Convergence des suites

Abdellah Bechata

www.mathematiques.fr.st

1 Suites à valeurs réelles

Définition 1 (Suites à valeurs réelles)

- *On appelle suite à valeurs réelles, ou plus simplement suite réelle, toute application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Si la notation en terme d'application d'une suite* u *est* $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array} \right.$*, la notation classique, et même historique, d'une telle suite est plutôt* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, voire* $u = (u_n)_n$*, où, par définition,* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u(n)$ *et* u_n *désigne le terme de rang* n *de la suite* u*.*
- *L'ensemble des suites réelles se note* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*.*
- *Pour des raisons pratiques, il parfois utile de considérer des applications* $u : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![N, +\infty[\![& \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array} \right.$ *où* $N \in \mathbb{N}$*. Dans ce cas, on dit qu'une telle application est (également) une suite* $u = (u_n)_{n\geqslant N}$ *définie à partir du rang* N*.*

Remarque 1
De même que l'on distingue une fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ de $f(x)$, la valeur de f en x, on évitera de confondre $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et u_n, la première expression désignant une suite et la seconde le terme de rang n de cette suite (ou encore la valeur de u en n).

Exemple 1
$u = (n^2 + 1)_{n\in\mathbb{N}}, \quad v = \left(\sqrt{n^2 - 4}\right)_{n\geqslant 2}, \quad w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où w_n est la n-ième décimale de π.

Définition 2 (Somme et produit de deux suites)
Soient $u = (u_n)$ *et* $v = (v_n)$ *deux suites réelles et* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*
On définit les suites $u + v$*,* $u \times v$ *et* $\lambda.u$ *par*

$$u + v = (u_n + v_n)_n, \quad u \times v = (u_n v_n)_n, \quad \lambda.u = (\lambda u_n)_n$$

Définition 3 (Relation d'ordre sur les suites)
Soient $u = (u_n)$ *et* $v = (v_n)$ *deux suites réelles.*
On dit que u *est inférieure à* v*, et on note* $u \leqslant v$*, si et seulement si* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$*.*
On définit ainsi une relation d'ordre sur l'ensemble des suites réelles.

1.1 Suites majorées, minorées, bornées et stationnaires

Définition 4 (Suites majorées. minorées, bornées, stationnaires)
Une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite :*

- *majorée si et seulement si il existe un réel* M*, indépendant de* n*, tel que quel* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M$*;*
- *minorée si et seulement si il existe un réel* m*, indépendant de* n*, tel que quel* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leqslant u_n$*;*
- *bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée;*
- *stationnaire si et seulement si il existe un rang* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour* $n \geqslant N$ *on ait* $u_n = u_N$*.*
  On dit également que la suite u *est constante à partir du rang* N*.*

Exemple 2
Déterminer, par les suites suivantes, celles qui sont majorées, minorées, bornées, stationnaires.

$$u = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}, \quad v = (n - n^2)_{n\in\mathbb{N}}, \quad w = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}, \quad x = ((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad y = \mathrm{E}\left(\frac{12}{2^n}\right)$$

Solution 1

- Il est immédiat que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 0$ donc la suite u est minorée par 0.
  Montrons qu'elle n'est pas majorée en procédant par l'absurde. Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^2 \leqslant M \Leftrightarrow n \leqslant \sqrt{M}$, ce qui entraine que l'ensemble des entiers est majoré, ce qui est absurde d'après le principe archimédien donc la suite u n'est pas majorée, ce qui entraine qu'elle n'est pas bornée.
  La suite u n'est pas stationnaire puisque l'application $n \mapsto n^2$ est strictement croissante.

- On remarque que $\forall n \geqslant 1, \quad n \leqslant n^2 \Leftrightarrow n - n^2 \leqslant 0$ et cette inégalité est clairement vérifiée pour $n = 0$ donc la suite v est majorée par 0.
  Montrons qu'elle n'est pas minorée en procédant par l'absurde. Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leqslant v_n$. Etant donné que la suite v est à valeurs négatives, on a nécessaire $m \leqslant 0$ donc

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leqslant n - n^2 \Leftrightarrow n^2 - n \leqslant -m \Leftrightarrow \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leqslant -m \Leftrightarrow \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1-4m}{4} \\ \Leftrightarrow \left|n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \sqrt{\frac{1-4m}{4}} \Rightarrow n = |n| = \left|\left(n - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right| \leqslant \left|n - \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{2}\right| \leqslant \sqrt{\frac{1-4m}{4}} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

  Par conséquent, l'ensemble des entiers est majoré, ce qui est absurde d'après le principe archimédien donc la suite u n'est pas minorée, ce qui entraine qu'elle n'est pas bornée.
  L'application $n \mapsto n^2 - n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ étant croissante sur $\mathbb{N}^\times$, on en déduit que la suite v ne peut être stationnaire.

- Il est immédiat que $\forall n \geqslant 1, \quad 1 \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2$ donc la suite w est minorée par 1 et majorée par 2, ce qui entraine qu'elle est bornée.
  L'application $n \mapsto 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ étant strictement décroissante, la suite w ne peut être stationnaire.

- Montrons, en procédant par l'absurde, que la suite x n'est ni minorée, ni majorée.
  Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = (-1)^n n \leqslant M$ (resp. $x_n \geqslant m$). En faisant décrire à n tous les entiers pairs (resp. impair), i.e. $n = 2p$ (resp. $n = 2p+1$) avec $p \in \mathbb{N}$, on obient

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad u_{2p} = 2p \leqslant M \Leftrightarrow p \leqslant \frac{M}{2} \quad (\text{resp. } u_{2p+1} = -(2p+1) \geqslant m \Leftrightarrow p \leqslant \frac{1-m}{2}$$

  donc l'ensemble $\mathbb{N}$ est majoré, ce qui est contradictoire avec le principe archimédien. Par conséquent, la suite x n'est pas majorée (resp. minorée) donc elle n'est pas bornée.
  Etant donné que l'application $n \mapsto 2n = x_{2n}$ est strictement croissante, la suite x ne peut être stationnaire.

- D'après la définition de la partie entière d'un réel, on a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}\left(\frac{12}{2^n}\right) \leqslant \frac{12}{2^n} < \mathrm{E}\left(\frac{12}{2^n}\right) + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{E}\left(\frac{12}{2^n}\right) \leqslant \frac{12}{2^n} \\ \frac{12}{2^n} < \mathrm{E}\left(\frac{12}{2^n}\right) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{E}\left(\frac{12}{2^n}\right) \leqslant \frac{12}{2^n} \\ \frac{12}{2^n} - 1 < \mathrm{E}\left(\frac{12}{2^n}\right) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{12}{2^n} - 1}_{\geqslant -1} \leqslant \mathrm{E}\left(\frac{12}{2^n}\right) \leqslant \underbrace{\frac{12}{2^n}}_{\leqslant 1} \Rightarrow -1 \leqslant y_n \leqslant 1\end{aligned}$$

  Par conséquent, la suite y est majorée par 1 et minorée par -1 donc elle est bornée. En outre, pour $n \geqslant 4$, on a

$$-1 < \frac{12}{2^n} - 1 \leqslant \mathrm{E}\left(\frac{12}{2^n}\right) \leqslant \frac{12}{2^n} \leqslant \frac{12}{16} < 1$$

  et, la partie entière étant un ... entier (!), on en déduit que $\forall n \geqslant 3, \quad y_n = \mathrm{E}\left(\frac{12}{2^n}\right) = 0$, ce qui montre que la suite y est stationnaire à partir du rang 4.

Lemme 1
Une suite $(u_n)_n$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_n$ est majorée.

Preuve :
Si la suite $(u_n)_n$ est bornée alors il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leqslant u_n \leqslant M$ alors $|u_n| \leqslant \max(|m|, |M|)$ (*pour s'en convaincre, faire un dessin en plaçant m, M, u_n et en se rappelant que $|x|$ désigne la distance de x à 0*).
Réciproquement, si $(|u_n|)_n$ est majorée alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M \Leftrightarrow -M \leqslant u_n \leqslant M$ donc la suite $(u_n)_n$ est bornée. ■

Méthode 1 (Justifier qu'une suite est bornée ou non)

- *Pour montrer que (u_n) est bornée, on essaie directement de majorer la suite $(|u_n|)_n$. Si cela ne convient pas, on justifie indépendamment qu'elle est minorée et qu'elle est majorée.*
- *Pour montrer que (u_n) n'est pas bornée, on montre*
  - *soit qu'elle n'est pas minorée i.e. pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe N, dépendant de A, tel que $u_n \leqslant A$.*
  - *soit qu'elle n'est pas majorée i.e. pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe N, dépendant de A, tel que $u_n \geqslant A$.*

Remarque 2

Si on a montré que (u_n) est bornée à partir de N, alors elle est bornée. En effet, il existe une constante $M > 0$ telle que $|u_n| \leqslant M$ pour $n \geqslant n_0$ mais si on pose $M' = \max\{|u_0|, \dots, |u_{n_0}|, M\}$, on a bien $|u_n| \leqslant M'$ quel que soit $n \geqslant 0$.

1.2 Suites monotones

Définition 5 (Suites (strictement) monotones)

Une suite réelle $(u_n)_n$ est dite :

- *croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$;*
- *strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$;*
- *décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_{n+1}$;*
- *strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1}$;*
- *monotone si elle est croissante ou décroissante;*
- *strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Méthode 2 (Montrer qu'une suite est (strictement) monotone)

- *Pour montrer que (u_n) est monotone et en donner le sens de variations, il suffit, en général, de déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$.*
- *Lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$ et que u_n s'exprime essentiellement à l'aide de produits et de divisions., il est judicieux d'étudier plutôt le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Dans ce cas, si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ (resp. $\leqslant 1$), alors la suite $(u_n)_n$ est croissante (resp. décroissante).*

Exercice 1

Etudier la monotonie de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

$$u_n = \ln(2n^2 - n - 1), \quad v_n = -n^2 + \cos(n), \quad w_n = \frac{n}{2^n}, \quad x_n = \arctan(n), \quad y_n = \frac{(2n)!}{n!}, \quad z_{n+1} = z_n^2 + z_n$$

Solution 2

- On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto 2x^2 - x - 1$ quiest dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction polynôme). La dérivée de cette fonction vaut $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x - 1$ et elle est strictement positive sur $[1, +\infty[$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, ce qui entraine que la suite $(f(n))_n$ est également strictement croissante à partir du rang 1. En outre, puisque $f(0) = f(1) = 0$, on en déduit que la suite $(f(n))_n$ est croissante et la croissance de la fonction ln montre que la suite $(u_n)_n = (\ln f(n))_n$ est aussi croissante.
- On étudie le signe de $v_{n+1} - v_n$

$$v_{n+1} - v_n = -(n+1)^2 + \cos(n+1) + n^2 - \cos(n) = -2n - 1 + \underbrace{\cos(n+1) - \cos(n)}_{\in[-2,2]} < 0 \quad \forall n \geqslant 1$$

  donc la suite $(v_n)_n$ est décroissante à partir du rang $n = 1$. En outre, $v_0 = 1$ et $u_1 = -2 + \cos(1) < 1$ donc la suite $(v_n)_n$ est strictement décroissante.
- La suite $(w_n)_n$ est clairement strictement positive à partir du rang 1 et elle s'exprime uniquement par des produits et des divisions donc on étudie $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}$.

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2n} \leqslant 1 \text{ car } 2n \geqslant n+1 \Leftrightarrow n \geqslant 1$$

  donc la suite $(w_n)_n$ est décroissante à partir du rang 1. Puisque $w_0 = 0$ et $w_1 = \dfrac{1}{2}$, on ne peut faire mieux.

- La fonction $x \mapsto \arctan x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc la suite $(y_n)_n = (\arctan(n))_n$ est strictement croissante.
- La suite $(z_n)_n$ est clairement strictement positive et elle s'exprime uniquement par des produits et des divisions donc on étudie $\dfrac{z_{n+1}}{z_n}$.

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!}}{\dfrac{(2n)!}{n!}} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \times \frac{n!}{(n+1) \times n!} = 2(2n+1) > 1$$

donc la suite $(z_n)_n$ est strictement croissante.

2 Limite d'une suite

2.1 Convergence d'une suite.

Considérons la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{n! + n^2 + 1}{n! + n}$. A l'aide d'un calculateur, voici les valeurs numériques à 19 décimales des 25 premières valeurs de cette suite

- $u_0 = 2$
- $u_1 = 1.5$
- $u_2 = 1.75$
- $u_3 = 1.777\,777\,777\,777\,777\,777\,8$
- $u_4 = 1.464\,285\,714\,285\,714\,285\,7$
- $u_5 = 1.168$
- $u_6 = 1.042\,699\,724\,517\,906\,336\,1$
- $u_7 = 1.008\,519\,912\,819\,496\,730\,7$
- $u_8 = 1.001\,413\,410\,037\,690\,934\,3$
- $u_9 = 1.000\,201\,163\,441\,162\,449\,1$
- $u_{10} = 1.000\,025\,077\,091\,388\,085\,9$
- $u_{11} = 1.000\,002\,780\,783\,264\,474\,7$
- $u_{12} = 1.000\,000\,277\,660\,860\,982\,7$
- $u_{13} = 1.000\,000\,025\,212\,698\,771\,2$
- $u_{14} = 1.000\,000\,002\,099\,146\,444$
- $u_{15} = 1.000\,000\,000\,161\,355\,154\,7$
- $u_{16} = 1.000\,000\,000\,011\,518\,540\,4$
- $u_{17} = 1.000\,000\,000\,000\,767\,527\,8$
- $u_{18} = 1.000\,000\,000\,000\,047\,951$
- $u_{19} = 1.000\,000\,000\,000\,002\,819\,7$
- $u_{20} = 1.000\,000\,000\,000\,000\,156\,6$
- $u_{21} = 1.000\,000\,000\,000\,000\,008\,2$
- $u_{22} = 1.000\,000\,000\,000\,000\,000\,4$
- $u_{23} = 1.000\,000\,000\,000\,000\,000\,0$
- $u_{24} = 1.000\,000\,000\,000\,000\,000\,0$

On constate que u_n se rapproche de plus en plus vers le nombre 1 ou, sous une forme plus explicite, si l'on se donne un terme d'erreur

- $\varepsilon = 10^{-1}$, alors pour tout $n \geqslant 6$, la distance entre u_n et 1 est inférieure ou égale à 10^{-1}, i.e. $\forall n \geqslant 6, \quad |u_n - 1| \leqslant 10^{-1} = \varepsilon$.
- $\varepsilon = 10^{-2}$, alors pour tout $n \geqslant 7$, la distance entre u_n et 1 est inférieure ou égale à 10^{-2}, i.e. $\forall n \geqslant 7, \quad |u_n - 1| \leqslant 10^{-2} = \varepsilon$.
- $\varepsilon = 10^{-12}$, alors pour tout $n \geqslant 17$, la distance entre u_n et 1 est inférieure ou égale à 10^{-12}, i.e. $\forall n \geqslant 17, \quad |u_n - 1| \leqslant 10^{-12} = \varepsilon$.
- $\varepsilon = 10^{-19}$, alors pour tout $n \geqslant 23$, la distance entre u_n et 1 est inférieure ou égale à 10^{-19}, i.e. $\forall n \geqslant 23, \quad |u_n - 1| \leqslant 10^{-19} = \varepsilon$.

Ceci va nous donner la définition de la convergence d'une suite réelle,

Remarque 3
Dans l'exemple que nous avons traité, nous avons utilisé des termes d'erreurs en puissance de 10 uniquement par simplicité puisque nous avons à faire à une écriture décimale. Bien entendu, le terme d'erreur ε est en général quelconque, i.e. n'est pas nécessairement une puissance de 10. On remarque également que le rang à partir duquel la distance entre u_n et 1 est inférieure à ε dépend du terme d'erreur ε.

Définition 6 (Convergence d'une suite)
On dit que la suite (u_n) converge vers $L \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad |u_n - L| \leqslant \varepsilon$$

On dit alors que L est la limite réelle de la suite (u_n) et on note $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = L$ ou encore $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} L$.
On dit que la suite $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si il existe un réel L tel que $(u_n)_n$ converge vers L. Dans le cas contraire, on dit que la suite $(u_n)_n$ est divergente.

Lemme 2
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On a l'équivalence

1. *La suite $(u_n)_n$ converge*
2. *Quel que soit $p \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n)_{n \geqslant p}$ converge.*

Dans ce cas, les limites respectives sont égales.

Preuve :
Pour l'implication directe, si $n \geqslant \max(p, N(\varepsilon))$, on a $n \geqslant p$ et $n \geqslant N(\varepsilon)$ donc $|u_n - L| \leqslant \varepsilon$.
Pour l'implication réciproque, si $n \geqslant p$ avec $n \geqslant N(\varepsilon)$ alors $n \geqslant \max(p, N(\varepsilon)) = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ et l'on a $|u_n - L| \leqslant \varepsilon$ puisque $n \geqslant N(\varepsilon)$). ■

Lemme 3 (Unicité de la limite)
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.
S'il existe deux réels L et L' tels que la suite (u_n) converge vers L et L' alors $L = L'$.

Preuve :
Par définition de la convergence, soit $\varepsilon > 0$,

$$\left.\begin{array}{l} \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N_1(\varepsilon), \quad |u_n - L| \leqslant \varepsilon \\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N_2(\varepsilon), \quad |u_n - L'| \leqslant \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \geqslant \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)),$$
$$|L - L'| = |(L - u_n) + (u_n - L')| \leqslant \underbrace{|L - u_n|}_{=|u_n - L|} + |u_n - L'| \leqslant \varepsilon + \varepsilon$$

Ainsi, quel que soit $\varepsilon > 0$, $|L - L'| \leqslant 2\varepsilon$. Procédons par l'absurde en supposant que $L \neq L'$. Alors $|L - L'| > 0$ et, en choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{4}|L - L'| > 0$, on obtient

$$|L - L'| \leqslant 2 \times \frac{1}{4}|L - L'| = \frac{1}{2}|L - L'| \Leftrightarrow |L - L'| \leqslant 0$$

Or, par définition de la valeur absolue, $|L - L'| \geqslant 0$ donc $|L - L'| = 0 \Leftrightarrow L = L'$, ce qui est absurde donc $L = L'$. ■

Lemme 4
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle convergeant vers $L \in \mathbb{R}$ alors la suite $(|u_n|)_n$ converge vers $|L|$.

Preuve :
Par définition de la convergence de $(u_n)_n$ vers L, on a

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad |u_n - L| \leqslant \varepsilon$$

En outre, on dispose de l'inégalité triangulaire $||u_n| - |L|| \leqslant |u_n - L|$, ce qui nous donne

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad ||u_n| - |L|| \leqslant |u_n - L| \leqslant \varepsilon$$

donc la suite $(|u_n|)_n$ converge bien vers $|L|$. ■

Lemme 5
Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. *La suite $(u_n)_n$ converge vers $L \in \mathbb{R}$.*
2. *La suite $(u_n - L)_n$ converge vers 0.*
3. *La suite $(|u_n - L|)_n$ converge vers 0.*
4. *Il existe une suite réelle et positive $(\alpha_n)_n$ convergeant vers 0 et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - L| \leqslant \alpha_n$.*

Preuve :
On procède par implication circulaire

- $(1) \Rightarrow (2)$: Puisque la suite $(u_n)_n$ converge vers $L \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad |u_n - L| \leqslant \varepsilon.$$

  Si l'on note $(v_n)_n$ la suite réelle $(u_n - L)_n$, d'après ce qui précède, on a

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad |v_n| \leqslant \varepsilon$$

  ce qui démontre que la suite $(v_n)_n = (u_n - L)_n$ converge bien vers 0.
- $(2) \Rightarrow (3)$: Puisque la suite $(u_n - L)_n$ converge vers 0, le lemme précédent montre que $(|u_n - L|)_n$ converge vers $|L - L| = 0$.
- $(3) \Rightarrow (4)$: Il suffit de poser $(\alpha_n)_n = (|u_n - L|)_n$. Il est alors immédiat que la suite réelle $(\alpha_n)_n$ est positive et converge vers 0 (puisque (3) est vérifiée) avec $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - L| = \alpha_n \leqslant \alpha_n$!
- $(4) \Rightarrow (1)$: On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - L| \leqslant \alpha_n$ et la suite $(\alpha_n)_n$ converge vers 0. Par définition de la convergence vers 0 et par positivité de $(\alpha_n)_n$, on a

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad |\alpha_n| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \alpha_n \leqslant \varepsilon.$$

  Par conséquent,

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad |u_n - L| \leqslant \alpha_n \leqslant \varepsilon$$

  ce qui démontre que la suite $(u_n)_n$ converge bien vers L.

■

Méthode 3 (Montrer la convergence d'une suite)
Pour montrer qu'une suite $(u_n)_n$ converge vers $L \in \mathbb{R}$, il suffit de majorer la suite $(|u_n - L|)_n$ par une suite réelle positive $(\alpha_n)_n$ convergeant vers 0.

Proposition 1

1. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^\times$ et $C \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\dfrac{C}{n^\alpha}\right)$ converge vers 0.*
2. *Soient $a \in]-1, 1[$ et $C \in \mathbb{R}$, la suite $(C \times a^n)_n$ converge vers 0.*

Preuve :

1. Si $C=0$, la suite $\left(\dfrac{C}{n^\alpha}\right)$ est nulle donc il est immédiat qu'elle converge vers 0.
Si $C \neq 0$, soit $\varepsilon > 0$, on a
$$\left|\frac{C}{n^\alpha}\right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|C|}{n^\alpha} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow n^\alpha \geqslant \frac{|C|}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \geqslant \left(\frac{|C|}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha} \Leftrightarrow n \geqslant \mathrm{E}\left(\left(\frac{|C|}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}\right)+1$$
puisque n est un entier. Si l'on pose $N(\varepsilon)=\mathrm{E}\left(\left(\dfrac{|C|}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}\right)+1 \in \mathbb{N}$, on a $\forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad \left|\dfrac{C}{n^\alpha}\right| \leqslant \varepsilon$.
Par conséquent, on a bien établit que
$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad \left|\frac{C}{n^\alpha}\right| \leqslant \varepsilon$$
ce qui démontre que la suite $\left(\dfrac{C}{n^\alpha}\right)_n$ converge vers 0.
2. Si $C=0$, la suite $(C \times a^n)$ est nulle donc il est immédiat qu'elle converge vers 0.
Si $C \neq 0$, soit $\varepsilon > 0$. Si $\varepsilon \geqslant |C|$, il est immédiat que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |C \times a^n| = |C| \times |a|^n \leqslant |C| \leqslant \varepsilon.$$
Si $\varepsilon < |C|$, on a
$$|C \times a^n| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow |C| \times |a|^n \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow |a|^n \leqslant \frac{\varepsilon}{|C|} \Leftrightarrow n \ln|a| \leqslant \ln\left(\frac{\varepsilon}{|C|}\right) \underset{\ln(a)<0}{\Leftrightarrow} n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{|C|}\right)}{\ln|a|} \Leftrightarrow n \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{|C|}\right)}{\ln|a|}\right)+1$$
puisque n est un entier. Si l'on pose $N(\varepsilon)=\mathrm{E}\left(\dfrac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{|C|}\right)}{\ln|a|}\right)+1$. Il est immédiat que $N(\varepsilon)$ est un entier relatif. Etant donné que $\ln|a|<0$ (puisque $|a|<1$) et que
$$\varepsilon < |C| \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{|C|} < 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\varepsilon}{|C|}\right) < 0$$
on obtient que $\dfrac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{|C|}\right)}{\ln|a|}$ est positif donc $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ et l'on a $\forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad |C \times a^n| \leqslant \varepsilon$.
Par conséquent, on a bien établit que
$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad |C \times a^n| \leqslant \varepsilon$$
ce qui démontre que la suite $(C \times a^n)_n$ converge vers 0.

■

Exemple 3
Montrons que les suites $(u_n)_n$ suivantes convergent vers L

$$(1) : \begin{cases} u_n = \dfrac{\cos(n!)}{n+1} \\ L=0 \end{cases}, \quad (2) : \begin{cases} \forall n \geqslant 2, \quad u_n = \dfrac{2n+1}{n-1} \\ L=2 \end{cases}, \quad (3) : \begin{cases} u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{3n+1} \\ L=\dfrac{1}{3} \end{cases} \quad (4) : \begin{cases} u_n = \dfrac{n!+\sin(n)}{n!+n+1} \\ L=1 \end{cases}$$

Solution 3
1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 0| = |u_n| = \dfrac{|\cos(n!)|}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_n$ tend vers 0 donc la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.
2. $\forall n \geqslant 2, \quad |u_n - 2| = \dfrac{3}{n-1}$ et puisque $n-1 \geqslant \dfrac{n}{2} \Leftrightarrow n \geqslant 2$, on a
$$\forall n \geqslant 2, \quad |u_n - 2| = \frac{3}{n-1} \leqslant 3 \times \frac{2}{n} = \frac{6}{n}$$
et la suite $\left(\dfrac{6}{n}\right)_n$ tend vers 0 donc la suite $(u_n)_n$ converge vers 2.

3. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n - \frac{1}{3}\right| = \frac{|3\,(-1)^n - 1|}{3(3n+1)} \leqslant \frac{3(-1)^n + |-1|}{3 \times 3n} = \frac{4}{9n}$$
et la suite $\left(\frac{4}{9n}\right)_n$ tend vers 0 donc la suite $(u_n)_n$ converge vers $\frac{1}{3}$.
4. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1| = \frac{|\sin(n) - n - 1|}{n! + n + 1} \leqslant \frac{|\sin(n)| + |-n| + |-1|}{n!} = \frac{n+2}{n!}$$
Puisque
$$\forall n \geqslant 2, \quad n+2 \leqslant 2n, \quad n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n \geqslant (n-1)n, \quad n-1 \geqslant \frac{n}{2},$$
on en déduit que
$$\forall n \geqslant 2, \quad |u_n - 1| \leqslant \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} \leqslant 2 \times \frac{2}{n} = \frac{4}{n}$$
et la suite $\left(\frac{4}{n}\right)_n$ tend vers 0 donc la suite $(u_n)_n$ converge vers 1.

Proposition 2
Toute suite convergente est bornée.

Preuve :
Soit (u_n) une suite convergeant vers $L \in \mathbb{R}$. En utilisant la définition de convergence avec $\varepsilon = 1$, on a l'existence d'un entier N tel que
$$\forall n \geqslant N, \quad |u_n - L| \leqslant 1 \Rightarrow |u_n| = |(u_n - L) + L| \leqslant |u_n - L| + |L| \leqslant 1 + |L|$$
En outre, si l'on note $M = \max(|u_0|, .., |u_N|)$ (qui est indépendant de n !), on a $\forall n \in [\![0, N]\!], \quad |u_n| \leqslant M$ donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant \max(M, 1 + |L|)$$
ce qui démontre que la suite $(u_n)_n$ est bornée. ∎

Remarque 4 (Z)
La réciproque est fausse. Par exemple, la suite $((-1)^n)_n$ est bornée nous allons voir qu"il s'agit d'une suite divergente.

Définition 7 (Suite extraite)
Soit $(u_n)_n$ une suite. Une suite (v_n) est dite extraite de (u_n) s'il existe une application $\phi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\phi(n)}$.

Remarque 5
Si $(u_n)_n$ est une suite alors les suites $(u_{n+1})_n$, $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$, $(u_{n^2})_n$, $(u_{n!})_n$ sont des suites extraites de $(u_n)_n$.

Lemme 6
Soit $\phi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ une application strictement croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi(n) \geqslant n$.

Preuve :
On remarque pour commencer que $\phi(0) \geqslant 0$ car $\phi(0) \in \mathbb{N}$. Soit $n \geqslant 1$, par stricte croisante de ϕ, on a $\phi(k) < \phi(k+1)$ pour tout entier k. Or $\phi(k)$ et $\phi(k+1)$ sont deux entiers donc l'inégalité $\phi(k) < \phi(k+1)$ est équivalente à l'inégalité
$$\phi(k) + 1 \leqslant \phi(k+1) \Leftrightarrow 1 \leqslant \phi(k+1) - \phi(k).$$
En sommant sur $k \in [\![0, n-1]\!]$ et en utilisant le télescopage, on obtient
$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (\phi(k+1) - \phi(k)) \Leftrightarrow n \leqslant \phi(n) - \phi(0) \Leftrightarrow \phi(n) \geqslant n + \phi(0) \geqslant n$$
∎

Proposition 3 (Limite d'une suite extraite)
Soit $(u_n)_n$ une suite convergeant vers $L \in \mathbb{R}$. Alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge également vers L.

Preuve :
D'après la convergence de la suite $(u_n)_n$ vers L, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geqslant N(\varepsilon), \quad |u_k - L| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $(u_{\phi(n)})_n$ une suite extraite de $(u_n)_n$. L'application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est donc strictement croissante et d'après le lemme précédent, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi(n) \geqslant n$. Soit $\varepsilon > 0$, si $n \geqslant N(\varepsilon)$, alors $\phi(n) \geqslant n \geqslant N(\varepsilon)$ donc $\left|u_{\phi(n)} - L\right| \leqslant \varepsilon$ (remplacer k par $\phi(n)$ dans la définition de la convergence de $(u_n)_n$ vers L). Par conséquent, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad \left|u_{\phi(n)} - L\right| \leqslant \varepsilon.$$

ce qui démontre la convergence de $(u_{\phi(n)})_n$ vers L. ■

En prenant la contraposée de cette proposition, on obtient le corollaire suivant

Corollaire 1 (Condition suffisante de divergence)
Soit (u_n) une suite réelle.

- *S'il existe $\phi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite extraite $(u_{\phi(n)})$ diverge, alors (u_n) diverge.*
- *Soit (u_n) une suite réelle. S'il existe $\phi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ et $\psi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que les suites extraites $(u_{\phi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ convergent vers deux limites différentes, alors la suite (u_n) ne converge pas.*

Méthode 4 (Justifier la divergence d'une suite)
Pour montrer qu'une suite $(u_n)_n$ est divergente, Il suffit de trouver

- *soit une suite extraite $(u_{\phi(n)})_n$qui est elle-même divergente*
- *soit deux suites extraites $(u_{\phi(n)})_n$ et $(u_{\varphi(n))})_n$ convergeant vers deux limites distinctes.*

Exemple 4
Les suites suivantes sont divergentes : (1) : $u_n = (-1)^n$, (2) : $v_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

Solution 4

1. On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$ donc les suites $(u_{2n})_n$ et (u_{2n+1}) convergent respectivement vers 1 et -1 donc leurs limites respectives sont distinctes. Etant donné qu'il s'agit de deux suites extraites de la même suite $(u_n)_n$, on en déduit que la suite $(u_n)_n$ est divergente.
2. On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{8n} = \sin(2n\pi) = 0$ et $v_{8n+1} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc les suites $(v_{8n})_n$ et $(v_{8n+1})_n$ convergent respectivement vers 0 et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Etant donné qu'il s'agit de deux suites extraites de la même suite $(v_n)_n$, on en déduit que la suite $(v_n)_n$ est divergente.

Proposition 4 (Suites de rangs pair et impair)
Soit (u_n) une suite réelle.
(La suite $(u_n)_n$ converge) si et seulement (les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent et que leurs limites respectives sont égales).
Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$.

Preuve :
Implication directe : il s'agit de la proposition précédente.
Implication réciproque : Notons L la limite commune aux suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$. Par définition de la convergence de chacune de ces suites, on a

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon &> 0, \quad \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geqslant N_1(\varepsilon), \quad |u_{2p} - L| \leqslant \varepsilon.\\ \forall \varepsilon &> 0, \quad \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geqslant N_2(\varepsilon), \quad |u_{2p+1} - L| \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on souhaite montrer l'existence d'un entier $N_3(\varepsilon)$ tel que $\forall n \geqslant N_3(\varepsilon), \quad |u_n - L| \leqslant \varepsilon$. Tout entier n s'écrivant soit $n = 2p$ s'il est pair, soit $n = 2p+1$ s'il est impair, pour avoir la majoration que l'on souhaite, il suffit que

- $p \geqslant N_1(\varepsilon)$ si n est pair et, dans ce cas, $n = 2p \geqslant 2N_1(\varepsilon)$
- $p \geqslant N_2(\varepsilon)$. si n est impair et, dans ce cas, $n = 2p+1 \geqslant 2N_2(\varepsilon) + 1$

Par conséquent, si l'on pose $N_3(\varepsilon) = \max(2N_1(\varepsilon), 2N_2(\varepsilon) + 1)$ alors pour tout entier $n \geqslant N_3(\varepsilon)$, soit

- n est pair donc il s'écrit $n = 2p$ avec $2p = n \geqslant N_3(\varepsilon) \geqslant 2N_1(\varepsilon)$ donc $p \geqslant N_1(\varepsilon)$, ce qui assure que $|u_n - L| = |u_{2p} - L| \leqslant \varepsilon$.

- n est impair donc il s'écrit $n = 2p+1$ avec $2p+1 = n \geqslant N_3(\varepsilon) \geqslant 2N_2(\varepsilon)+1$ donc $p \geqslant N_2(\varepsilon)$ ce qui assure que $|u_n - L| = |u_{2p+1} - L| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_3(\varepsilon), \quad |u_n - L| \leqslant \varepsilon$, ce qui démontre la convergence de $(u_n)_n$ vers L. ■

Remarque 6
Il se peut que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent sans pour autant que (u_n) converge. Il suffit pour cela de considérer la suite $u_n = (-1)^n$.
Il se peut que (u_{3n}) et (u_{3n+1}) convergent vers la même limite sans pour autant que (u_n) converge.
Considérons pour cela la suite $u_n = \cos\left(\dfrac{(4n+1)\pi}{3}\right)$. Il est immédiat que $u_{3n} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$, $u_{3n+1} = \cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$. Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge. Dans ce cas, elle converge nécessairement vers $\dfrac{1}{2}$ or la suite extraite $u_{3n+2} = \cos(3\pi) = -1$ converge vers $-1 \neq \dfrac{1}{2}$, ce qui montre que la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

2.2 Convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On constate que la suite $(u_n)_n = (n^2)_n$ prend des valeurs aussi grande que l'on souhaite, i.e. quel que soit le réel A, il existe un rang $N(A)$ tel que $\forall n \geqslant N(A), \quad u_n \geqslant A$. Bien entendu, la suite $(u_n)_n = (-n^2)_n$ prend des valeurs de plus en plus grande parmi les nombres négatifs, i.e. soit le réel A, il existe un rang $N(A)$ tel que $\forall n \geqslant N(A), \quad u_n \leqslant A$. Cela nous amène à la définition suivante.

Définition 8 (Divergence d'une suite vers $\pm\infty$)
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_n$

- *diverge vers $+\infty$ si et seulement si $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(A), \quad u_n \geqslant A$.*
  Dans ce cas, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$

- *diverge vers $-\infty$ si et seulement si $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(A), \quad u_n \leqslant A$.*
  Dans ce cas, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$.

Définition 9 (Convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$)
Rappelons que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.
On dit que $(u_n)_n$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si (elle converge dans $\mathbb{R}$ ou elle diverge vers $-\infty$ ou elle diverge vers $+\infty$).
Lorsque $(u_n)_n$ diverge vers $-\infty$ (resp. $+\infty$), on dit que la suite $(u_n)_n$ converge vers $-\infty$ (resp. $+\infty$) dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Si $(u_n)_n$ ne converge pas dans $\overline{\mathbb{R}}$, on dit qu'elle diverge dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Remarque 7
Comme dans le cas de la convergence dans $\mathbb{R}$, on a l'équivalence

1. La suite $(u_n)_n$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$)

Dans ce cas, les limites respectives sont égales.

Lemme 7
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

1. *La suite $(u_n)_n$ converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si la suite $(-u_n)_n$ converge vers $-\infty$ (resp. $+\infty$) dans $\overline{\mathbb{R}}$.*
2. *Si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$ alors $((u_n)_n$ converge vers $+\infty)$ si et seulement si $\left(\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_n\right.$ converge vers $\left.0\right)$*
3. *Si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < 0$ alors $((u_n)_n$ converge vers $-\infty)$ si et seulement si $\left(\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_n\right.$ converge vers $\left.0\right)$*

Preuve :

1. Si $(u_n)_n$ converge vers $+\infty$ alors $\forall B \in \mathbb{R}, \quad \exists N(B) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(B), \quad u_n \geqslant B$..
   Montrons que $(-u_n)_n$ converge vers $-\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$, en choisissant $B = -A$ dans la définition ci-dessus, on obtient l'existence d'un entier $N(-A)$ tel que $\forall n \geqslant N(-A), \quad u_n \geqslant -A \Leftrightarrow -u_n \leqslant A$, ce qui démontre la convergence de $(-u_n)_n$ vers $-\infty$.
   Les autres preuves sont identiques et je laisse le lecteur s'en convaincre.
2. **Implication directe** : D'après la convergence vers $+\infty$ de $(u_n)_n$, on a
$$\forall A \in \mathbb{R}. \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N(A), \quad u_n \geqslant A.$$
   Soit $\varepsilon > 0$, alors en choisissant $A = \dfrac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^\times \subset \mathbb{R}$, en posant $N_1(\varepsilon) = N(A)$ et en utilisant la stricte positivité de u_n, on a
$$\forall n \geqslant N_1(\varepsilon), \quad u_n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{u_n}\right| \leqslant \varepsilon.$$
   Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N_1(\varepsilon), \quad \left|\dfrac{1}{u_n}\right| \leqslant \varepsilon$, ce qui démontre la convergence de $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_n$ vers 0.
   Implication réciproque : D'après la convergence de $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_n$ vers 0 et en utilisant la stricte positivité de u_n, on a
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad \left|\frac{1}{u_n}\right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant \varepsilon$$
   Soit $A \in \mathbb{R}$. Si $A \leqslant 0$ puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 0$, il est immédiat que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant A$ et on choisit $N(A) = 0$.
   Si $A > 0$, en choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{A} > 0$ et en posant $N_1(A) = N(\varepsilon)$, on a $\forall n \geqslant N_1(A), \quad \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{A} \Leftrightarrow u_n \geqslant A$.
   Par conséquent, on a montré que $\forall A \in \mathbb{R}. \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N(A), \quad u_n \geqslant A$, ce qui montre que la suite $(u_n)_n$ converge vers $+\infty$.
3. **Implication directe** : D'après la convergence vers $-\infty$ de $(u_n)_n$, on a
$$\forall A \in \mathbb{R}. \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N(A), \quad u_n \leqslant A.$$
   Soit $\varepsilon > 0$, alors en choisissant $A = -\dfrac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}_-^\times \subset \mathbb{R}$, en posant $N_1(\varepsilon) = N(A)$ et en utilisant la stricte négativité de u_n, on a
$$\forall n \geqslant N_1(\varepsilon), \quad u_n \leqslant -\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow -\varepsilon \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{u_n}\right| \leqslant \varepsilon.$$
   Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N_1(\varepsilon), \quad \left|\dfrac{1}{u_n}\right| \leqslant \varepsilon$, ce qui démontre la convergence de $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_n$ vers 0.
   Implication réciproque : D'après la convergence de $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_n$ vers 0 et en utilisant la stricte négativité de u_n, on a
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad \left|\frac{1}{u_n}\right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 0$$
   Soit $A \in \mathbb{R}$. Si $A \geqslant 0$ puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant 0$, il est immédiat que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant A$ et on choisit $N(A) = 0$.
   Si $A < 0$, en choisissant $\varepsilon = -\dfrac{1}{A} > 0$ et en posant $N_1(A) = N(\varepsilon)$, on a $\forall n \geqslant N_1(A), \quad \dfrac{1}{A} \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant 0 \Leftrightarrow u_n \leqslant A$.
   Par conséquent, on a montré que $\forall A \in \mathbb{R}. \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N(A), \quad u_n \leqslant A$, ce qui montre que la suite $(u_n)_n$ converge vers $-\infty$.

■

Remarque 8
Soit la suite $(u_n)_n$ tend vers 0 avec $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0$. Si $(u_n)_n$ n'est pas de signe constant, on n'est pas assuré que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$. Il suffit de considérer la suite $(u_n)_n = \left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ et nous montrerons dans la suite que $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_n$ diverge dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Lemme 8
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On dispose des équivalences suivantes :

1. *(La suite $(u_n)_n$ converge vers $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$) $\Leftrightarrow$ (Il existe une suite réelle $(\alpha_n)_n$ convergeant vers $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \alpha_n$).*

2. *(La suite $(u_n)_n$ converge vers $-\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$) $\Leftrightarrow$ (Il existe une suite réelle $(\alpha_n)_n$ convergeant vers $-\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \alpha_n$).*

Preuve :
Pour l'implication directe du 1., il suffit de prendre $(\alpha_n)_n = (u_n)_n$! Pour la réciproque du 1., puisque $(\alpha_n)_n$ converge vers $+\infty$, on a

$$\forall A \in \mathbb{R}. \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N(A), \quad \alpha_n \geqslant A.$$

Par conséquent,

$$\forall A \in \mathbb{R}. \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N(A), \quad u_n \geqslant \alpha_n \geqslant A.$$

ce qui démontre que la suite $(u_n)_n$ converge vers $+\infty$.
L'équivalence du 2. découle du lemme précédent et de l'équivalence du 1. ■

Proposition 5

1. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^\times$ et $C \in \mathbb{R}_+^\times$, la suite $(C \times n^\alpha)$ converge vers $+\infty$.*
2. *Soient $a \in]1, +\infty[$ et $C \in \mathbb{R}_+^\times$, la suite $(C \times a^n)_n$ converge vers $+\infty$.*

Preuve :

- **Première méthode** :
  1. En remarquant que $C \times n^\alpha = \dfrac{1}{\dfrac{1}{C} \times n^{-\alpha}} > 0$ avec $-\alpha < 0$ et que la suite $\left(\dfrac{1}{C} \times n^{-\alpha}\right)_n$ converge vers 0 (cf. section précédente), on en déduit que $(C \times n^\alpha)_n$ converge vers $+\infty$.
  2. En remarquant que $C \times a^n = \dfrac{1}{\dfrac{1}{C} \times \left(\dfrac{1}{a}\right)^n} > 0$ avec $\dfrac{1}{a} \in]0, 1[\subset]-1, 1[$ et que la suite $\left(\dfrac{1}{C} \times \left(\dfrac{1}{a}\right)^n\right)_n$ converge vers 0 (cf. section précédente), on en déduit que $(C \times a^n)$ converge vers $+\infty$.

- **Deuxième méthode** :
  1. Soit $A \in \mathbb{R}$. Si $A \leqslant 0$ puis que $C \times n^\alpha \geqslant 0$ pour tout entier n, il est immédiat que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad C \times n^\alpha \geqslant A$ et on choisit $N(A) = 0$.
     Si $A > 0$, on a
     $$C \times n^\alpha \geqslant A \Leftrightarrow n^\alpha \geqslant \frac{A}{C} \Leftrightarrow n \geqslant \left(\frac{A}{C}\right)^{1/\alpha} \Leftrightarrow n \geqslant \mathrm{E}\left(\left(\frac{A}{C}\right)^{1/\alpha}\right) + 1$$
     puisque n est un entier. Si l'on pose $N(\varepsilon) = \mathrm{E}\left(\left(\dfrac{A}{C}\right)^{1/\alpha}\right) + 1 \in \mathbb{N}$, on a $\forall n \geqslant N(A), \quad C \times n^\alpha \geqslant A$.
     Par conséquent, on a bien établit que
     $$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(A), \quad C \times n^\alpha \geqslant A$$
     ce qui démontre que la suite $(C \times n^\alpha)_n$ converge vers $+\infty$.
  2. Soit $A \in \mathbb{R}$. Si $A \leqslant 0$ puis que $C \times a^n \geqslant 0$ pour tout entier n, il est immédiat que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad C \times a^n \geqslant A$ et on choisit $N(A) = 0$.
     Si $0 < A \leqslant C$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad C \times a^n \geqslant C \geqslant A$ (puisque $a \geqslant 1$) et on choisit $N(A) = 0$.
     Si $A > C$, on a
     $$C \times a^n \geqslant A \Leftrightarrow a^n \geqslant \frac{A}{C} \Leftrightarrow n \ln(a) \geqslant \ln\left(\frac{A}{C}\right) \underset{\ln(a)>0}{\Leftrightarrow} n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{A}{C}\right)}{\ln(a)} \Leftrightarrow n \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{\ln\left(\frac{A}{C}\right)}{\ln(a)}\right) + 1$$
     puisque n est un entier. Si l'on pose $N(A) = \mathrm{E}\left(\dfrac{\ln\left(\frac{A}{C}\right)}{\ln(a)}\right) + 1 \in \mathbb{N}$ (puisque $\dfrac{A}{C} \geqslant 1$ donc $\ln\left(\dfrac{A}{C}\right) \geqslant 0$) et l'on a $\forall n \geqslant N(A), \quad C \times a^n \geqslant A$.
     Par conséquent, on a bien établit que
     $$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(A), \quad C \times a^n \geqslant A$$
     ce qui démontre que la suite $(C \times a^n)_n$ converge vers $+\infty$.

■

Méthode 5 (Justifier qu'une suite converge vers $\pm\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$)
Pour montrer qu'une suite $(u_n)_n$ converge

- *vers $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, il suffit de la minorer par une suite tendant vers $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.*
- *vers $-\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, il suffit de la majorer par une suite tendant vers $-\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Exemple 5
Montrons que les suites $(u_n)_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n+1}\right)_n$ et $(v_n)_n = (n!)_n$ divergent vers $+\infty$ tandis que la suite $(v_n)_n = \left(-n^4+n\right)_n$ diverge vers $-\infty$.

Solution 5

- Soit $A \in \mathbb{R}$, déterminons un rang $N(A)$ à partir duquel $u_n \geqslant A$. Il est immédiat que si $A \leqslant 0$, on choisit $N(A) = 0$. Si $A > 0$, on remarque que
$$\frac{n^2+1}{n+1} \geqslant A \Leftrightarrow n^2+1 \geqslant A(n+1) \Leftrightarrow n^2 - An + 1 - A \geqslant 0$$
Le trinôme $x^2 - Ax + 1 - A$ admet pour discriminant $\Delta = A^2 + 4A + 4 > 0$ dont il possède deux racines $x_\pm = \dfrac{A \pm \sqrt{A^2+4A+4}}{2}$. Ainsi, pour
$$n \geqslant \frac{A+\sqrt{A^2+4A+4}}{2} \Leftrightarrow n \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{A+\sqrt{A^2+4A+4}}{2}\right) + 1 = N(A) \in \mathbb{N}$$
on a $u_n \geqslant A$. Par conséquent, $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(A), \quad u_n \geqslant A$, ce qui démontre que $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.
On aurait également pu remarquer que $\forall n \geqslant 1, \quad u_n \geqslant \dfrac{n^2+1}{n+1}$
- On remarque que pour $n \geqslant 1$, on a $n! = 1 \times \cdots \times n \geqslant n$.
Soit $A \in \mathbb{R}$. Si $A \leqslant 0$, comme $n!$ est positif, il est immédiat que $\forall n \geqslant 0, \quad v_n \geqslant A$ et on choisit $N(A) = 0$.
Si $A \geqslant 0$, on remarque que $n! = 1 \times \cdots \times n \geqslant n$ donc en choisissant $N(A) = \mathrm{E}(A) + 1 \in \mathbb{N}$, on a $\forall n \geqslant N(A), \quad v_n \geqslant n \leqslant A$.
Par conséquent, $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(A), \quad v_n \geqslant A$, ce qui démontre que $(v_n)_n$ diverge vers $+\infty$.
- On remarque que pour $n \geqslant 2, \quad 8 \leqslant n^3 \Leftrightarrow 1 \leqslant \dfrac{1}{8}n^3 \Leftrightarrow n \leqslant \dfrac{1}{8}n^4$ donc $\forall n \geqslant 2, \quad v_n \leqslant -n^4 + \dfrac{1}{8}n^4 = -\dfrac{7}{8}n^4$. En particulier, la suite $(v_n)_n$ est négative à partir du rang 2.
Soit $A \in \mathbb{R}$. Si $A \geqslant 0$, comme u_n est négatif pour $n \geqslant 2$, il est immédiat que $\forall n \geqslant 2, \quad u_n \leqslant 0$ et on choisit $N(A) = 2$. Si $A < 0$, on remarque que
$$-\frac{7}{8}n^4 \leqslant A \Leftrightarrow n^4 \geqslant -\frac{8A}{7} \Leftrightarrow n \geqslant \sqrt[4]{-\frac{8A}{7}} \Leftrightarrow n \geqslant \mathrm{E}\left(\sqrt[4]{-\frac{8A}{7}}\right) + 1$$
En choisissant $N(A) = \mathrm{E}\left(\sqrt[4]{-\dfrac{8A}{7}}\right) + 1 \in \mathbb{N}$, on a $\forall n \geqslant N(A), \quad u_n \leqslant -\dfrac{7}{8}n^4 \leqslant A$.
Par conséquent, $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(A), \quad u_n \leqslant A$, ce qui démontre que $(u_n)_n$ diverge vers $-\infty$.

Proposition 6 (Une suite divergeant vers $+\infty$ est minorée)
Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs réelles

- *Si $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$ alors $(u_n)_n$ est minorée.*
- *Si $(u_n)_n$ diverge vers $-\infty$ alors $(u_n)_n$ est majorée.*

Preuve :

- D'après la définition de divergence vers $+\infty$ en choisissant $A = 0$, on est assuré de l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant 0$. En outre, si l'on note $m = \min(u_0, .., u_N)$ (qui est indépendant de n !), on a $\forall n \in [\![0, N]\!], \quad u_n \geqslant m$ donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \min(0, m)$$
ce qui démontre que la suite $(u_n)_n$ est minorée.

- D'après la définition de divergence vers $-\infty$ en choisissant $A = 0$, on est assuré de l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant 0$. En outre, si l'on note $M = \max(u_0, .., u_N)$ (qui est indépendant de n !), on a $\forall n \in [\![0, N]\!], \quad u_n \leqslant M$ donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \max(0, M)$$
e qui démontre que la suite $(u_n)_n$ est majorée.

■

Proposition 7 (Limite d'une suite extraite)
Soit $(u_n)_n$ une suite convergeant vers $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge également vers L.

Preuve :
Le cas où $L \in \mathbb{R}$ a été traité dans la section précédente.
Si $(u_n)_n$ converge vers $+\infty$, on a
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geqslant N(A), \quad u_k \geqslant A.$$
Soit $(u_{\phi(n)})_n$ une suite extraite de $(u_n)_n$. L'application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est donc strictement croissante, ce qui entraine que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi(n) \geqslant n$. Soit $A \in \mathbb{R}$, si $n \geqslant N(A)$, alors $\phi(n) \geqslant n \geqslant N(A)$ donc $u_{\phi(n)} \geqslant A$ (remplacer k par $\phi(n)$ dans la définition de la divergence vers $+\infty$ de $(u_n)_n$). Par conséquent, on a
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(A), \quad u_{\phi(n)} \geqslant A.$$
ce qui démontre la divergence vers $+\infty$ de $(u_{\phi(n)})_n$.
Si $(u_n)_n$ converge vers $-\infty$, on procède de même en remplaçant $\geqslant$ par $\leqslant$. ■

En prenant la contraposée de la proposition ci-dessus, on obtient le corollaire suivant

Corollaire 2 (Condition suffisante de divergence dans $\overline{\mathbb{R}}$)
Soit (u_n) une suite réelle.

- *S'il existe $\phi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite extraite $(u_{\phi(n)})$ diverge dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors (u_n) diverge dans $\overline{\mathbb{R}}$.*
- *S'il existe $\phi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ et $\psi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que les suites extraites $(u_{\phi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ convergent vers deux limites différentes dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors la suite (u_n) diverge dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Exemple 6
Montrer que les suites (1) : $u_n = (-1)^n n, \quad (2) : v_n = a^n$ avec $a < -1$ sont divergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Solution 6

1. On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n} = (-1)^{2n}(2n) = 2n$ et $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -(2n+1)$ donc les suites $(u_{2n})_n$ et (u_{2n+1}) convergent dans $\overline{\mathbb{R}}$ respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$ donc leurs limites respectives sont distinctes dans $\overline{\mathbb{R}}$. Etant donné qu'il s'agit de deux suites extraites de la même suite $(u_n)_n$, on en déduit que la suite $(u_n)_n$ est divergente dans $\overline{\mathbb{R}}$.
2. Puisque $a \leqslant 0$, on a $a = -|a|$. En remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n} = (-|a|)^{2n} = (-1)^{2n}|a|^{2n} = (|a|^2)^n$ et $u_{2n+1} = (-|a|)^{2n+1} = (-1)^{2n+1}|a|^{2n} = |a| \times (|a|^2)^n$ donc les suites $(u_{2n})_n$ et (u_{2n+1}) convergent dans $\overline{\mathbb{R}}$ respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$ (puisque $|a|^2 > 1$) donc leurs limites respectives sont distinctes dans $\overline{\mathbb{R}}$. Etant donné qu'il s'agit de deux suites extraites de la même suite $(u_n)_n$, on en déduit que la suite $(u_n)_n$ est divergente dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 8 (Suites de rangs pair et impair)
Soit (u_n) une suite réelle.
(La suite $(u_n)_n$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$) si et seulement (les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent dans $\overline{\mathbb{R}}$ et que leurs limites respectives sont égales).
Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$.

Preuve :
Implication directe : il s'agit de la proposition précédente.
Implication réciproque : On note L leurs limites communes.

- Le cas $L \in \mathbb{R}$ a été traité dans la section précédente.
- Si $L = +\infty$. Par définition de la convergence de chacune de ces suites, on a
$$\begin{aligned} \forall A \quad &\in \quad \mathbb{R}, \quad \exists N_1(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geqslant N_1(A), \quad u_{2p} \geqslant A. \\ \forall A \quad &\in \quad \mathbb{R}, \quad \exists N_2(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geqslant N_2(A), \quad u_{2p+1} \geqslant A. \end{aligned}$$
Soit $A \in \mathbb{R}$, on pose $N_3(A) = \max(2N_1(A), 2N_2(A) + 1)$ alors pour tout entier $n \geqslant N_3(A)$, soit

- n est pair donc il s'écrit $n = 2p$ avec $2p = n \geqslant N_3(A) \geqslant 2N_1(A)$ donc $p \geqslant N_1(\varepsilon)$, ce qui assure que $u_n = u_{2p} \geqslant A$.
- n est impair donc il s'écrit $n = 2p+1$ avec $2p+1 = n \geqslant N_3(A) \geqslant 2N_2(A)+1$ donc $p \geqslant N_2(A)$ ce qui assure que $u_n = u_{2p+1} \geqslant A$.

Ainsi, $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_3(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_3(A), \quad u_n \geqslant A$, ce qui démontre la convergence de $(u_n)_n$ vers $+\infty$.

- Si $L = -\infty$, alors les suites $(-u_{2n})_n$ et $(-u_{2n+1})$ convergent vers $+\infty$ donc la suite $(-u_n)_n$ converge vers $+\infty$, ce qui entraine que la suite $(u_n)_n$ converge vers $-\infty$.

■

3 Opérations sur les limites

3.1 Résultats préliminaires

Proposition 9 (Produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0)
Le produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0 *est une suite convergeant vers* 0.

Preuve :
Notons $(u_n)_n$ la suite bornée et $(v_n)_n$ la suite convergeant vers 0.
Puisque la suite $(u_n)_n$ est bornée, il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M$ et puisque $(v_n)_n$ tend vers 0,

$$\forall \varepsilon' > 0, \quad \exists N(\varepsilon') \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon'), \quad |v_n| \leqslant \varepsilon'$$

Par conséquent,

$$\forall \varepsilon' > 0, \quad \exists N(\varepsilon') \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon'), \quad |u_n v_n| = |u_n| \times |v_n| \leqslant M \times \varepsilon.$$

Ainsi , soit $\varepsilon > 0$, en choisissant $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{M}$, on est assuré de l'existence de $N_1(\varepsilon) = N\left(\dfrac{\varepsilon}{M}\right) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1(\varepsilon), \quad |u_n v_n| \leqslant \varepsilon$, ce qui démontre que $(u_n v_n)_n$ converge vers 0. ■

Proposition 10 (Somme de deux suites convergeant vers 0)
La somme de deux suites convergeant vers 0 *est une suite convergeant vers* 0.

Preuve :
Notons $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ses deux suites. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon' &> 0, \quad \exists N_1(\varepsilon') \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon'), \quad |u_n| \leqslant \varepsilon' \\ \forall \varepsilon'' &> 0, \quad \exists N_2(\varepsilon'') \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon''), \quad |v_n| \leqslant \varepsilon'' \end{aligned}$$

Lorsque $n \geqslant \max(N_1(\varepsilon'), N_2(\varepsilon''))$, les deux majorations sont vérifiées et l'on a

$$\forall n \geqslant \max(N_1(\varepsilon'), N_2(\varepsilon'')), \quad |u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant \varepsilon' + \varepsilon''$$

Soit $\varepsilon > 0$, en choisissant $\varepsilon' = \varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et en notant $N_3(\varepsilon) = \max\left(N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\right) \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall n \geqslant N_3(\varepsilon), \quad |u_n + v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui montre la convergence vers 0 de la suite $(u_n + v_n)_n$. ■

Corollaire 3
Si $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *convergent vers* 0 *alors pour tous réels* α, β, *la suite* $(\alpha u_n + \beta v_n)_n$ *converge vers* 0.

Preuve :
C'est la conséquence immédiate des deux propositions précédentes. ■

Proposition 11 (non annulation d'une suite convergeant vers une limite non nulle)
Soit $(u_n)_n$ *une suite réelle convergeant dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *et de limite non nulle. Alors il existe un rang* N *tel que* $\forall n \geqslant N, \quad u_n \neq 0$ *et* u_n *est du signe de sa limite. En outre, la suite* $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n \geqslant N}$ *est bornée.*

Preuve :

- **Premier cas** $L \in \mathbb{R}^{\times}$: Puisque $L \neq 0$, en utilisant la définition de la convergence avec $\varepsilon = \dfrac{|L|}{2} > 0$, on obtient l'existence d'un entier N tel que

$$\begin{aligned}\forall n \quad &\geqslant \quad N, \quad |u_n - L| \leqslant \frac{|L|}{2} \Leftrightarrow -\frac{|L|}{2} \leqslant u_n - L \leqslant \frac{|L|}{2} \Leftrightarrow \frac{2L-|L|}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{2L+|L|}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < \dfrac{L}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3L}{2} & \text{si } L > 0 \\ \dfrac{3L}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{L}{2} < 0 & \text{si } L < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{2}{L} & \text{si } L > 0 \\ \dfrac{2}{L} \leqslant \dfrac{1}{u_n} u_n < 0 & \text{si } L < 0 \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{1}{u_n}\right| \leqslant \frac{2}{|L|}\end{aligned}$$

ce qui démontre que la suite $(u_n)_n$ s'annule pas à partir du rang N, que le signe de $(u_n)_{n \geqslant N}$ est celui de L et la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n \geqslant N}$ est bornée.

- **Deuxième cas** $L = +\infty$: En utilisant la définition de la convergence vers $+\infty$ avec $A = 1$, on obtient l'existence d'un entier N tel que $\forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant 1 > 0$, ce qui entraine que la suite $(u_n)_n$ est strictement positive à partir du rang N et $\forall n \geqslant N, \quad 0 < \dfrac{1}{u_n} \leqslant 1$.

- **Troisième cas** $L = -\infty$: En utilisant la définition de la convergence vers $-\infty$ avec $A = -1$, on obtient l'existence d'un entier N tel que $\forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant -1 < 0$, ce qui entraine que la suite $(u_n)_n$ est strictement négative à partir du rang N et $\forall n \geqslant N, \quad -1 \leqslant \dfrac{1}{u_n} < 0$.

■

3.2 Propriétés algébriques des limites dans $\mathbb{R}$

Proposition 12 (Combinaison linéaire et produit de deux suites convergentes)
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles convergeant respectivement vers L et L et α, β deux réels (indépendants de n). Alors la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)_n$ converge vers $\alpha L + \beta L'$ et la suite $(u_n v_n)_n$ converge vers LL'.

Preuve :

- $(\alpha u_n + \beta v_n)_n$: On a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\alpha u_n + \beta v_n) - (\alpha L + \beta L') = \alpha(u_n - L) + \beta(v_n - L')$$
Puisque les suites $(u_n - L)_n$ et $(v_n - L)_n$ convergent vers 0, on en déduit que la suite $\left(\alpha(u_n - L) + \beta(v_n - L')\right)_n$ tend vers 0, ce qui démontre la convergence de la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)_n$ vers $\alpha L + \beta L'$.

- $(u_n v_n)_n$: On a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n v_n - LL' = u_n\left[(v_n - L') + L'\right] - LL' = u_n(v_n - L') + L'u_n - LL' = u_n(v_n - L') + L'(u_n - L)$$
La suite $(u_n)_n$ étant convergeante, on est assuré qu'elle est bornée et comme la suite $(v_n - L')_n$ tend vers 0, on obtient que la suite $\left(u_n(v_n - L')\right)_n$ tend vers 0. Il est immédiat que la suite $\left(L'(u_n - L)\right)_n$ tend vers 0 donc la suite $\left(u_n v_n - LL'\right)_n$ qui est la somme de ces deux suites converge aussi vers 0, ce qui démontre la convergence de $(u_n v_n)_n$ vers LL'.

■

Exemple 7
Montrons que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente puis nous allons voir que l'on peut rien dire de la somme de deux suites divergentes.

Solution 7
On note $(u_n)_n$ la suite convergente et $(v_n)_n$ la suite divergente. On procède par l'absurde en supposant que $(u_n + v_n)_n$ est convergente. On a alors $(v_n)_n = (u_n + v_n) - (u_n)_n$ donc la suite $(v_n)_n$ est somme de deux suites convergentes donc elle est convergente, ce qui est absurde donc $(u_n + v_n)_n$ est divergente.
Quant à la somme de deux suites divergentes, elle est parfois convergente (considérer $(u_n)_n = ((-1)^n)_n$ et $(v_n)_n = (1 - (-1)^n)_n$) et parfois divergente (considérer $(u_n)_n = (v_n)_n = ((-1)^n)_n$).

Proposition 13 (Quotient de deux suites convergentes)
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réels avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = L' \in \mathbb{R}^\times$.
Alors les suites $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)_n$ et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ sont bien définies à partir d'un certain rang et elles convergent respectivement vers $\dfrac{1}{L'}$ et $\dfrac{L}{L'}$.

Preuve :
Puisque $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} L' \neq 0$, on est assuré de l'existence d'un rang N tel que $\forall n \geqslant N, \quad v_n \neq 0$ et que la suite $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)_{n\geqslant N}$ est bornée. Par conséquent, les suites $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)_n$ et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ existent bien à partir du rang N et l'on a

$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{1}{v_n} - \frac{1}{L'} = \frac{1}{L} \times \frac{1}{v_n}(L' - v_n)$$

La suite $(L' - v_n)_n$ converge vers 0, la suite $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)_{n\geqslant N}$ est bornée donc la suite $\left(\dfrac{1}{L} \times \dfrac{1}{v_n}(L' - v_n)\right)_n$ converge vers 0, ce qui entraine que la suite $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)_n$ converge vers $\dfrac{1}{L'}$.
Ensuite, puisque $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$ est le produit de deux suites convergeant respectivement vers L et $\dfrac{1}{L'}$, on en déduit que $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers $L \times \dfrac{1}{L'} = \dfrac{L}{L'}$. ■

Méthode 6 (Limite d'une suite $(a_n)^{b_n}$)
Pour déterminer la limite d'une suite de la forme $\left((a_n)^{b_n}\right)_n$ (avec a_n et b_n dépendant de n), on utilise l'écriture exponentielle $(a_n)^{b_n} = \exp(b_n \ln(a_n))$ puis on détermine la limite de la suite $(b_n \ln(a_n))_n$.

3.3 Propriétés des limites $\pm\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$

Proposition 14 (somme de deux suites tendant vers $\pm\infty$)
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles convergeant toutes deux vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors $(u_n + v_n)_n$ converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Preuve :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$: Par définition de la convergence de chacune de ces suites vers $+\infty$, on a

$$\begin{array}{lcl} \forall A' & \in & \mathbb{R}, \quad \exists N_1(A') \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_1(A'), \quad u_n \geqslant A'. \\ \forall A'' & \in & \mathbb{R}, \quad \exists N_2(A'') \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_2(A''), \quad v_n \geqslant A''. \end{array}$$

  Lorsque $n \geqslant \max(N_1(A'), N_2(A''))$, on a $u_n + v_n \geqslant A' + A''$. Soit $A \in \mathbb{R}$, en choisissant $A' = A'' = \dfrac{A}{2}$ et en posant $N_3(A) = \max\left(N_1\left(\dfrac{A}{2}\right), N_2\left(\dfrac{A}{2}\right)\right) \in \mathbb{N}$, on a $\forall n \geqslant N_3(A), \quad u_n + v_n \geqslant \dfrac{A}{2} + \dfrac{A}{2} = A$, ce qui montre que $(u_n + v_n)_n$ converge vers $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. On effectue la même preuve en remplaçant simplement le symbole « $\geqslant$ » par le symbole « $\leqslant$ »

■

Proposition 15 (produit de deux suites tendant vers $\pm\infty$)
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles convergeant toutes deux vers deux infinis de même signe (resp. de signe différents) alors $(u_n v_n)_n$ converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Preuve :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$: Par définition de la convergence de chacune de ces suites vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} \forall A' &\in \mathbb{R}, \quad \exists N_1(A') \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_1(A'), \quad u_n \geqslant A'. \\ \forall A'' &\in \mathbb{R}, \quad \exists N_2(A'') \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_2(A''), \quad v_n \geqslant A''. \end{aligned}$$

  En choisissant $A' = A'' = 1$, on en déduit que pour $n \geqslant \max(N_1(1), N_2(1)) = N$, $u_n \geqslant 1$ et $v_n \geqslant 1$. Soit $A \in \mathbb{R}$.
  Si $A \leqslant 0$, puisque u_n et v_n sont positives à partir du rang N, il est immédiat que $\forall n \geqslant N, \quad u_n v_n \geqslant 0 \geqslant A$ et on choisit $N(A) = N$
  Si $A > 0$, en choisissant $A' = A$, $A'' = 1$ et en posant $N(A) = \max(N_1(A), N_2(1), N)$, on a $u_n \geqslant 1$, $v_n \geqslant 1$ et $u_n \geqslant A$ donc $u_n v_n \geqslant A \times 1 = A$.
  Par conséquent, $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(A), \quad u_n v_n \geqslant A$, ce qui démontre que $(u_n v_n)_n$ tend vers $+\infty$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$: Alors $(-u_n)_n$ et $(-v_n)_n$ tendent vers $+\infty$ donc $((-u_n)(-v_n))_n = (u_n v_n)_n$ tend vers $+\infty$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$: Alors $(u_n)_n$ et $(-v_n)_n$ tendent vers $+\infty$ donc $(u_n(-v_n))_n = -(u_n v_n)_n$ tend vers $+\infty$ ce qui entraine que $(u_n v_n)_n$ tend vers $-\infty$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$: Alors $(-u_n)_n$ et $(v_n)_n$ tendent vers $+\infty$ donc $((-u_n)v_n)_n = -(u_n v_n)_n$ tend vers $+\infty$ ce qui entraine que $(u_n v_n)_n$ tend vers $-\infty$.

■

3.4 Propriétés des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$

Nous allons énoncer les règles de calculs sur les limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ par différents tableaux. La notation F.I. signifie forme indéterminée c'est-à-dire que le théorème correspond ne permet pas de conclure dans le cas général.

Théorème 1
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles convergeant dans $\overline{\mathbb{R}}$

1. ***Addition*** :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n)$	$-\infty$	$L \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*
$L' \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$L + L'$	$+\infty$
$+\infty$	*F.I.*	$+\infty$	$+\infty$

$\longleftarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$; $\uparrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

2. ***Mulplication par un nombre*** : *$\lambda \in \mathbb{R}^\times$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \times \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.*

3. ***Produit*** :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n \times v_n)$	$-\infty$	$L < 0$	0	$L > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$-\infty$	$-\infty$.
$L' < 0$	$+\infty$	$L \times L'$	0	$L \times L'$	$-\infty$
0	*F.I.*	0	0	0	*F.I.*
$L' > 0$	$-\infty$	$L \times L'$	0	$L \times L'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$+\infty$	$+\infty$

$\longleftarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$; $\uparrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4. ***Inverse*** :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$-\infty$	$L \neq 0$	$L = 0$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$	0	$\dfrac{1}{L}$	*F.I.*	0

En outre, s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \quad u_n > 0$ (resp. < 0), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$ (resp. $-\infty$).

5. ***Quotient*** :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n \,/\, v_n)$	$-\infty$	$L < 0$	0	$L > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$-\infty$	$-\infty$.
$L' < 0$	$+\infty$	$L \times L'$	0	$L \times L'$	$-\infty$
0	*F.I.*	0	0	0	*F.I.*
$L' > 0$	$-\infty$	$L \times L'$	0	$L \times L'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$+\infty$	$+\infty$

$\longleftarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$; $\uparrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Preuve :
Les cas où les deux suites tendent toutes deux vers une limite réelle ou toutes deux vers l'infini a été établit précédemment Nous allons donc montrer uniquement les cas où l'une tend vers l'infini et l'autre vers une limite réelle.

1. On va montrer le cas où $(u_n)_n$ tend vers l'infini et $(v_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}$, les autres cas s'y ramenant en échangeant $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \in \mathbb{R}$: La suite $(v_n)_n$ étant convergente dans $\mathbb{R}$, elle est donc bornée. En particulier, elle est minorée par un certain réel m. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on a $\forall A' \in \mathbb{R}, \quad \exists N(A') \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(A'), \quad u_n \geqslant A'$. Soit $A \in \mathbb{R}$, en choisissant $A' = A - m$ et en posant $N_1(A) = N(A-m) \in \mathbb{N}$, on a $\forall n \geqslant N(A), \quad u_n + v_n \geqslant (A-m) + m = A$, ce qui démontre que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \in \mathbb{R}$: Alors $(-u_n)_n$ tend vers $+\infty$ et $(-v_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}$ donc $((-u_n) + (-v_n))_n = -(u_n + v_n)_n$ tend vers $+\infty$, ce qui entraine que $(u_n + v_n)_n$ tend vers $-\infty$.
2.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lambda > 0$: On a $\forall A' \in \mathbb{R}, \quad \exists N(A') \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(A'), \quad u_n \geqslant A'$. Soit $A \in \mathbb{R}$, en choisissant $A' = \dfrac{A}{\lambda}$ et en posant $N_1(A) = N\left(\dfrac{A}{\lambda}\right) \in \mathbb{N}$, on a $\forall n \geqslant N(A), \quad \lambda.u_n \geqslant \lambda \times \dfrac{A}{\lambda} = A$, ce qui démontre que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda.u_n) = +\infty$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lambda < 0$: Alors $-\lambda > 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\lambda.u_n) = +\infty$, ce qui entraine que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda.u_n) = -\infty$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lambda > 0$: Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda.(-u_n)) = +\infty$, ce qui entraine que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda.u_n) = -\infty$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lambda < 0$: Alors $-\lambda > 0$ et $\lim(-u_n) = +\infty$ donc $((-\lambda)(-u_n))_n = (\lambda.u_n)_n$ converge vers $+\infty$.
3. On va montrer le cas où $(u_n)_n$ tend vers l'infini et $(v_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}$, les autres cas s'y ramenant en échangeant $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \in \mathbb{R}_+^\times$: Puisque $(v_n)_n$ converge vers un réel strictement positif L, on est assuré qu'il existe un rang N tel que $\forall n \geqslant N, \quad v_n \geqslant \dfrac{L}{2}$ et, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, On a $\forall A' \in \mathbb{R}, \quad \exists N(A') \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(A'), \quad u_n \geqslant A'$.
   Soit $A \in \mathbb{R}$, en choisissant $A' = \dfrac{2A}{L}$ et en posant $N_1(A) = N\left(\dfrac{2A}{L}\right) \in \mathbb{N}$, on a $\forall n \geqslant N(A), \quad u_n v_n \geqslant \dfrac{2A}{L} \times \dfrac{L}{2} = A$, ce qui démontre que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = +\infty$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \in \mathbb{R}_-^\times$: Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(-v_n) \in \mathbb{R}_+^\times$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n(-v_n)) = +\infty$, ce qui entraine que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = -\infty$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \in \mathbb{R}_+^\times$: Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}((-u_n)v_n) = +\infty$, ce qui entraine que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = -\infty$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \in \mathbb{R}_-^\times$: Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-v_n) \in \mathbb{R}_+^\times$ donc $((-u_n)(-v_n))_n = (u_n v_n)_n$ converge vers $+\infty$.
4. Tous les cas ont déjà été établit.
5. C'est une conséquence immédiate des résultats sur les produits et les inverses en remarquant que $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$.

■

4 Limites et inégalités

4.1 Passage d'inégalités larges à la limite

Proposition 16 (Passage d'inégalités larges à la limite)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

1. *Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant v_n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*

2. *Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant 0$.*

Preuve :
Le second point est une conséquence immédiate du premier (échanger $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ puis considérer $v_n = 0$).
Etablissons le premier point en procédant par l'absurde. Si $\lim u_n > \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ alors la suite $(u_n - v_n)_n$ a une limite strictement positive. D'après les résultats préliminaires de la section « opérations sur les limites », cela entraine qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geqslant N, \quad u_n - v_n > 0 \Leftrightarrow u_n > v_n$, ce qui est absurde. Par conséquent, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. ■

Remarque 9 (Z)
Lors du passage à la limite, une inégalité stricte devient, en général, une inégalité large. Pour s'en convaincre, on retiendra comme exemple typique suivant : $\forall n \geqslant 1, \quad \dfrac{1}{n} > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

4.2 Théorème d'encadrement

Théorème 2 (dit d'encadrement)
Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ $(w_n)_n$ trois suites réelles telles que

- *Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.*
- *Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent dans $\mathbb{R}$ vers la même limite*

Alors (v_n) est convergente dans $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Preuve :
Notons L la limite commune à $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$. Par définition, on a

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon' &> 0, \quad \exists N_1(\varepsilon') \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_1(\varepsilon'), \quad |u_n - L| \leqslant \varepsilon' \Leftrightarrow -\varepsilon' \leqslant u_n - L \leqslant \varepsilon' \Leftrightarrow L - \varepsilon' \leqslant u_n \leqslant L + \varepsilon' \\
\forall \varepsilon'' &> 0, \quad \exists N_1(\varepsilon'') \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_2(\varepsilon''), \quad |w_n - L| \leqslant \varepsilon'' \Leftrightarrow -\varepsilon'' \leqslant w_n - L \leqslant \varepsilon'' \Leftrightarrow L - \varepsilon'' \leqslant w_n \leqslant L + \varepsilon''
\end{aligned}$$

En choisissant $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon$ et en posant $N(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N)$, on a $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$,

$$\left.\begin{array}{c} u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ L - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant L + \varepsilon \\ L - \varepsilon \leqslant w_n \leqslant L + \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow L - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant L + \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon \leqslant w_n \leqslant L + \varepsilon \Leftrightarrow |w_n - L| \leqslant \varepsilon$$

Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad |v_n - L| \leqslant \varepsilon$, ce qui démontre la convergence de $(v_n)_n$ vers L. ■

Remarque 10 (Z)
Si l'on enlève l'hypothèse de la limite commune à $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$, on ne peut plus conclure sur la convergence de la suite $(v_n)_n$. Le lecteur méditera l'exemple élémentaire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, les suites $(-1)_n$ et $(1)_n$ sont convergentes mais la suite $(-1)^n$ ne converge pas.

Exemple 8
Montrons que la suite $\left(\dfrac{\mathrm{E}(nx)}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et explicitons sa limite.

Solution 8
Par définition de la partie entière, on a, pour tout $n \geqslant 1$

$$\mathrm{E}(nx) \leqslant nx < \mathrm{E}(nx) + 1 \Rightarrow \frac{\mathrm{E}(nx)}{n} \leqslant x < \frac{\mathrm{E}(nx)}{n} + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{E}(nx)}{n} \leqslant x \\ x < \dfrac{\mathrm{E}(nx)}{n} + \dfrac{1}{n} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{E}(nx)}{n} \leqslant x \\ x - \dfrac{1}{n} < \dfrac{\mathrm{E}(nx)}{n} \end{array}\right. \Leftrightarrow x - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\mathrm{E}(nx)}{n} \leqslant x$$

Les suites $(x)_n$ et $\left(x - \dfrac{1}{n}\right)_n$ convergent vers la même limite x donc la suite $\left(\dfrac{\mathrm{E}(nx)}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers x.

Théorème 3 (dit d'encadrement généralisé)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'il existe un entier N pour lequel $\forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant v_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Preuve :

- $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: On a $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(A), \quad u_n \geqslant A$. En posant $N_1(A) = \max(N(A), N)$, on a $\forall n \geqslant N_1(A), \quad A \leqslant u_n \leqslant v_n$. Par conséquent, on a montré que $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_1(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_1(A), \quad v_n \geqslant A$, ce qui montre que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$: Alors $\lim_{n\to+\infty}(-v_n) = +\infty$ et l'on a $\forall n \geqslant N, \quad -v_n \leqslant -u_n$, ce qui entraine que $\lim_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

■

Exemple 9
Montrons que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+3n+1}{n+1} = +\infty$.

Solution 9
$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{n^2+3n+1}{n+1} \geqslant \frac{n^2+2n+1}{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n+1} = n+1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+1}{n+1} = +\infty.$$

Méthode 7 (pour encadrer certaines suites)

- ***Encadrement « naif »*** *: Soit $(u_n)_n$ une suite de la forme $u_n = a_0 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ où $(a_n)_n$ désigne une suite de réels.*
On encadre chaque a_k par le minimum m_n de $a_0, .., a_n$ et par son maximum M_n puis on somme les encadrements

- ***Encadrement « série-intégrale »*** *: Soit $(u_n)_n$ une suite de la forme $u_n = f(0) + \cdots + f(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)$ où f est une certaine fonction définie et monotone sur $\mathbb{R}_+$.*
Grâce à la monotonie de f, on encadre $f(t)$ sur l'intervalle $[k, k+1]$ par $f(k)$ et $f(k+1)$ puis on intègre cet encadrement sur $[k, k+1]$, on somme ces encadrements et on utilise la relation de Chasles $\int_0^1 f + \int_1^2 f + \cdots + \int_n^{n+1} f = \int_0^{n+1} f$. Si l'on sait connait calculer les intégrales $\int_0^n f$, on en déduit un encadrement explicite de u_n.

- ***Encadrement d'un produit*** *: Soit $(u_n)_n$ une suite de la forme $u_n = a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$ avec chaque a_k strictement positif, on remarque que $\ln u_n = \ln a_0 + \cdots + \ln a_n$ et on se ramène à l'un des deux cas précédents.*

Exemple 10
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ avec $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \dfrac{\sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n}}{n^2}$

Solution 10
On a, pour $n \geqslant 1$,

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \sqrt{1} \leqslant \sqrt{k} \leqslant \sqrt{n} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant \sqrt{1} \leqslant \sqrt{n} \\ 1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant \sqrt{n} \\ \quad\vdots \\ 1 \leqslant \sqrt{n} \leqslant \sqrt{n} \end{array}\right. \Rightarrow \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} \leqslant \sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n} \leqslant \underbrace{\sqrt{n} + \cdots + \sqrt{n}}_{n \text{ fois}}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \times 1 \leqslant \sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n} \leqslant n\sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leqslant \frac{u_n}{n^2} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Exemple 11
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ où $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} =$

Solution 11
Essayons un encadrement « naïf ». Il est immédiat que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{n} \leqslant 1 \leqslant 1 \\ \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1 \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n \text{ fois}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ fois}} \Leftrightarrow n \times \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant n \times 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant u_n \leqslant n$$

ce qui nous permet pas de conclure par le théorème d'encadrement. On remarque alors que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ avec $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ qui est décroissante sur $[1,+\infty[$. On procède alors par comparaison « série-intégrale »

$$\forall k \geqslant 1, \quad \forall t \in [k,k+1], \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k} \Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \Leftrightarrow \frac{1}{k}\int_k^{k+1} dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k+1}\int_k^{k+1} dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{k} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant \displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\int_2^3 \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{3} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{n} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n+1} \end{cases} \Rightarrow 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \leqslant \int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} + \cdots \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_1^{n+1} \leqslant u_{n+1}-1 \Leftrightarrow u_n \leqslant \ln(n+1) \leqslant u_{n+1}-1 \Leftrightarrow \forall n \geqslant 1, \quad \begin{cases} u_n \leqslant \ln(n+1) \\ u_{n+1}-1 \geqslant \ln(n+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall n \geqslant 1, \quad u_n \leqslant \ln(n+1) \\ \forall p \geqslant 2, \quad u_p \geqslant 1+\ln p \quad \quad p=n+1 \end{cases} \Rightarrow \forall n \geqslant 2, \quad 1+\ln(n) \leqslant u_n \leqslant \ln(n+1)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\ln(n)) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Solution 12
Pour $n \geqslant 1$, on a :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^{n+1} = \ln(n+1)$$

Comme la suite $(\ln(n+1))_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$, il en est de même de (u_n).

4.3 Monotonie et convergence

Théorème 4 (convergence monotone)
Soit (u_n) une suite réelle.

1. *Si $(u_n)_n$ est croissante et majorée, alors $(u_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}$.*
2. *Si $(u_n)_n$ est croissante et non majorée, alors $(u_n)_n$ converge vers $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.*
3. *Si $(u_n)_n$ est décroissante et minorée, alors $(u_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}$.*
4. *Si $(u_n)_n$ est décroissante et non minorée, alors $(u_n)_n$ converge vers $-\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Preuve :

1. Puisque la suite $(u_n)_n$ est majorée par une certaine constante M, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M$ donc l'ensemble $A = \{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide (il contient u_0 !) et majorée de $\mathbb{R}$ donc il possède une borne supérieure $\sup(A)$. D'après la caractérisation par les ε, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $u_{N(\varepsilon)}$ de A tel que $\sup(A) - \varepsilon \leqslant u_{N(\varepsilon)}$. D'après la croissance de la suite $(u_n)_n$ et puisque $\sup(A)$ est un majorant de $(u_n)_n$, on a
$$\forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad \sup(A) - \varepsilon \leqslant u_{N(\varepsilon)} \leqslant u_n \leqslant \sup(A) \leqslant \sup(A) + \varepsilon \Rightarrow |u_n - \sup(A)| \leqslant \varepsilon.$$
Par conséquent, on a montré que $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad |u_n - \sup(A)| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\sup(A)$.
2. Puisque $(u_n)_n$ n'est pas majorée, aucun réel A n'est un majorant de $(u_n)_n$. Par conséquent, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un élément $u_{N(A)}$ de la suite $(u_n)_n$ tel que $u_{N(A)} \geqslant A$. D'après la croissance de la suite $(u_n)_n$, on a $\forall n \geqslant N(A), \quad u_n \geqslant u_{N(A)} \geqslant A$. Par conséquent, on a montré que $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(A), \quad u_n \geqslant A$, c'est-à-dire que la suite $(u_n)_n$ converge vers $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$
3. Puisque $(u_n)_n$ est décroissante et minorée donc $(-u_n)_n$ est croissante et majorée ce qui entraine sa convergence, d'où la convergence de la suite $(u_n)_n$.
4. Puisque $(u_n)_n$ est décroissante et non minorée donc $(-u_n)_n$ est croissante et non majorée ce qui entraine sa convergence vers $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, d'où la convergence de la suite $(u_n)_n$ vers $-\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

■

Remarque 11
Ce théorème montre en particulier que toute suite réelle monotone est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple 12
Montrer que la suite $(u_n)_n$ définie par $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \times 2^k}$ est convergente.

Solution 13
Il est immédiat que $\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \geqslant 0$ donc la suite $(u_n)_n$ est croissante. Pour montrer sa convergence, il suffit de montrer qu'elle est majorée. Les techniques standards (encadrement « bourrin », « naïf », « série-intégrale » ne donnant rien, on remarque que
$$\forall k \quad \geqslant \quad 1, \quad \frac{1}{k \times 2^k} \leqslant \frac{1}{2^k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \times 2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \Leftrightarrow u_n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad u_n \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 1$$
Par conséquent, la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée par 1 donc elle converge et $\lim_{n \to +\infty} u_n \leqslant 1$.

Définition 10 (Suites adjacentes)
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes si et seulement (l'une est croissante, l'autre décroissante et la différence des deux, i.e. $(u_n - v_n)_n$, tend vers 0).

Remarque 12
Pour montrer que $u_n - v_n$ tend vers 0, on évitera en général de rechercher «la limite » de chacune de ces suites puisqu'on ne sait pas qu'elles sont convergentes ! En outre, même si elles sont convergentes, on ne sait pas en général calculer leurs limites ! En général, mais cela n'est pas systèmatique, on essaiera de simplifier la différence $u_n - v_n$ et d'obtenir directement sa convergence vers 0.

Lemme 9
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites adjacentes avec $(u_n)_n$ croissante et $(v_n)_n$ décroissante. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$.

Preuve :
On procède par l'absurde en supposant qu'il existe un entier N tel que $u_N > v_N \Leftrightarrow u_N - v_N > 0$.
Remarque heuristique : *Si l'on considère la droite réelle, étant donné que chaque terme u_n, avec $n \geqslant N$, se trouve après u_N et que chaque terme v_n, avec $n \geqslant N$, se trouve avant v_N, on constate que la distance entre u_n et v_n, i.e. $u_n - v_n$ est strictement positive à partir du rang N et va croître, ce qui est gênant puisque cette distance tend justement vers 0.*
On introduit la suite $(d_n)_n = (u_n - v_n)_n$ qui croissante (comme somme des suites croissantes $(u_n)_n$ et $(-v_n)_n$) donc $\forall n \geqslant N, \quad d_n \geqslant d_N$. Puisque $\lim_{n \to +\infty} d_n = \lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$, en passant à la limite, on obtient $0 \geqslant d_N$, ce qui est absurde car $d_N > 0$. Par conséquent, $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \leqslant v_n$. ■

Théorème 5 (Suites adjacentes)
Deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) convergent et admettent la même limite L. En outre,

- *si $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ est décroissante, alors* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant L \leqslant v_n$.
- *si $(u_n)_n$ est décroissante et $(v_n)_n$ est croissante, alors* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leqslant L \leqslant u_n$

Preuve :
On peut supposer que $(u_n)_n$ est la suite croissant et $(v_n)_n$ la suite décroissante (sinon, on échange leurs noms !). D'après le lemme précédent et la monotonie de chacune de ces suites, on a $\forall n \geqslant 0, \quad \underbrace{u_0 \leqslant u_n}_{\text{croissance}} \overbrace{\leqslant}^{\text{lemme}} \underbrace{v_n \leqslant v_0}_{\text{décroissance}}$. Par conséquent, la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée par v_0 donc elle converge et la suite $(v_n)_n$ est décroissante et minorée par u_0 donc elle converge. Si l'on note L et L' leurs limites respectives, on a

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0 \Leftrightarrow L - L' = 0 \Leftrightarrow L = L'$$

donc elle converge bien vers la même limite L. Etant donné que $(u_n)_n$ est croissante, $(v_n)_n$ décroissante et qu'elles convergent toutes deux vers L, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant L \leqslant v_n$. ■

Théorème 6 (Segments emboîtés)
Soit $([a_n, b_n])_n$ une suite décroissante de segments $\mathbb{R}$ dont la longueur $b_n - a_n$ tend vers 0.?
Alors l'intersection de tous ces segments est non vide et se réduit à un unique réel L, i.e. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{L\}$. En outre, ce réel est la limite commune des suites (a_n) et (b_n).

Preuve :
Par définition, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant b_n$ (définition d'un segment !) et puisque $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} \in [a_n, b_n] \\ b_{n+1} \in [a_n, b_n] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_n \\ a_n \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n \leqslant a_{n+1} \\ b_{n+1} \leqslant b_n \end{array}\right.$$

Ainsi, la suite $(a_n)_n$ est croissante, la suite $(b_n)_n$ est décroissante et leur différence $a_n - b_n$ tend vers 0 (hypothèse de l'énoncé) donc ces deux suites sont adjacentes, ce qui entraine leur convergence vers une même limite L. Par construction,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant L \leqslant b_n \Leftrightarrow L \in [a_n, b_n] \Rightarrow L \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$$

Pour l'inclusion réciproque, soit $c \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad c \in [a_n, b_n] \Leftrightarrow a_n \leqslant c \leqslant b_n$. Puisque les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers la même limite L, en passant à la limite, on obtient $L \leqslant c \leqslant L$ donc $L = c$, ce qui montre l'inclusion réciproque et prouver l'égalité ensembliste attendue. ■

Exemple 13
Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par : $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times (n!)}$ sont adjacentes.

Solution 14
Il est immédiat que $v_n - u_n = \frac{1}{n \times (n!)}$ tend vers 0. Déterminons la monotonie de chacune de ces suites.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{(n+1) \times [(n+1)!]} \geqslant 0. \\
v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1) \times [(n+1)!]}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n \times (n!)}\right) = (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1) \times [(n+1)!]} - \frac{1}{n \times (n!)} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times [(n+1)!]} - \frac{1}{n \times (n!)} = \frac{1}{(n+1) \times (n!)} + \frac{1}{(n+1)^2 \times (n!)} - \frac{1}{n \times (n!)} \\
&= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{(n+1)^2 \times (n!)} = -\frac{1}{(n+1)^2 \times (n!)} \leqslant 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, ces deux suites sont bien adjacentes donc elles convergent vers la même limite.
Culture : *on démontrera que cette limite commune est le fameux nombre e*

Méthode 8 (Etablir la convergence d'une suite dans $\overline{\mathbb{R}}$)
Pour établir la convergence d'une suite $(u_n)_n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, on procède selon les méthodes suivantes, classées de la plus simple à la plus élaborée.

- *Utiliser les théorèmes d'addition, de produit, de quotient, etc. vérifiés par les suites convergentes en utilisant, si besoin est, des transformations algébriques (identités remarquables, quantité conjuguée, factorisation du terme dominant, utilisation des taux d'accroissement).*
- *Utiliser le théorème d'encadrement (y compris le généraliser) ou le théorème de convergence monotone ou le théorème sur les suites adjacentes.*
- *Intuiter la limite L de la suite $(u_n)_n$ puis majorer $|u_n - L|$ par une suite que l'on sait tendre vers 0.*
- *Intuiter la limite L de la suite $(u_n)_n$ puis recourir à la définition, via les ε, de la convergence de $(u_n)_n$ vers L.*

Méthode 9 (Etablir la divergence d'une suite)
Pour montrer qu'une suite (u_n) diverge, on peut :

- *rechercher deux suites extraites de (u_n) qui ne convergent pas vers la même limite;*
- *rechercher une suite extraite de (u_n) dont on connait la divergence.*
- *procéder par l'absurde en supposant que la suite $(u_n)_n$ converge vers une certaine limite L puis, à l'aide de différents encadrements ou relation vérifiées par cette suite, établir des encadrements ou des équations vérifiées par cette limite L jusqu'à obtenir une contradiction.*

5 Suites complexes

Etant donné que la valeur absolue (d'un réel) et que le module (d'un complexe) vérifie les mêmes propriétés algébriques, on peut transposer la définition de la convergence au cas des suites à valeurs complexes.

Définition 11 (Suite complexe convergente)
Une suite $(u_n)_n$ à valeurs complexes converge vers $z \in \mathbb{C}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0. \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}. \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon). \quad |u_n - z| \leqslant \varepsilon$$

Toutes les définitions et les résultats valables pour les suites réelles se transposent immédiatement aux suites complexes. Nous les donnons dans la suite, la preuve étant strictement identique au cas réel en remplaçant la valeur absolue par le module. Par contre, toutes les notions ou résultats faisant intervenir l'ordre n'auront aucun sens. C'est en particulier le cas pour : les suites minorées, majorées, monotones, les théorèmes d'encadrement ou de convergence monotones, les suites convergeant vers $\pm\infty$.

Définition 12 (Suites complexes bornées, stationnaires)
Une suite complexe $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

- *majorée si et seulement si il existe un réel positif M, indépendant de n, tel que quel $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |z_n| \leqslant M$;*
- *stationnaire si et seulement si il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$ on ait $z_n = z_N$.*
  On dit également que la suite z est constante à partir du rang N.

Lemme 10
Soit $(z_n)_n$ une suite complexe. On a l'équivalence

1. *La suite $(z_n)_n$ converge*
2. *Quel que soit $p \in \mathbb{N}$, la suite $(z_n)_{n\geqslant p}$ converge.*

Dans ce cas, les limites respectives sont égales.

Lemme 11 (Unicité de la limite)
Soit $(z_n)_n$ une suite complexe.
S'il existe deux complexes L et L' tels que la suite (z_n) converge vers L et L' alors $L = L'$.

Lemme 12
Soit $(z_n)_n$ une suite complexe convergeant vers $L \in \mathbb{C}$ alors la suite $(|z_n|)_n$ converge vers $|L|$.

Lemme 13
Soit $(z_n)_n$ une suite complexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. *La suite $(z_n)_n$ converge vers $L \in \mathbb{C}$.*
2. *La suite $(z_n - L)_n$ converge vers 0.*
3. *La suite $(|z_n - L|)_n$ converge vers 0.*
4. *Il existe une suite réelle et positive $(\alpha_n)_n$ convergeant vers 0 et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |z_n - L| \leqslant \alpha_n$.*

Exemple 14
Montrons que la suite $(z_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad z_n = \dfrac{(1+i)n+1+i}{2n+i}$ converge vers $\dfrac{1+i}{2}$.

Solution 15
Il suffit de montrer que la distance (dans $\mathbb{C}$) de z_n et $\dfrac{1+i}{2}$ tend vers 0.

$$\left| z_n - \frac{1+i}{2} \right| = \left| \frac{(1+i)n+1+i}{2n+i} - \frac{1+i}{2} \right| = \left| \frac{3+i}{2(2n+i)} \right| = \frac{|3+i|}{2\,|2n+i|} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{4n^2+1}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Définition 13 (Suite extraite)
Soit $(z_n)_n$ une suite complexe. Une suite (w_n) est dite extraite de (z_n) s'il existe une application $\phi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = z_{\phi(n)}$.

Proposition 17 (Limite d'une suite extraite)
Soit $(z_n)_n$ une suite complexe convergeant vers $L \in \mathbb{C}$. Alors toute suite extraite de $(z_n)_n$ converge également vers L.

Corollaire 4 (Condition suffisante de divergence)
Soit (z_n) une suite complexe.

- *S'il existe $\phi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite extraite $(z_{\phi(n)})$ diverge, alors (z_n) diverge.*
- *Soit (z_n) une suite réelle. S'il existe $\phi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ et $\psi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que les suites extraites $(z_{\phi(n)})$ et $(z_{\psi(n)})$ convergent vers deux limites différentes, alors la suite (u_n) ne converge pas.*

Exemple 15
Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, la suite $(z_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \exp\left(\dfrac{2\pi i n}{p}\right)$ diverge.

Solution 16
On remarque les suites extraites $(z_{pn}) = (1)_n$ et $(z_{1+pn})_n = \left(\exp\left(\dfrac{2\pi i}{p}\right)\right)_n$ sont constantes donc elles convergent mais elles n'ont pas la même limite, ce qui entraine que la suite $(z_n)_n$ est divergente.

Proposition 18 (Suites de rangs pair et impair)
Soit (z_n) une suite complexe.
(La suite $(z_n)_n$ converge) si et seulement (les suites $(z_{2n})_n$ et $(z_{2n+1})_n$ convergent et que leurs limites respectives sont égales).
Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} z_{2n+1}$.

Proposition 19 (Opération algébriques sur les suites complexes convergentes)
Soient $(z_n)_n$ et $(w)_n$ deux suites complexes convergeant respectivement vers L et L. Alors

- *Pour tous complexes α, β, la suite $(\alpha z_n + \beta w_n)_n$ converge vers $\alpha L + \beta L'$.*
- *La suite $(z_n w_n)_n$ converge vers LL'.*
- *Si $L' \neq 0$ alors les suites $\left(\dfrac{1}{w_n}\right)_n$ et $\left(\dfrac{z_n}{w_n}\right)_n$ sont bien définies à partir d'un certain rang et elles convergent respectivement vers $\dfrac{1}{L'}$ et $\dfrac{L}{L'}$.*

On peut néanmoins établir d'autres résultats de convergence dans le cas complexe en exploitant l'existence du conjugué, de l'écriture cartésienne et exponentielle d'un complexe.

Lemme 14
Soit $(z_n)_n$ une suite complexe convergeant vers $L \in \mathbb{C}$ alors la suite $(\overline{z_n})_n$ converge vers $\overline{L}$.

Preuve :
C'est immédiat en constatant que $\left|\overline{z_n} - \overline{L}\right| = \left|\overline{z_n - L}\right| = |z_n - L| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ ■

Théorème 7 (Caractérisation de la convergence par les écritures cartésiennes et exponentielles)
Soient $(z_n)_n$ une suite complexe et $L \in \mathbb{C}^\times$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- *$z_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ et $L = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$,*
- *$z_n = \rho_n \exp(i\theta_n)$ avec $\rho_n \in \mathbb{R}_+$ et $\theta_n \in \mathbb{R}$ et $L = \rho\exp(i\theta)$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.*

1. *La suite $(z_n)_n$ converge vers L*
2. *Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent respectivement vers a et b.*
3. *Les suites $(\rho_n)_n$, $(\cos(\theta_n))_n$, $(\sin(\theta_n))_n$ convergent respectivement vers ρ, $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$*
   Si $L = 0$, alors on a les équivalences suivantes
4. *La suite $(z_n)_n$ converge vers 0*
5. *Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers 0.*
6. *La suite $(\rho_n)_n$ converge vers 0.*

Preuve :
On procède par implications circulaires :Si $L \neq 0$.

- $(1) \Rightarrow (2)$: En utilisant le lemme précédent, on a

$$a_n = \mathrm{Re}(z_n) = \frac{z_n + \overline{z_n}}{2} \to \frac{L + \overline{L}}{2} = a \quad b_n = \mathrm{Im}(z_n) = \frac{z_n - \overline{z_n}}{2i} \to \frac{L - \overline{L}}{2i} = b$$

- $(2) \Rightarrow (3)$: On a

$$\rho_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} \to \sqrt{a^2 + b^2} = \rho \neq 0, \quad \cos(\theta_n) = \frac{a_n}{\rho_n} \to \frac{a}{\rho} = \cos(\theta), \quad \sin(\theta_n) = \frac{b_n}{\rho_n} \to \frac{b}{\rho} = \sin(\theta)$$

- $(3) \Rightarrow (1)$: On a

$$\begin{aligned} |z_n - L| &= |\rho_n \exp(i\theta_n) - \rho\exp(i\theta)| = |(\rho_n\cos(\theta_n) - \rho\cos(\theta)) + i(\rho_n\sin(\theta_n) - \rho\sin(\theta))| \\ &= \sqrt{(\rho_n\cos(\theta_n) - \rho\cos(\theta))^2 + (\rho_n\sin(\theta_n) - \rho\sin(\theta))^2} \underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{(\rho\cos(\theta) - \rho\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\theta) - \rho\sin(\theta))^2} = 0 \end{aligned}$$

Si $L = 0$, les implications $(4) \Rightarrow (5)$ et $(5) \Rightarrow (6)$ se prouvent comme précédemment. Quant à l'implication $(6) \Rightarrow (4)$, elle est immédiate puisque que $|z_n - 0| = |z_n| = \rho_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. ■

Remarque 13
Si $(\theta_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}$ vers θ alors $(\cos(\theta_n))_n$ et $(\sin(\theta_n))_n$ convergent vers $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. Par conséquent, on essaiera en premier lieu d'établir directement la convergence de $(\theta_n)_n$ dans $\mathbb{R}$. Si cela n'est pas possible, on établira la convergence de chacune des suites $(\cos(\theta_n))_n$, $(\sin(\theta_n))_n$.

Exemple 16
Montrons que la suite $(z_n)_n = \left(\dfrac{(1+i)n+1}{n+i}\right)_n$ converge et déterminons sa limite.

Solution 17
On a

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{((1+i)n+1)(n-i)}{(n+i)(n-i)} = \frac{(1+i)\,n^2 + (2-i)\,n - i}{n^2+1} = \frac{n^2+2n}{n^2+1} + i\frac{n^2-n-1}{n^2+1} \\ \frac{n^2+2n}{n^2+1} &= \frac{n^2}{n^2} \times \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \quad \frac{n^2-n-1}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2} \times \frac{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \end{aligned}$$

donc $z_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1 + i \times 1 = 1 + i$.

Exemple 17
Montrons la convergence de la suite $\left(\exp\left(i\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right)\right)_n$

Solution 18
En utilisant la quantité conjugué, on a

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+n}=\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}\underset{\to+\infty}{\to}\frac{1}{2}$$

donc $z_n\to\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)=i$.

Méthode 10 (Etudier la convergence d'une suite complexe)
1. *Pour montrer qu'une suite $(z_n)_n$ converge vers $L\in\mathbb{C}$, il suffit*

- *soit d'intuiter la limite L puis de majorer la suite $(|z_n-L|)_n$ par une suite réelle positive $(\alpha_n)_n$ convergeant vers 0.*
- *soit de montrer que les suites $(\mathrm{Re}(z_n))_n$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_n$ convergent.*
  Dans ce cas, si a et b désignent leurs limites respectives, on a $\lim_{n\to+\infty} z_n=a+ib$.
- *soit d'écrire z_n sous forme exponentielle $z_n=\rho_n\exp(i\theta_n)$ avec $\rho_n\in\mathbb{R}_+$ et $\theta_n\in\mathbb{R}$ puis d'établir la convergence de $(\theta_n)_n$*
  - *ensuite la convergence de la suite $(\theta_n)_n$ dans $\mathbb{R}$.*
    Si c'est le cas, si ρ et θ désignent leurs limites respectives de $(\rho_n)_n$ et (θ_n), on a $\lim_{n\to+\infty} z_n=\rho\exp(i\theta)$.
  - *si la suite $(\theta_n)_n$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$, on étudie la convergence des deux suites $(\cos(\theta_n))_n$ et $(\sin(\theta_n))_n$.*
    Dans ce cas, si ρ, a et b désignent les limites respectives de $(\rho_n)_n$, $(\cos(\theta_n))_n$ et $(\sin(\theta_n))_n$, on a $\lim_{n\to+\infty} z_n=\rho(a+ib)$.

6 Comparaison des suites.

Nous avons maintenant quelques outils pour étudier la convergence des suites, la section présente a pour d'élaborer les outils qui nous permettrons d'obtenir des estimations de la vitesse de convergence des suites (lentement, rapidement, très rapidement, etc.) ainsi qu'une approximation de la différence entre u_n et sa limite.
Par exemple, les deux suites $u_n=1+\frac{1}{n}$ et $v_n=1+\frac{1}{n^{10}}+\frac{1}{n^{30}}$ convergent toutes deux vers 1 mais $u_n-1=\frac{1}{n}$ tend plus lentement vers 0 que $v_n-1=\frac{1}{n^{10}}+\frac{1}{n^{30}}$. En outre, lorsque n est très grand, $\frac{1}{n^{10}}$ est beaucoup plus grand que $\frac{1}{n^{30}}$ donc on peut dire que l'ordre de grandeur de v_n-1 est de $\frac{1}{n^{10}}$ lorsque n est très grand.

6.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 14 (Domination, négligeabilité, équivalent)
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles.

- *On dit que (u_n) est dominée par $(v_n)_n$, s'il existe une suite bornée $(\alpha_n)_n$ telle que $u_n=\alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang.*
  Dans ce cas, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et l'on prononce « u_n est un grand O de v_n »
- *On dit que (u_n) est négligeable devant $(v_n)_n$, s'il existe une suite $(\alpha_n)_n$ tendant vers 0 telle que $u_n=\alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang.*
  Dans ce cas, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et l'on prononce « u_n est un petit o de v_n »
- *On dit que (u_n) est équivalente à $(v_n)_n$, s'il existe une suite $(\alpha_n)_n$ tendant vers 1 telle que $u_n=\alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang.*
  Dans ce cas, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et l'on prononce « u_n est équivalent à v_n »

Proposition 20 (Caractérisation)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $v_n\neq 0$ à partir d'un certain rang N (donc la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bien définie pour $n\geqslant N$). Alors

1. *$u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ si et seulement si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bornée.*

2. *$u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ si et seulement si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ tend vers 0*

3. *$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ tend vers 1*

Preuve :
Il existe un rang N' à partir duquel $u_n = \alpha_n v_n$. En remarquant que $\forall n \geqslant \max(N, N')$, on a $\dfrac{u_n}{v_n} = \alpha_n$, les résultats attendus s'obtiennent immédiatement. ■

Définition 15
Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ trois suites réelles. On définit les notations $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + O(w_n)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(w_n)$ par

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + O(w_n) \Leftrightarrow (u_n - v_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n), \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(w_n) \Leftrightarrow (u_n - v_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$$

6.2 Opérations sur les O, o, $\sim$

Proposition 21 (Opérations sur les O)
Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ et $(w'_n)_n$ des suites réelles et λ, μ deux réels (indépendants de n).

- *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$;*
- *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$, alors $\alpha u_n + \beta v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$;*
- *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w'_n)$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n w'_n)$.*
- *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{w_n}{v_n}\right)$.*

Preuve :

- Il existe deux suites bornées $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ et deux entiers N, N' tels que $\forall n \geqslant N \quad u_n = \alpha_n v_n$ et $\forall n \geqslant N', \quad v_n = \beta_n w_n$ donc $\forall n \geqslant \max(N, N'), \quad u_n = \alpha_n \beta_n w_n$ et $(\alpha_n \beta_n)_n$ est une suite bornée.
- Il existe deux suites bornées $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ et deux entiers N, N' tels que $\forall n \geqslant N \quad u_n = \alpha_n v_n$ et $\forall n \geqslant N', \quad v_n = \beta_n w_n$ donc $\forall n \geqslant \max(N, N'), \quad \lambda u_n + \mu v_n = (\lambda \alpha_n + \mu \beta_n) w_n$ et $(\lambda \alpha_n + \mu \beta_n)_n$ est une suite bornée.
- Il existe deux suites bornées $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ et deux entiers N, N' tels que $\forall n \geqslant N \quad u_n = \alpha_n w_n$ et $\forall n \geqslant N', \quad v_n = \beta_n w'_n$ donc $\forall n \geqslant \max(N, N'), \quad u_n v_n = \alpha_n \beta_n w_n w'_n$ et $(\alpha_n \beta_n)_n$ est une suite bornée.
- Il existe une suite bornée $(\alpha_n)_n$ et un entier N' tels que $\forall n \geqslant N' \quad u_n = \alpha_n v_n$ donc $\forall n \geqslant \max(N, N'), \quad \dfrac{u_n}{v_n} = \alpha_n \dfrac{w_n}{v_n}$ et $(\alpha_n)_n$ est une suite bornée.

■

Proposition 22 (Opérations sur les o)
Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ et $(w'_n)_n$ des suites réelles et λ, μ deux réels (indépendants de n).

- *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$;*
- *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$, alors $\alpha u_n + \beta v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$;*
- *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w'_n)$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n w'_n)$.*
- *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{w_n}{v_n}\right)$.*

Preuve :
Il existe deux suites $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ tendant vers 0 et deux entiers N, N' tels que $\forall n \geqslant N \quad u_n = \alpha_n v_n$ et $\forall n \geqslant N', \quad v_n = \beta_n w_n$ donc $\forall n \geqslant \max(N, N'), \quad u_n = \alpha_n \beta_n w_n$ et $(\alpha_n \beta_n)_n$ est une suite tendant vers 0.

- Il existe deux suites $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ tendant vers 0 et deux entiers N, N' tels que $\forall n \geqslant N \quad u_n = \alpha_n v_n$ et $\forall n \geqslant N', \quad v_n = \beta_n w_n$ donc $\forall n \geqslant \max(N, N'), \quad \lambda u_n + \mu v_n = (\lambda \alpha_n + \mu \beta_n) w_n$ et $(\lambda \alpha_n + \mu \beta_n)_n$ est une suite tendant vers 0.
- Il existe deux suites $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ tendant vers 0 et deux entiers N, N' tels que $\forall n \geqslant N \quad u_n = \alpha_n w_n$ et $\forall n \geqslant N', \quad v_n = \beta_n w'_n$ donc $\forall n \geqslant \max(N, N'), \quad u_n v_n = \alpha_n \beta_n w_n w'_n$ et $(\alpha_n \beta_n)_n$ est une suite tendant vers 0.
- Il existe une suite $(\alpha_n)_n$ tendant vers 0 et un entier N' tels que $\forall n \geqslant N' \quad u_n = \alpha_n v_n$ donc $\forall n \geqslant \max(N, N'), \quad \dfrac{u_n}{v_n} = \alpha_n \dfrac{w_n}{v_n}$ et $(\alpha_n)_n$ est une suite tendant vers 0.

■

Proposition 23 (Opérations sur les $\sim$)
Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ et $(w'_n)_n$ des suites réelles.

- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
- *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$, *alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$;
- *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w'_n$, *alors* $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n w'_n$.
- *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w'_n$ *avec* $w'_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang,* $v_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang et l'on a* $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{w_n}{w'_n}$..
- *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *alors* $\forall a \in \mathbb{R}$, *on a* $(u_n)^a \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)^a$

Preuve :

- Il existe une suite $(\alpha_n)_n$ tendant vers 1 et un entier N tels que $\forall n \geqslant N, \quad u_n = \alpha_n v_n$. Puisque $(\alpha_n)_n$ tend vers 1, il existe un rang N' tel que $\forall n \geqslant N' \quad \alpha_n > 0$ donc $\forall n \geqslant \max(N, N'), \quad v_n = \dfrac{1}{\alpha_n} \times u_n$ et la suite $\left(\dfrac{1}{\alpha_n}\right)_n$ tend vers 1.
- Il existe deux suites $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ tendant vers 1 et deux entiers N, N' tels que $\forall n \geqslant N, \quad u_n = \alpha_n v_n$ et $\forall n \geqslant N', \quad v_n = \beta_n w_n$ donc $\forall n \geqslant \max(N, N'), \quad u_n = \alpha_n \beta_n w_n$ et $(\alpha_n \beta_n)_n$ est une suite tendant vers 1
- Il existe deux suites $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ tendant vers 1 et deux entiers N, N' tels que $\forall n \geqslant N, \quad u_n = \alpha_n w_n$ et $\forall n \geqslant N', \quad v_n = \beta_n w'_n$ donc $\forall n \geqslant \max(N, N'), \quad u_n v_n = \alpha_n \beta_n w_n w'_n$ et $(\alpha_n \beta_n)_n$ est une suite tendant vers 1.
- Il existe deux suites $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ tendant vers 1 et deux entiers N, N' tels que $\forall n \geqslant N, \quad u_n = \alpha_n w_n$ et $\forall n \geqslant N', \quad v_n = \beta_n w'_n$. Puisque $(\beta_n)_n$ tend vers 1, il existe un certain rang N_1 tel que $\forall n \geqslant N_1, \quad \beta_n > 0$ et il existe un certain rang N_2 tel que $\forall n \geqslant N'$, $w'_n \neq 0$ donc pour $n \geqslant N_3 = \max(N_1, N_2)$, on a $v_n = \beta_n w'_n \neq 0$. Ce qui nous donne $\forall n \geqslant \max(N, N', N_3), \quad \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} \dfrac{w_n}{w'_n}$ et $\left(\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right)_n$ est une suite tendant vers 1.
- Il existe une suite $(\alpha_n)_n$ tendant vers 1 et un entier N tels que $\forall n \geqslant N, \quad u_n = \alpha_n v_n$. Puisque $(\alpha_n)_n$ tend vers 1, il existe un rang N' tel que $\forall n \geqslant N' \quad \alpha_n > 0$ donc $\forall n \geqslant \max(N, N'), \quad (u_n)^a = (\alpha_n)^a (v_n)^a$ et la suite $((\alpha_n)^a)_n$ tend vers 1.

■

La définition que nous avons donné des notations $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + O(w_n)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(w_n)$ combinés aux résultats précédents montre immédiatement que ces notations vérifient des propriétés semblables à l'égalité traditionnelle, du moment que la suite dans le O et le o sont les mêmes. Les preuves sont laissées au lecteur.

Proposition 24 (Opérations sur les égalités $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + O(w_n)$)
Soient $(u_n)_n$, $(u'_n)_n$, $(v_n)_n$, $(v'_n)_n$ et (w_n) et λ, μ deux réels (indépendants de n).

- *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + O(w_n)$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{=} v'_n + O(w_n)$ *alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v'_n + O(w_n)$
- *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + O(w_n)$ *et* $u'_n \underset{n\to+\infty}{=} v'_n + O(w_n)$ *alors* $\alpha u_n + \beta u'_n \underset{n\to+\infty}{=} \alpha v_n + \beta v'_n + O(w_n)$.
- *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + O(w_n)$ *alors* $u_n w'_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n w'_n + O(w_n w'_n)$.

- *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + O(w_n)$ *et si* $w'_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang alors* $\dfrac{u_n}{w'_n} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{v_n}{w'_n} + O(\dfrac{w_n}{w'_n})$
- *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(w_n)$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{=} v'_n + o(w_n)$ *alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v'_n + o(w_n)$

Proposition 25 (Opérations sur les égalités $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(w_n)$)
Soient $(u_n)_n$, $(u'_n)_n$, $(v_n)_n$, $(v'_n)_n$ *et* (w_n) *et* λ, μ *deux réels (indépendants de* n*).*

- *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(w_n)$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{=} v'_n + o(w_n)$ *alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v'_n + o(w_n)$
- *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(w_n)$ *et* $u'_n \underset{n\to+\infty}{=} v'_n + o(w_n)$ *alors* $\alpha u_n + \beta u'_n \underset{n\to+\infty}{=} \alpha v_n + \beta v'_n + o(w_n)$.
- *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(w_n)$ *alors* $u_n w'_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n w'_n + o(w_n w'_n)$.
- *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(w_n)$ *et si* $w'_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang alors* $\dfrac{u_n}{w'_n} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{v_n}{w'_n} + o(\dfrac{w_n}{w'_n})$

Remarque 14 (Z)

1. Les relations

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n), \quad u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n), \quad u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + O(w_n), \quad u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(w_n)$$

   « ne passe pas à l'exponentielle, ni au logarithme, ni à une fonction f quelconque », autrement dit, on n'a jamais (ou quasiment)

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(f(w_n)), \quad f(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(f(w_n)), \quad f(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} f(v_n) + O(f(w_n)), \quad f(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} f(v_n) + o(f(w_n))$$

2. On ne peut additionner ou soustraire les équivalents, i.e. $(u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n) \not\Rightarrow (u_n \pm u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \pm v'_n)$.
3. Si f est une fonction, on peut avoir $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ sans pour autant avoir $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(v_n)$.
   En particulier, on n'a pas nécessairement $\exp(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(v_n)$ ou $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$

Exemple 18
On a $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ (puisque $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$) mais

- $1 = (n+1) - n \underset{n\to+\infty}{\not\sim} n - n = 0$.
- $\exp(n+1) \underset{n\to+\infty}{\not\sim} \exp(n)$ car $\dfrac{\exp(n+1)}{\exp(n)} = e \underset{n\to+\infty}{\not\to} 1$

Lemme 15
Soient $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites réelles telles que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
Alors $\exp(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(v_n)$ *si et seulement* $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

Preuve :
Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(u_n)$ et $\exp(v_n)$ sont non nuls, on a

$$\exp(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(v_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\exp(u_n)}{\exp(v_n)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \exp(u_n - v_n) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0.$$

■

Proposition 26 (Lien entre l'équivalence et la négligeabilité)
Soient (u_n) *et* (v_n) *des suites réelles. Alors* $(u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n))$

Preuve :
$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang avec $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \Leftrightarrow$ (en posant $\beta_n = \alpha_n - 1$) $u_n = (1+\beta_n)v_n = v_n + \beta_n v_n$ avec $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$. ■

6.3 Comparaisons usuelles

Nous allons donner la définition de la limite d'une fonction en $+\infty$ qui est l'analogue de la définition de la limite d'une suite.

Définition 16 (limite d'une fonction en $+\infty$)
Soit $f :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$.

- *On dit que $f(x)$ tend vers $L \in \mathbb{R}$ quand $x \to +\infty$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha(\varepsilon) \in]a,+\infty[, \quad \forall x \geqslant \alpha(\varepsilon), \quad |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$$

  Dans ce cas L s'appelle la limite de f en $+\infty$ et l'on note $L = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ou encore $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} L$.

- *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$ si et seulement si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha(A) \geqslant a, \quad \forall x \geqslant \alpha(A), \quad f(x) \geqslant A.$$

  On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou encore $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +.\infty$.

Lemme 16
Soient $f :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $]a,+\infty[$.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} L$ alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} L$.

Preuve :
Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]a,+\infty[$, la suite $(f(u_n))_n$ est bien définie

- $L \in \mathbb{R}$: . On a

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &> 0, \quad \exists \alpha(\varepsilon) \in]a,+\infty[, \quad \forall x \geqslant \alpha(\varepsilon), \quad |f(x) - L| \leqslant \varepsilon \\ \forall A &\in \mathbb{R}, \quad \exists N(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(A), \quad u_n \geqslant A \end{aligned}$$

  Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons $A = \alpha(\varepsilon)$, il existe donc $N(\alpha(\varepsilon)) = N'(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N'(\varepsilon), \quad u_n \geqslant \alpha(\varepsilon)$ donc $|f(u_n) - L| \leqslant \varepsilon$.
  Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N'(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N'(\varepsilon), \quad |f(u_n) - L| \leqslant \varepsilon$, ce qui démontre que $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} L$.

- $L = +\infty$: On a

$$\begin{aligned} \forall A &\in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha(A) \in]a,+\infty[, \quad \forall x \geqslant \alpha(A), \quad f(x) \geqslant A \\ \forall A' &\in \mathbb{R}, \quad \exists N(A') \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(A'), \quad u_n \geqslant A' \end{aligned}$$

  Fixons $A \in \mathbb{R}$ et choisissons $A' = \alpha(A)$, il existe donc $N(\alpha(A)) = N'(A) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N'(A), \quad u_n \geqslant \alpha(A)$ donc $f(u_n) \geqslant A$.
  Par conséquent, $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N'(A) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N'(A), \quad f(u_n) \geqslant A$, ce qui démontre que $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

■

Proposition 27 (Comparaisons usuelles)

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \forall a \in]-1,1[, \quad a^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et $a^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{(\ln n)^\alpha}\right)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \forall a \quad / \quad |a| > 1, \quad n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(a^n)$ et $(\ln n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(a^n)$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\times, \quad (\ln n)^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\alpha)$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{(\ln n)^\beta}\right)$
- $\forall a \quad / \quad |a| > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^\times, \quad a^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!), \quad n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{=} o(n!), \quad (\ln n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$.

Preuve :
Pour les cinq premiers points, il suffit de combiner les deux lemmes précédents avec les croissances comparées

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} x^\beta e^{-\alpha x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^\beta e^{-\alpha x}$$

appliquées à la suite $(n)_n$ qui tend vers $+\infty$, on obtient la proposition suivanteet en remarquant que

$$a^n = \begin{cases} e^{n\ln a} = e^{n\ln|a|} \\ (-1)^n|a|^n = (-1)^n e^{n\ln(-a)} = (-1)^n e^{n\ln|a|} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \ln a < 0.$$

Pour le dernier point, il suffit de montrer la première égalité. En effet, en combinant $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(a^n)$, $(\ln n)^\alpha = o(a^n)$ avec $a^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$, on obtient $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$ et $(\ln n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$.

Il faut donc montrer que la suite $(u_n)_n = \left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_n$. On remarque que pour $n \geqslant 2|a| \Leftrightarrow n \geqslant E(2a)+1 = N(a)$, on a $\dfrac{|a|}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}$, ce qui nous donne

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} = \underbrace{\frac{|a|}{1}\times\frac{|a|}{2}\times\cdots\times\frac{|a|}{N(a)-1}}_{=C(a)} \times \overbrace{\underbrace{\frac{|a|}{N(a)}}_{\leqslant 1/2}\times\cdots\times\underbrace{\frac{|a|}{n}}_{\leqslant 1/2}}^{n-N(a)\text{ facteurs}} \leqslant C(a)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N(a)} = \left[C(a)2^{N(a)}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Puisque $C(a)2^{N(a)}$ est indépendant de n et que la suite $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)_n$ tend vers 0, on en déduit que $\dfrac{a^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. ■

Définition 17 (limite d'une fonction en un point)
Soient $a, \eta, L \in \mathbb{R}$ et $f :]a-\eta, a+\eta[\to \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers L lorsque $x \to a$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha \in]0, \eta[, \quad |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-L| \leqslant \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x\to a}{\to} L$ ou bien $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Lemme 17
Soient $f :]a-\eta, a+\eta[\to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $]a-\eta, a+\eta[$.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} a$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\to} L$ alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} L$.

Preuve :
Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]a-\eta, a+\eta[$, la suite $(f(u_n))_n$ est bien définie.
On a

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &> 0, \quad \exists \alpha(\varepsilon) \in]0, \eta[, \quad |x-a| \leqslant \alpha(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-L| \leqslant \varepsilon. \\ \forall \varepsilon' &> 0, \quad \exists N(\varepsilon') \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon'), \quad |u_n - a| \leqslant \varepsilon' \end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons $\varepsilon' = \alpha(\varepsilon)$, il existe donc $N(\alpha(\varepsilon)) = N'(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N'(\varepsilon), \quad |u_n - a| \leqslant \alpha(\varepsilon)$ donc $|f(u_n) - L| \leqslant \varepsilon$.
Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N'(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N'(\varepsilon), \quad |f(u_n) - L| \leqslant \varepsilon$, ce qui démontre que $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} L$. ■

Proposition 28 (Dérivabilité et équivalents)
Soit $f :]a-\eta, a+\eta[\to \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_n$ une suite tendant vers a. Alors

- *Alors la suite $(f(u_n))_n$ est définie pour n assez et grand.*
- *Si f est dérivable en a alors $f(u_n) = f(a) + f'(a)(u_n - a) + o(u_n - a)$.*
  En particulier, si $f'(a) \neq 0$ alors $f(u_n) - f(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} f'(a)(u_n - a)$.

Preuve :

- Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} a$, il existe un rang N tel que $\forall n \geqslant N, \quad |u_n - a| \leqslant \eta \Leftrightarrow u_n \in]a-\eta, a+\eta[$ donc la suite $(f(u_n))_n$ existe à partir du rang N.
- Puisque f est dérivable en a, on a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ et comme $u_n \in]a-\eta, a+\eta[$ pour $n \geqslant N$ avec $(u_n)_{n\geqslant N}$ qui tend vers a, le lemme précédent nous assure que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{f(u_n)-f(a)}{u_n - a} &= f'(a) \Leftrightarrow \frac{f(u_n)-f(a)}{u_n-a} \underset{n\to+\infty}{=} f'(a) + o(1) \Leftrightarrow f(u_n) - f(a) \underset{n\to+\infty}{=} f'(a)(u_n - a) + o(u_n - a) \\ &\Leftrightarrow f(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} f(a) + f'(a)(u_n - a) + o(u_n - a) \end{aligned}$$

En outre, si $f'(a) \neq 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(u_n)-f(a)}{u_n-a} = f'(a) \Leftrightarrow \frac{f(u_n)-f(a)}{u_n-a} \underset{n\to+\infty}{\sim} f'(a) \Leftrightarrow f(u_n)-f(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} f'(a)(u_n-a)$$

■

Proposition 29 (Équivalents usuels)
Si (u_n) est une suite de limite nulle et ne s'annulant pas pour n assez grand, alors :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \quad \exp(u_n)-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \quad \sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \quad (1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$$

Preuve :
Il suffit d'appliquer la proposition précédente avec les fonctions

$$x \mapsto \ln(1+x), \quad x \mapsto \exp(x), \quad x \mapsto \sin(x), \quad x \mapsto (1+x)^\alpha, \quad x \mapsto \cos(x)$$

■

Exemple 19
Donnons un équivalent des suites suivantes

$$u_n = \arcsin\left(e^{-n}\right), \quad v_n = \ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad w_n = \frac{\arctan\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

Solution 19

- $\underline{u_n}$: On a $e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, arcsin est dérivable en 0 et sa dérivée vaut $\arcsin'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$ donc

$$\arcsin(e^{-n}) - \arcsin(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \times (e^{-n}-0) \Leftrightarrow \arcsin(e^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$$

- $\underline{v_n}$: On a $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc $\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

- $\underline{w_n}$: On a $\dfrac{\ln n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (par les croissances comparées), arctan est dérivable en 0 et sa dérivée vaut $\arctan'(0) = \dfrac{1}{1+0^2} = 1$ donc

$$\arctan\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) - \arctan(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \times \left(\frac{\ln n}{n^2} - 0\right) \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$$

D'autre part, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, ce qui nous donne

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\ln n}{n^{3/2}}$$

Proposition 30 (Développements limités usuels à l'ordre 1)
Si (u_n) est une suite de limite nulle et ne s'annulant pas pour n assez grand, alors :

$$\begin{array}{lll} \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{=} u_n + o(u_n) & \exp(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + u_n + o(u_n) & \sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} u_n + o(u_n) \\ (1+u_n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \alpha u_n + o(u_n) & \cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(u_n) & \end{array}$$

Preuve :
Il suffit d'appliquer la proposition précédente avec les fonctions

$$x \mapsto \ln(1+x), \quad x \mapsto \exp(x), \quad x \mapsto \sin(x), \quad x \mapsto (1+x)^\alpha, \quad x \mapsto \cos(x)$$

■

Exemple 20
Déterminer un équivalent des suites suivantes

$$u_n = n^2\left(\text{th}\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{2}{n}\right)\right), \quad v_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+n}, \quad w_n = \exp\left(\sqrt{n^2+1}\right) - e^n, \quad x_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right).$$

Solution 20

- $\underline{u_n}$: Comme on ne peut soustraire les équivalents, on procède par développement limité à l'ordre 1. Puique $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, $\frac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, que la fonction th est dérivable en 0 et que sa dérivée vaut $\text{th}'(0) = 1 - \text{th}^2(0) = 1$, on a

$$\begin{aligned}\text{th}\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sin\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\\ u_n &= n^2\left(\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = n^2\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -n + o(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\end{aligned}$$

- $\underline{v_n}$: Puisque $\sqrt{n^2+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n^2} = n$ et $\sqrt[3]{n^3+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{n^3} = n$, les deux termes composant u_n sont du même ordre de grandeur. On factorise alors le terme dominant dans chaque racine puis on utilise les développements « limités » à l'ordre 1, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+1} &= \sqrt{n^2}\times\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = n\times\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \underset{1/n\to0}{=} n\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\\ \sqrt[3]{n^3+n} &= \sqrt[3]{n^3}\times\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} = n\times\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/3} \underset{1/n\to0}{=} n\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\\ v_n &= \left(n + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(n + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n}\end{aligned}$$

- $\underline{w_n}$: Puisque $\pi\sqrt{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, on ne peut appliquer directement un équivalent. On factorise donc le terme dominant dans la racine puis on les développements « limités » à l'ordre 1 et enfin les règles de calcul sur les exponentielles

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+1} &= \sqrt{n^2}\times\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = n\times\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \underset{1/n^2\to0}{=} n\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\\ w_n &= \exp\left(n + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - e^n = \exp(n)\exp\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - e^n\\ &= e^n\left(\exp\left(\underbrace{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to0}\right) - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2n}\end{aligned}$$

- $\underline{x_n}$: Puisque $\pi\sqrt{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, on ne peut appliquer directement un équivalent. On factorise donc le terme dominant dans la racine puis on utilisera les développements « limités » à l'ordre 1

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+1} &= \sqrt{n^2}\times\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = n\times\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \underset{1/n^2\to0}{=} n\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\\ x_n &= \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n}\sin\left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}\cos\left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= (-1)^n\sin\left(\underbrace{\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to0}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n\left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n\pi}{2n}\end{aligned}$$

Méthode 11 (Obtention un équivalent d'une suite)
Pour obtenir un équivalent d'une suite $(u_n)_n$, on procède selon les étapes suivantes (du plus simple au plus compliqué).

1. *Si elle est de la forme $(a_n)^{b_n}$, on commence par l'écrire sous forme exponentielle $\exp(b_n\ln(a_n))$. On étudie alors la suite $(b_n\ln(a_n))_n$*

(a) *Si la suite* $(b_n \ln(a_n))_n$ *converge vers une limite* $L \in \mathbb{R}$ *alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} L \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(L)$.

(b) *Sinon, on utilise les développements limités à l'ordre* 1 *ainsi que les formules de calculs usuelles (puissances,* ln, exp, sin, *etc).*

2. *On regarde si la suite* $(u_n)_n$ *ne se ramène pas aux cas traités par les équivalents usuels, quitte à factoriser certains éléments dans l'expression de* u_n *(terme dominant dans une puissance, un logarithme, etc.) puis à utiliser les règles de calculs usuelles (puissances, logarithme, etc.).*

3. *Si elle s'exprime comme un produit (ou quotient), on recherche l'équivalent de chaque facteur et l'on se ramène au cas 2.*

4. *Si elle s'exprime comme une somme, on « élimine » tous les termes négligeables à l'aide de la notation* o. *Il ne reste alors qu'un ou plusieurs termes* f_j *d'un même ordre de grandeur simple* a_n. *Dans ce cas, on a* $\forall j, \quad f_j \underset{n\to+\infty}{\sim} K_j a_n \Leftrightarrow$

$$f_j \underset{n\to+\infty}{=} K_j a_n + o(a_n)$$ *(*K_j *étant une constante), ce qui permet d'écrire* $u_n = \left(\sum_j K_j\right) a_n + o(a_n)$.

(a) *Si* $\sum_j K_j \neq 0$ *alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\sum_j K_j\right) a_n$.

(b) *Si* $\sum_j K_j = 0$, *on transforme, algébriquement ou par les développements limités à l'ordre* 1, *chaque terme* f_j *puis on réinjecte les égalités obtenues dans l'expression de* u_n *et on simplifie la nouvelle expression. On se ramène alors au cas 2.*

6.4 Applications des comparaisons à l'étude des suites

Proposition 31 (Suites et O)
Soient $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites réelles.*

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(0) \Leftrightarrow u_n = 0$ *à partir d'un certain rang.*
2. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(1) \Leftrightarrow (u_n)_n$ *est bornée.*
3. *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ *et si* $(v_n)_n$ *est bornée, alors* $(u_n)_n$ *également.*
4. *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ *et si* $(v_n)_n$ *est converge vers* 0, *alors* $(u_n)_n$ *converge également vers* 0.

Preuve :

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(0) \Leftrightarrow$ il existe (α_n) bornée telle que, à partir d'un certain rang, $u_n = \alpha_n \times 0 \Leftrightarrow u_n = 0$ à partir d'un certain rang (pour la réciproque, prendre $(\alpha_n)_n = (1)_n$!)
2. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(1) \Leftrightarrow$ il existe (α_n) bornée telle que, à partir d'un certain rang, $u_n = \alpha_n \times 1 \Leftrightarrow u_n = \alpha_n$ à partir d'un certain rang $\Leftrightarrow (u_n)_n$ est bornée.
3. On a $u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang avec $(\alpha_n)_n$ bornée. Puisque la suite $(v_n)_n$ est bornée, la suite $(\alpha_n v_n)_n = (u_n)_n$ l'est aussi.
4. On a $u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang avec $(\alpha_n)_n$ bornée. Puisque v_n tend vers 0, la suite $(\alpha_n v_n)_n = (u_n)_n$ tend vers 0.

■

Proposition 32 (Suites et o)
Soient $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites réelles.*

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(0) \Leftrightarrow u_n = 0$ *à partir d'un certain rang.*
2. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1) \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

3. *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ *et si* $(v_n)_n$ *est bornée, alors* $(u_n)_n$ *converge vers* 0.

Preuve :

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(0) \Leftrightarrow$ il existe (α_n) tendant vers 0 telle que, à partir d'un certain rang, $u_n = \alpha_n \times 0 \Leftrightarrow u_n = 0$ à partir d'un certain rang (pour la réciproque, prendre $(\alpha_n)_n = (0)_n$!)
2. Puisque $1 \neq 0$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1) \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
3. On a $u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang avec $(\alpha_n)_n$ tendant vers 0. Puisque $(v_n)_n$ est bornée, la suite $(\alpha_n v_n)_n = (u_n)_n$ tend vers 0.

■

Proposition 33 (Suites et $\sim$)
Soient $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites réelles.*

1. *Soit* $L \in \mathbb{R}^\times$, *on a* $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} L \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} L$
2. *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, *alors*
   (a) *($(u_n)_n$ est bornée) si et seulement $(v_n)_n$ est bornée).*
   (b) *(La suite $(v_n)_n$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang) si et seulement si (la suite $(u_n)_n$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang).*
   (c) *(La suite $(v_n)_n$ est de signe constant à partir d'un certain rang) si et seulement (la suite $(u_n)_n$ est de signe constant à partir d'un certain rang).*
   Dans ce cas, elles ont le même signe à partir d'un certain rang.
   (d) *(La suite $(v_n)_n$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$) si et seulement si (la suite $(u_n)_n$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$).*
   Dans ce cas, elles ont la même limite.

Preuve :

1. Puisque $L \in \mathbb{R}^\times$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} L \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{L} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} L$.
2. (a) Si $(v_n)_n$ est bornée, on a $u_n = \alpha_n v_n$ pour n assez grand avec $(\alpha_n)_n$ tendant vers 1 (donc elle est bornée), ce qui entraine que la suite $(\alpha_n v_n)_n = (u_n)_n$ est aussi bornée.
   Si $(u_n)_n$ est bornée, en remarquant que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, on est ramené au cas précédent et la suite $(v_n)_n$ est bornée.
   (b) Il existe un entier N tel que $\forall n \geqslant N, \quad u_n = \alpha_n v_n$. Puisque la suite $(\alpha_n)_n$ tendant vers 1, il existe un entier N' tel que $\forall n \geqslant N', \quad \alpha_n \geqslant \dfrac{1}{2} > 0$. Par conséquent, $\forall n \geqslant \max(N, N') = N'', \quad u_n = \alpha_n v_n$ avec $\alpha_n \neq 0$ donc $\forall n \geqslant N'', \quad u_n \neq 0 \Leftrightarrow v_n \neq 0$.
   (c) D'après ce qui précède, il existe un entier N'' tel que $\forall n \geqslant N'', \quad u_n = \alpha_n v_n$ avec $\alpha_n > 0$ donc le signe de u_n est celui de v_n pour $n \geqslant N''$.
   (d) D'après ce qui précède, il existe un entier N'' tel que $\forall n \geqslant N'', \quad u_n = \alpha_n v_n$ avec $\alpha_n > 0$ et $(\alpha_n)_n$ tend vers 1 donc
   $$\forall n \geqslant N'', \quad u_n = \alpha_n v_n \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{\alpha_n} u_n$$
   Par conséquent, si $(v_n)_n$ tend vers $L \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $(u_n)_n$ tend vers $1 \times L = L$ et si $(u_n)_n$ tend vers $L \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $(u_n)_n$ tend vers $\dfrac{1}{1} \times L = L$.

■

Méthode 12 (Convergence, limite et signe d'une suite)
Soit $(u_n)_n$ *une suite réelle. Pour déterminer la convergence (resp. limite, resp. le signe pour* n *assez grand) de* u_n,

- *on détermine un équivalent simple* v_n *de* u_n *et la convergence (resp. limite, resp. le signe pour* n *assez grand) de* $(u_n)_n$ *est la même que celle de* $(v_n)_n$.

- *Si cela n'est pas possible, à l'aide des développements limités à l'ordre* 1, *on essaie d'obtenir une égalité* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)_n$ *avec* v_n *bornée. Dans ce cas, la suite* $(u_n)_n$ *converge vers* 0 *mais on a aucune information sur le signe de* $(u_n)_n$.

Exemple 21
Déterminer le signe pour n assez grand ainsi que la limite de chacune des suites suivantes.

$$u_n = n^2\left(\mathrm{th}\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{2}{n}\right)\right), \quad v_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+n}, \quad w_n = \exp\left(\sqrt{n^2+1}\right) - e^n, \quad x_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right).$$

Solution 21
D'après les calculs menés dans l'exemple précédent, on a

- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$, la suite $(-n)_n$ étant négative et tendant vers $-\infty$, la suite $(u_n)_n$ est négative pour n assez grand et $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$
- $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n}$, la suite $\left(\frac{1}{6n}\right)_n$ étant positive et tendant vers 0, la suite $(v_n)_n$ est positive pour n assez grand et $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
- $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2n}$, la suite $\left(\frac{e^n}{2n}\right)_n$ tend vers $+\infty$ (par les croissancs comparées) et elle est positive donc la suite $(w_n)_n$ tend également vers $+\infty$ et elle est positive pour n assez grand.
- $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n\pi}{2n}$, la suite $\left(\frac{(-1)^n\pi}{2n}\right)_n$ tend vers 0, la suite $(x_n)_n$ tend également vers 0 et, pour n assez grand, le signe de x_n est celui de $(-1)^n$.