |f(x) - L| \leqslant \varepsilon \end{array}$$
  - Si $L = +\infty$,

■

Proposition 3
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On a les équivalences suivantes

- ($\lim\limits_a f = L \in \mathbb{R}$) *si et seulement si (il existe g définie au voisinage de a tendant vers* 0 *en a et telle que $|f - L| \leqslant g$ au voisinage de a).*
- ($\lim\limits_a f = +\infty$) *si et seulement (il existe g définie au voisinage de a tendant vers $+\infty$ en a et telle que $f \geqslant g$ au voisinage de a)*
- ($\lim\limits_a f = -\infty$) *si et seulement (il existe g définie au voisinage de a tendant vers $-\infty$ en a et telle que $f \leqslant g$ au voisinage de a)*

Exemple 3
La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ tend vers 1 en $+\infty$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ tend vers 0.

Exemple 4
La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}$ n'a pas de limite finie en 0.

1.4 Limites de fonctions et suites.

Proposition 4
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, de limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ en a.
Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de limite a, alors la suite $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ a pour limite L.

Preuve :
Supposons tout d'abord $L \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors comme f tend vers L en a :

$$\exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$$

et comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers a en $+\infty$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant n_0. \quad |u_n - a| \leqslant \eta$$

On aura alors :

$$\forall n \geqslant n_0. \quad |f(u_n) - L| \leqslant \varepsilon$$

ce qui montre que $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers L en $+\infty$. Les autres cas sont analogues. ■

Remarque 3
Ce résultat ne permet pas de prouver l'existence d'une limite. Il permet par contre de prouver qu'une fonction ne possède pas de limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, il suffit en effet :

- soit de trouver une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de limite a telle que $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ ne possède pas de limite;
- soit de trouver deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ de limite a telles que $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ et $(f(v_n))_{n\geqslant 0}$ possèdent des limites différentes.

Exemple 5
Montrer que $x \mapsto E(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$, $x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0 et qu'une fonction f non constante et T-périodique, avec $T > 0$, n'a pas de limite en $+\infty$.

1.5 Limites à droite et à gauche

Définition 5
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f admet $L \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite

- *à gauche en a si et seulement si sa restriction $f|_{I\cap]-\infty,a[}$ a pour limite L en a.*
  On note alors $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ ou $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} L$ ou $\lim\limits_{a^-} f = L$.
- *à droite en a si et seulement si sa restriction $f|_{I\cap]a,+\infty[}$ a pour limite L en a.*
  On note alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ ou $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} L$ ou $\lim\limits_{a^+} f = L$.

Remarque 4 (Z)
Pour certaines fonctions il n'est parfois pas possible de considérer la limite à gauche ou à droite (par exemple on ne peut pas considérer la limite à gauche en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$). On dit que $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$

- à gauche si et seulement si il existe $h > 0$ tel que $[a - h, a[\subset I$.
- à droite si et seulement si il existe $h > 0$ tel que $]a, a + h] \subset I$.

Proposition 5
Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$, on a l'équivalence
$(\lim\limits_{a} f = L) \Leftrightarrow (\lim\limits_{a^+} f$ et $\lim\limits_{a^-} f$ existent et sont égales). Dans ce cas, on a $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f$.

Remarque 5
Ceci donne également une méthode pour montre qu'une fonction ne possède pas de limite en un point, en montrant que :

- soit l'une des limites à gauche ou à droite n'existe pas;
- soit les deux limites existent mais sont distinctes.

Exercice 1
Les fonctions suivantes admettent-elles une limite en a ?

- $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et $a = 0$.
- $x \mapsto \begin{cases} \pi^2 - x^2 & \text{si } x < \pi \\ \sin x & \text{si } x \geqslant \pi \end{cases}$ et $a = 0$
- $x \mapsto \dfrac{E(x)}{x}$ si $x \neq 0$.

2 Opérations sur les limites

Proposition 6
Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : I \mapsto \mathbb{R}$, définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$:

- *Si $\lim_a f = \lim_a g = 0$ alors $\lim_0 (f+g) = 0$.*
- *Si f est bornée au voisinage de a et g tend vers 0 en a, alors fg tend vers 0 en a.*
- *Si $f \to \pm\infty$ en a alors $\dfrac{1}{f} \to 0$ en a.*
- *Si $f \to 0$ en a et si $f > 0$ au voisinage de a alors $\dfrac{1}{f} \to +\infty$ en a.*
- *Si $f \to 0$ en a et si $f < 0$ au voisinage de a alors $\dfrac{1}{f} \to -\infty$ en a.*

Remarque 6
La réciproque est fausse. Par exemple $x \mapsto \dfrac{(-1)^{\mathrm{E}(x)}}{x}$

Théorème 1
Si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : I \mapsto \mathbb{R}$ sont définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et admettent respectivement $L, L' \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limites en a, alors :

Théorème 2

- *$f + g$ admet pour limite $L + L'$ en a sauf pour $L, L' \in \{\pm\infty\}$ avec $L = -L'$.*
- *fg admet pour limite LL' en a sauf pour $(L, L') = (0, \pm\infty)$ ou $(L, L') = (\pm\infty, 0)$.*

Proposition 7 (composition)
Si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et a pour limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ en a et $g : I' \mapsto \mathbb{R}$ est définie au voisinage de L et a pour limite $L' \in \overline{\mathbb{R}}$ en L, et si $f(I) \subset I'$, alors $g \circ f$ est définie au voisinage de a et a pour limite L' en a.

Exercice 2
Calculer $\lim_{x \mapsto +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$ et $\lim_{x \mapsto +\infty} \dfrac{x^6 - 3\sin x}{3x^2 + 4x^6}$

3 Limites et relation d'ordre

Proposition 8 (Passage d'inégalités larges à la limite)
Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : I \mapsto \mathbb{R}$ définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et telles que $f \leqslant g$ au voisinage de a. Si L et L' sont les limites respectives de f et g en a, alors $L \leqslant L'$.
En particulier, si $f \geqslant 0$ alors $L \geqslant 0$.

Remarque 7
On ne peut pas obtenir des inégalités strictes, même si les inégalités de départ le sont.

Théorème 3 (d'encadrement)
Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $g : I \mapsto \mathbb{R}$ et $h : I \mapsto \mathbb{R}$ définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et telles que $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a. Si f et h admettent en a la même limite finie L, alors il en est de même de g.

Exemple 6
Calculer $\lim_{0^+} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\lim_{0^-} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Théorème 4 (Limites des suites monotones)
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors f admet une limite gauche et droite en tout point de $[a, b]$.

- *Si $x_0 \in]a, b[$ alors $\lim\limits_{x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim\limits_{x_0^+} f(x_0)$ si f est croissante et $\lim\limits_{x_0^-} f(x) \geqslant f(x_0) \geqslant \lim\limits_{x_0^+} f(x_0)$ si f est décroissante*
- *Si f est majorée sur $]a, b[$ par $M \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{b^-} f(x) \leqslant M$.*
- *Si f n'est pas majorée sur $]a, b[$, elle admet $+\infty$ pour limite gauche en b.*
- *Si f est minorée sur $]a, b[$ par m alors $\lim\limits_{a^+} f(x) \geqslant m$.*
- *Si f n'est pas minorée sur $]a, b[$, elle admet $-\infty$ pour limite droite en a.*

4 Comparaison locale des fonctions

4.1 Définition et caractérisation des relations de comparaison

Définition 6 (Domination, négligeabilité, équivalent)
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de a.

- *On dit que f est dominée par g, s'il existe une fonction ε définie et bornée au voisinage de a telle que $f = \varepsilon \times g$ au voisinage de a.*
  Dans ce cas, on note $f \underset{a}{=} O(g)$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$ et l'on prononce « f est un grand O de g lorsque x tend vers a »
- *On dit que f est négligeable devant g, s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ telle que $f = \varepsilon \times g$ au voisinage de a.*
  Dans ce cas, on note $f \underset{a}{=} o(g)$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ et l'on prononce « f est un petit o de g lorsque x tend vers a »
- *On dit que f est équivalente à g, s'il existe une fonction fonction ε définie au voisinage de a avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 1$ telle que $f = \varepsilon \times g$ au voisinage de a.*
  Dans ce cas, on note $f \underset{a}{\sim} g$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et l'on prononce « f est équivalent à g lorsque x tend vers a »

Remarque 8
On a $f \underset{a}{=} O(0) \Leftrightarrow f = 0$ au voisinage de a, $f \underset{a}{=} o(0) \Leftrightarrow f = 0$ au voisinage de a, $f \underset{a}{\sim} 0 \Leftrightarrow f = 0$ au voisinage de a.

Proposition 9 (Caractérisation)
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a. Alors

1. *$f \underset{a}{=} O(g)$ si et seulement si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.*
2. *$f \underset{a}{=} o(g)$ si et seulement si $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 0$.*
3. *$f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement si $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 1$.*

Preuve :
Dans un certain voisinage de a, on a $\dfrac{f}{g} = \varepsilon$ et les résultats attendus s'obtiennent immédiatement. ■

Exemple 7
Montrer que $\ln(1 + e^x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x$ et $\sqrt{x^2 + 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} x$.

Définition 7
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a.On définit les notations $f \underset{a}{=} g + O(h)$ et $f \underset{a}{=} g + o(h)$ par

$$f \underset{a}{=} g + O(h) \Leftrightarrow f - g \underset{a}{=} O(h), \qquad f \underset{a}{=} g + o(h) \Leftrightarrow f - g \underset{a}{=} o(h)$$

4.2 Opérations sur les relations de comparaison

Proposition 10 (Opérations sur les O)
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g, h, k quatre fonctions définies au voisinage de a.

- *Si* $f \underset{a}{=} O(g)$ *et* $g \underset{a}{=} O(h)$, *alors* $f \underset{a}{=} O(h)$.
- *Si* $f \underset{a}{=} O(h)$ *et* $g \underset{a}{=} O(h)$, *alors* $\alpha \times f + \beta \times g \underset{a}{=} O(h)$ *quels que soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- *Si* $f \underset{a}{=} O(h)$ *et* $g \underset{a}{=} O(k)$, *alors* $f \times g \underset{a}{=} O(h \times k)$.
- *Si* $f \underset{a}{=} O(g)$ *et si* h *ne s'annule pas au voisinage de* 0 *alors* $\dfrac{f}{h} \underset{a}{=} O\left(\dfrac{g}{h}\right)$.

Exemple 8
Montrer que l'on peut avoir $f = 0(h)$ et $g = 0(k)$ sans pour autant avoir $f + g = 0(h + k)$.

Proposition 11 (Opérations sur les o)
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g, h, k quatre fonctions définies au voisinage de a.

- *Si* $f \underset{a}{=} o(g)$ *et* $g \underset{a}{=} o(h)$, *alors* $f \underset{a}{=} o(h)$.
- *Si* $f \underset{a}{=} o(h)$ *et* $g \underset{a}{=} o(h)$, *alors* $\alpha \times f + \beta \times g \underset{a}{=} o(h)$ *quels que soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- *Si* $f \underset{a}{=} o(h)$ *et* $g \underset{a}{=} o(k)$, *alors* $fg \underset{a}{=} o(hk)$.
- *Si* $f \underset{a}{=} o(g)$ *et si* h *ne s'annule pas au voisinage de* 0 *alors* $\dfrac{f}{h} \underset{a}{=} o\left(\dfrac{g}{h}\right)$.

Proposition 12 (relations entre O et o)
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g, h, k quatre fonctions définies au voisinage de a.

- *Si* $f \underset{a}{=} o(g)$ *et* $g \underset{a}{=} O(h)$, *alors* $f \underset{a}{=} o(h)$;
- *Si* $f \underset{a}{=} o(h)$ *et* $g \underset{a}{=} O(k)$, *alors* $f \times g \underset{a}{=} o(h \times k)$.

Proposition 13 (Opérations sur les $\sim$)
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g, h, k quatre fonctions définies au voisinage de a.

- $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow g \underset{a}{\sim} f$.
- *Si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $g \underset{a}{\sim} h$, *alors* $f \underset{a}{\sim} h$.
- *Si* $f \underset{a}{\sim} h$ *et* $g \underset{a}{\sim} k$, *alors* $f \times g \underset{a}{\sim} h \times k$.
- *Si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et* h *ne s'annule pas au voisinage de* a *alors* $\dfrac{f}{h} \underset{a}{\sim} \dfrac{g}{h}$.
- *Si* $f \underset{a}{\sim} g$, *alors* $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.
- *Si* $f \underset{a}{\sim} g$, *alors* $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ *quel que soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Remarque 9 (Z)

1. On peut avoir $f \underset{a}{\sim} h$ et $g \underset{a}{\sim} k$ sans pour autant avoir $f + g \underset{a}{\sim} h + k$;
2. On peut avoir $f \underset{a}{\sim} g$ sans pour autant avoir $\exp(f) \underset{a}{\sim} \exp(g)$;
3. On peut avoir $f \underset{a}{\sim} g$ sans pour autant avoir $\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$;
4. Plus généralement, pour une fonction F, on peut avoir $f \underset{a}{\sim} g$ sans pour autant avoir $F \circ f \underset{a}{\sim} F \circ g$.

Proposition 14 (Opérations sur les égalités $f \underset{a}{=} g + O(h)$)
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g, h, k, l quatre fonctions définies au voisinage de a. et α, β deux réels (indépendants de n).

- *Si* $f \underset{a}{=} g + O(h)$ *et* $g \underset{a}{=} k + O(h)$ *alors* $f \underset{a}{=} k + O(h)$.
- *Si* $f \underset{a}{=} g + O(h)$ *et* $k \underset{a}{=} l + O(h)$ *alors* $f + k \underset{a}{=} g + l + O(h)$.
- *Si* $f \underset{a}{=} g + O(h)$ *alors* $f \times k \underset{a}{=} g \times k + O(h \times k)$.
- *Si* $f \underset{a}{=} g + O(h)$ *et si* k *ne s'annule pas au voisinage de* a *alors* $\dfrac{f}{k} \underset{a}{=} \dfrac{g}{k} + O\left(\dfrac{h}{k}\right)$.

Proposition 15 (Opérations sur les égalités $f \underset{a}{=} g + o(h)$)
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g, h, k, l *quatre fonctions définies au voisinage de* a. *et* α, β *deux réels (indépendants de* n*).*

- *Si* $f \underset{a}{=} g + o(h)$ *et* $g \underset{a}{=} k + o(h)$ *alors* $f \underset{a}{=} k + o(h)$.
- *Si* $f \underset{a}{=} g + o(h)$ *et* $k \underset{a}{=} l + o(h)$ *alors* $f + k \underset{a}{=} g + l + o(h)$.
- *Si* $f \underset{a}{=} g + o(h)$ *alors* $f \times k \underset{a}{=} g \times k + o(h \times k)$.
- *Si* $f \underset{a}{=} g + o(h)$ *et si* k *ne s'annule pas au voisinage de* a *alors* $\dfrac{f}{k} \underset{a}{=} \dfrac{g}{k} + o\left(\dfrac{h}{k}\right)$.

Exercice 3
Illustrer ces différents cas.

Proposition 16 (Équivalents et composition)
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f *et* g *deux fonctions définies au voisinage de* a *telles que* $f \underset{a}{\sim} g$. *Si* u *est définie au voisnage de* b *et* $\lim\limits_{b} u = a$ *alors* $f \circ u \underset{a}{\sim} g \circ u$.

Remarque 10 (Z)
On ne peut par contre pas composer un équivalent par une fonction. Il faut dans ce cas toujours revenir aux limites.

Proposition 17 (Lien entre l'équivalence et la négligeabilité)
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f *et* g *deux fonctions définies au voisinage de* a. *Alors* $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f \underset{a}{=} g + o(g)$.

4.3 Applications des relations de comparaisons à l'étude locale des fonctions

Remarque 11
Pour une fonction f définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on a $f \underset{a}{=} O(1)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a, $f \underset{x \to a}{=} o(1)$ si et seulement si f converge vers 0 en a et $f \underset{x \to a}{\sim} 1$ si et seulement si f converge vers 1 en a.

Proposition 18
Soient f *et* g *deux fonctions vérifiant la condition* (C), *alors :*

- *si* $f \underset{a}{=} O(g)$ *et* g *est bornée au voisinage de* a, *alors* f *également;*
- *si* $f \underset{a}{=} O(g)$ *et* g *converge vers* 0 *en* a, *alors* f *également;*
- *si* $f \underset{x \to a}{=} o(g)$ *et* g *est bornée au voisinage de* a, *alors* f *tend vers* 0 *en* a*;*
- *si* $f \underset{x \to a}{\sim} f$, *alors, au voisinage de* a, f *est du signe (strict) de* g*;*
- *si* $f \underset{x \to a}{\sim} g$ *et* g *possède une limite (finie ou infinie) en* a, *alors* f *tend également vers la même limite.*

Exemple 9
Déterminer un équivalent en $+\infty$ (puis la limite) de $\ln\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$.

Proposition 19 (Fonctions et O)
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f *et* g *deux fonctions définies au voisinage de* a

1. $f \underset{a}{=} O(0) \Leftrightarrow f = 0$ *au voisinage de* a

2. $f \underset{a}{=} O(1) \Leftrightarrow f$ *est bornée au voisinage de* a

3. *Si* $f \underset{a}{=} O(g)$ *et si* g *est borné au voisinage de* a *alors* f *l'est également.*

4. *Si* $f \underset{a}{=} O(g)$ *et si* $\lim\limits_{a} g = 0$ *alors* $\lim\limits_{a} f = 0$.

Proposition 20 (Fonctions et o)
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f *et* g *deux fonctions définies au voisinage de* a

1. $f \underset{a}{=} o(0) \Leftrightarrow f = 0$ *au voisinage de* a

2. $f \underset{a}{=} o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{a} f = 0$.

3. *Si* $f \underset{a}{=} o(g)$ *et si* g *est borné au voisinage de* a *alors* $\lim\limits_{a} f = 0$.

Proposition 21 (Fonctions et $\sim$)
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f *et* g *deux fonctions définies au voisinage de* a

1. *Soit* $L \in \mathbb{R}^{\times}$, *on a* $\lim\limits_{a} f = L \Leftrightarrow f \underset{a}{\sim} L$.

2. *Si* $f \underset{a}{\sim} g$, *alors*

   (a) *(f est bornée au voisinage de a) si et seulement (g est bornée au voisinage de a).*
   (b) *(La fonction f ne s'annule pas au voisinage de a) si et seulement si (la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a).*
   (c) *(La fonction f est de signe constant au voisinage de a) si et seulement (la fonction g est de signe constant au voisinage de a).*
   Dans ce cas, elles ont le même signe au voisinage de a.
   (d) *(La fonction f admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en a) si et seulement si (la fonction g admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en a).*
   Dans ce cas, elles ont la même limite en a.

4.4 Comparaisons usuelles

Proposition 22 (Croissances comparées)

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^{\times}, \quad x^{\alpha} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(e^{\beta x}\right), \quad (\ln x)^{\alpha} \underset{x \to +\infty}{=} o(x^{\beta}), \quad (\ln x)^{\alpha} \underset{x \to +\infty}{=} o(e^{\beta x})$

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^{\times}, \quad e^{-\beta x} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{\alpha}}\right), \quad \dfrac{1}{x^{\alpha}} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{(\ln x)^{\beta}}\right), \quad e^{-\beta x} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{(\ln x)^{\beta}}\right).$

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^{\times}, \quad \alpha < \beta \quad x^{\beta} \underset{x \to 0}{=} o\left(x^{\alpha}\right), \quad \dfrac{1}{x^{\alpha}} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{\beta}}\right),$

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^{\times}, \quad (\ln(x))^{\alpha} \underset{x \to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{\beta}}\right).$

Proposition 23 (Utilisation de la dérivée)
Si f *est dérivable en* $a \in I$ *et* $f'(a) \neq 0$, *alors* $f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x-a)$.

Remarque 12
Remarquons que, si $f'(a) = 0$, on n'a pas $f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x-a)$. Il suffit par exemple de considérer $f : x \mapsto x^2$ qui n'est pas équivalente en 0 à 0, puisque f n'est pas la fonction nulle.

Corollaire 1
On en déduit les résultats suivants :

$$\begin{array}{llll}
e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x & \ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x & \sin x \underset{x \to 0}{\sim} x & \tan x \underset{x \to 0}{\sim} x \\
\arcsin x \underset{x \to 0}{\sim} x & \arctan x \underset{x \to 0}{\sim} x & \operatorname{sh} x \underset{x \to 0}{\sim} x & \operatorname{argsh} x \underset{x \to 0}{\sim} x \\
\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x}{2} & (1+x)^{\alpha} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x & (\alpha \in \mathbb{R}) &
\end{array}$$

Proposition 24
On a $\cos x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}, \quad \operatorname{ch} x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

5 Développement limité d'une fonction

5.1 Définition et existence

Notation 1
Dans ce chapitre a désigne un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, f, g désignent des fonctions à valeurs réelles définies au voisinage de a (elles ne sont pas nécessairement définies en a)

Définition 8
On dit que f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 (ou un $\mathrm{DL}_n(a)$) si et seulement si il existe des réels $a_0, ..., a_n$ tels que, au voisinage de 0 dans I, on ait :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Autrement dit, si et seulement si il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que l'on ait :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n)$$

Proposition 25 (Unicité du $\mathrm{DL}_n(a)$)
Soit f une fonction définie au voisinage de a. Si

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

alors $\forall k \in [\![0, n]\!]$; $\quad a_k = b_k$ (donc les coefficients $a_0, .., a_n$ sont uniques)

Remarque 13 (Z)
Deux fonctions différentes peuvent avoir le même Dl en un point (elles peuvent même avoir le même Dl à tout ordre en un point). Il suffit de considérer la fonction $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$.

Corollaire 2
Si une fonction paire (respectivement impaire) admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, alors ce DL ne fait intervenir que des puissances paires (respectivement impaires).

Remarque 14 (Z)
La réciproque est fausse !

Proposition 26
Si f est de classe C^n au voisinage de a alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) + o((x-a)^n)$$

Remarque 15
La réciproque est fausse. Une fonction peut admettre un $\mathrm{DL}_n(a)$ sans être C^n au voisinage de a, voire même C^1 !

Proposition 27 (Intégration et dérivation terme à terme des $\mathrm{DL}_n(a)$)
Soit f une fonction définie au voisinage de a.

1. *Si f est continue en a et dans un de ces voisinages et si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k\right) + o((x-a)^n)$$

alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ donné par

$$\int_a^x f(t)dt \underset{x\to a}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}\right) + o((x-a)^{n+1})$$

2. *Si f est de classe C^n ($\underline{n \geqslant 1}$) en a et dans un voisinage de a alors f' admet un $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$ donné par*

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} k a_k(x-a)^{k-1}\right) + o((x-a)^{n-1})$$

5.2 Développements asymptotiques en $\pm\infty$

Définition 9
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f admet un développement asymptotique à n termes en $\pm\infty$ s'il existe n fonctions $g_0, .., g_{n-1}$ définies au voisinage de a si et seulement

- $\forall i \in [\![0, n-2]\!]$, $g_{i+1} \underset{\pm\infty}{=} o(g_i)$
- $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} g_0(x) + g_1(x) + \cdots + g_{n-1}(x) + o(g_{n-1}(x))$

Méthode 1
Dans la pratique, pour obtenir un développement asymptotique de f à n termes au voisinage de a, on procède de la façon suivante :

1. *Si $a \in \mathbb{R}$ et f admet un $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$, le développement asymptotique de f sera simplement son $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$.*
2. *Si $a \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{a} f = \pm\infty$, on procède par factorisation par les termes dominants en a dans l'expression de f afin d'obtenir des quantités tendant vers 0 et on applique les DL usuels sur ces quantités.*
3. *Si $a = \pm\infty$, on procède par factorisation par les termes dominants en $\pm\infty$ dans l'expression de f afin d'obtenir des quantités tendant vers 0 et on applique les DL usuels sur ces quantités.*

5.3 Application à l'étude locale des fonctions et des courbes paramétrées

Méthode 2 (Tangente et asymptote à la courbe représentative d'une fonction)

1. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Si on a obtenu pour f un $\mathrm{DL}(a)$ de la forme :*
$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1 x + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$$
avec $p \geqslant 2$, $a_p \neq 0$, alors la courbe représentative de f admet au point d'abscisse a une tangente d'équation $y = a_1 x + a_0$. La position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par la parité de p et le signe de a_p :
   - *si p est pair, la courbe est située au dessus de la tangente si $a_p > 0$ et au dessous si $a_p < 0$,*
   - *si p est impaire, la courbe traverse la tangente (on a un point d'inflexion). Elle est en dessous pour $x < a$ et au dessus pour $x > a$ si $a_p > 0$ et c'est le contraire si $a_p < 0$.*
2.

Méthode 3

5.4 Courbes paramétrées

Méthode 4 (Etude d'un courbe paramétrée à l'aide d'un DL)
Considérons une courbe paramétrée f de composantes x et y définies en t_0. Pour étudier l'allure de la courbe au point de paramètre t_0, on détermine un $\mathrm{Dl}[n](t_0)$ de x et y de la forme :

$$x(t) \underset{t\to t_0}{=} a_0 + a_p(t-t_0)^p + a_q(t-t_0)^q + o((t-t_0)^q)$$
$$y(t) \underset{t\to t_0}{=} b_0 + b_p(t-t_0)^p + b_q(t-t_0)^q + o((t-t_0)^q)$$

où $p \geqslant 1$ est le plus petit entier tel que le vecteur $\overrightarrow{I}\left|\begin{matrix} a_p \\ b_p \end{matrix}\right.$ soit non nul et $q > p$ est le plus petit entier tel que $\overrightarrow{J}\left|\begin{matrix} a_q \\ b_q \end{matrix}\right.$ ne soit pas colinéaire à $\overrightarrow{I}$. On peut alors écrire :

$$f(t) \underset{t\to t_0}{=} f(t_0) + (t-t_0)^p \overrightarrow{I} + (t-t_0)^p \overrightarrow{J} + o((t-t_0)^q)$$

Si on note $(X(t), Y(t))$ les coordonnées du point $f(t)$ dans le repère $(f(t_0), \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$, alors on a :

$$X(t) \underset{t\to t_0}{\sim} (t-t_0)^p \quad Y(t) \underset{t\to t_0}{\sim} (t-t_0)^q$$

ce qui permet de déterminer le signe strict de $X(t)$ et $Y(t)$ suivant la parité de p et q, ainsi que l'allure locale de la courbe.

5.5 Développements limités usuels.

$$\exp x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\arctan x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\arcsin x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{(k!)(2k+1)} x^{2k+1} + o(x^n)$$

$$\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{4} + \frac{1}{8}x^5 + \cdots + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{(k!)(2k+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

On peut retenir que

- le DL de exp permet retrouver celles de $\operatorname{ch}, \operatorname{sh}, \cos$ et $\sin$ en remarquant que l'on ne retient respectivement que les indices pairs, les indices impairs, les indices pairs en alternant les signes, les indices impairs en alternant les signes.
- le DL de $\dfrac{1}{1-x}$ permet de retrouver celui de $\dfrac{1}{1+x}$ en alternant les signes.
- le DL de $\ln(1+x)$ se retrouve en intégrant entre 0 et x le DL de sa dérivée, i.e. $\dfrac{1}{1+x}$
- le DL de $\arctan x$ se retrouve en intégrant entre 0 et x le DL de sa dérivée, i.e. $\dfrac{1}{1+x^2}$
- le DL de $(1+x)^\alpha$ est analogue à la formule du binôme en convenant que $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.
- le DL de $\arcsin x$ se retrouve en intégrant entre 0 et x le DL de sa dérivée, i.e. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$