

Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Abdellah Bechata

www.mathematiques.fr.st

Dans ce chapitre, f désigne une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles (i.e. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ avec $S \subset \mathbb{R}$)

1 Intervalles stables et points fixes

Si l'on considère une suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec u_0 fixé et f une fonction, il n'est pas certain que tous les termes de la suite $(u_n)_n$ existent.

Exemple 1

On considère la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{u_n - 1}$ avec $u_0 = 2$. Il est immédiat que $u_1 = 1$ mais u_2 n'existe pas ainsi que tous les u_n , avec $n \geq 2$!

Exemple 2

L'exemple précédent est gentil. Considérons un exemple plus redoutable : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n)$ avec $u_0 > 0$. Quel que soit u_0 , il existe un rang à partir duquel la suite n'est plus définie.

Preuve :

En effet, il est aisé de montrer que $\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$ (considérer la fonction $x \mapsto \ln x - (x - 1)$, étudier ses variations sur $\mathbb{R}_+^\times$ et conclure en remarquant qu'elle s'annule en 1).

Supposons que pour un certain u_0 , tous les u_n existent alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) \leq u_n - 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leq -1$$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0 - n$ en posant l'hypothèse $(\mathcal{H}_n)$: « $u_n \leq u_0 - n$ »

- Puisque l'on a $u_0 \leq u_0 - 0$ (!), on en déduit que $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.
- Supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie et montrons $(\mathcal{H}_{n+1})$. Puisque $u_n \leq u_0 - n$ et $u_{n+1} \leq u_n - 1$, on en déduit que $u_{n+1} \leq (u_0 - n) - 1 = u_0 - (n + 1)$, ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

Par conséquent, si $n \geq E(u_0) + 1$ alors $u_n \leq 0$, ce qui entraîne que $u_{n+1} = \ln(u_n)$ n'existe pas. Ainsi, quel que soit u_0 choisi, il existe bien un certain rang à partir duquel u_n n'existe plus. ■

Pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il est nécessaire et suffisant que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathcal{D}_f$. Or, si $u_n \in \mathcal{D}_f, u_{n+1} = f(u_n) \in f(\mathcal{D}_f)$ et il n'est pas sûr que $u_{n+1} \in \mathcal{D}_f$. On remarque que si $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_f$ alors u_{n+1} sera également dans $\mathcal{D}_f$. Malheureusement, cela n'arrive pas toujours si $\mathcal{D}_f \neq \mathbb{R}$. Ce fait motive la définition suivante.

Définition 1

Soit f une fonction. On dit que $I \subset \mathcal{D}_f$ est un intervalle stable pour f si et seulement si $f(I) \subset I$.

Exemple 3

L'intervalle $[0; 1]$ est stable pour la fonction $f : x \mapsto x - x^2$. En effet, pour cela, explicitons son tableau de variation. $\forall x \in [0, 1], f'(x) = 2x - 1$, ce qui nous donne

x	0		1/2		1
$f'(x)$	+		0		+
$f(x)$		$\nearrow$	1/4	$\searrow$	
	0				0

$$\text{donc } f([0; 1]) = \left[0, \frac{1}{4}\right] \subset [0; 1]$$

Théorème 1

Soit I un intervalle stable pour f et soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- Si $u_0 \in I$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \in I$
- S'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \in I$ alors $\forall n \geq N, u_n$ existe et $u_n \in I$.

Preuve :

On prouve le second point (le premier étant un cas particulier. On procède par récurrence en considérant l'hypothèse $\mathcal{H}_n$: « u_n existe et $u_n \in I$ »

- $(\mathcal{H}_N)$ est trivialement vrai
- Soit $n \geq N$, supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie et montrons que $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie. Puisque u_n existe et $u_n \in I \subset \mathcal{D}_f$, le réel $f(u_n)$ existe et appartient à I (par stabilité de I par f) donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe et appartient à I , ce qui démontre $\mathcal{H}_{n+1}$ et achève la récurrence.

■

Exemple 4

Montrer que la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{(u_n)^3}{(u_n)^2 - 1}$ existe bien lorsque $u_0 > 1$.

Preuve :

Pour que la suite $(u_n)_n$ existe bien, puisque $u_0 \in]1, +\infty[$, il suffit de montrer que l'intervalle $]1, +\infty[$ est stable par $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - 1}$. La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$ et sa dérivée vaut

$$\forall x \in]1, +\infty[, f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

Son tableau de variation est alors

x	1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3\sqrt{3}/2$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\text{donc } f(]1, +\infty[) = \left[\frac{3\sqrt{3}}{2}, +\infty \right[\subset]1, +\infty[. \quad \blacksquare$$

Remarque 1

Parfois, il est parfois élémentaire de montrer que tous les termes d'une suite existe. C'est par exemple le cas lorsque f est définie sur $\mathbb{R}$ ou bien lorsque des considérations élémentaires sur les signes ou les encadrements suffisent. Voici deux exemples

Exemple 5

Montrer que les suites définies par les relations de récurrence suivantes existent bien :

- (1) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ avec $u_0 > 0$
- (2) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}_+$

Preuve :

(1) : Puisque $u_0 > 0$, on en déduit que $\frac{1}{u_0}$ existe et est strictement positif donc $u_1 = u_0 + \frac{1}{u_0}$ existe et est strictement positif. En constatant que ce phénomène reste vrai si l'on remplace u_0 par u_n et u_1 par u_{n+1} , on montre par récurrence. Considérons l'hypothèse $(\mathcal{H}_n)$: « $u_n > 0$ ».

- $(\mathcal{H}_0)$ est vrai puisque l'on a supposé $u_0 > 0$.
- Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vrai et montrons $(\mathcal{H}_{n+1})$. Puisque $u_n > 0$, on en déduit que $\frac{1}{u_n}$ existe et est strictement positif donc $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ existe et est strictement positif, ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(2) : Puisque $u_0 \geq 0$, on $2 + u_0 \geq 0$ donc $u_1 = \sqrt{2 + u_0}$ existe bien. On constate que ce résultat s'étend à tous les termes de la suite. Démontrons le par récurrence en posant $(\mathcal{H}_n)$: « u_n existe et $u_n \geq 0$ »

- $(\mathcal{H}_0)$ est vrai puisque l'on a supposé $u_0 \geq 0$.
- Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vrai et montrons $(\mathcal{H}_{n+1})$. Puisque $u_n \geq 0$, on en déduit que $2 + u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ existe et $u_{n+1} \geq 0$, ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

Remarquons que cette suite existe bien lorsque $u_0 \geq -2$ puisque $2 + u_0 \geq 0$ donc u_1 existe et $u_1 \geq 0$. Une récurrence absolument semblable à la précédente montre que $\forall n \geq 1$, u_n existe et $u_n \geq 0$. ■

Lorsqu'on cherche à savoir pour quelles valeurs de u_0 la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ existe bien, on est amené à déterminer les intervalles stables par f . Cela n'est pas toujours une chose aisée.

Exemple 6

La suite $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$, on constate immédiatement que si $u_0 > 0$, alors la suite est bien définie et elle est à valeurs strictement positives. Qu'en est-il des autres valeurs de u_0 ? On considère la fonction $f : x \mapsto 3 - \frac{2}{x}$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^\times$ et sur $\mathbb{R}_+^\times$. Son tableau de variation est

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$+\infty$ $\parallel$ $-\infty$	$\nearrow$	3
	3				

$\mathbb{R}^\times$ n'est pas stable par f puisque $f(\mathbb{R}^\times) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ et l'on ne décèle aucun intervalle stable.

Pour contourner cet obstacle, on introduit la notion de point fixe pour f , qui facilite en pratique l'étude des intervalles stables.

Définition 2

Soit f une fonction, on dit que x_0 est un point fixe de f si et seulement $f(x_0) = x_0$.

Proposition 1

Si f est continue sur $[a, b]$. Si le segment $[a, b]$ est stable par f , alors f admet au moins un point fixe sur $[a, b]$

Preuve :

On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. Puisque $f(a) \in [a, b]$, on en déduit que $f(a) \geq a \Leftrightarrow g(a) \geq 0$ et comme $f(b) \in [a, b]$, on a $f(b) \leq b \Leftrightarrow g(b) \leq 0$. La fonction g étant continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe au moins un $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$. ■

Reprenons l'exemple précédent en utilisant les points fixes.

Exemple 7

Déterminer des valeurs de u_0 telles que la suite $u_{n+1} = 3 - \frac{2}{u_n}$ existe bien. Déterminons les points fixes de $f : x \mapsto 3 - \frac{2}{x}$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{x} = x \Leftrightarrow_{\times x} 3x - 2 = x^2 \Leftrightarrow x \in \{1, 2\}$$

Son tableau de variation est alors

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$+\infty$ $\parallel$ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	3
	3								

On peut alors affirmer que les intervalles $[1, 2]$, $[2, +\infty[$ et $[1, +\infty[$ sont stables par f car

$$f([1, 2]) = [1, 2] \subset [1, 2], \quad f([2, +\infty[) = [2, 3[\subset [2, +\infty[, \quad f([1, +\infty[) = [1, 3[\subset [1, +\infty[$$

Par conséquent, si $u_0 \in [1, +\infty[$, on en déduit que la suite $(u_n)_n$ existe et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, +\infty[$.

On remarque également que si $u_0 \in \mathbb{R}_-^\times$, alors $u_1 = f(u_0)$ existe et appartient à $[3, +\infty[\subset [1, +\infty[$ qui est un intervalle stable

par f donc la suite $(u_n)_n$ existe bien et $\forall n \geq 1, u_n \in [1, +\infty[$.

Dans cet exemple, d'une méconnaissance complète sur u_0 , les points fixes ont permis de montrer que $(u_n)_n$ existe pour tout $u_0 \in \mathbb{R} \setminus [0, 1[$!

On peut encore améliorer un peu en remarquant que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ donc $f\left(\left]0, \frac{2}{3}\right]\right) = \mathbb{R}_-^\times$. Ainsi, si $u_0 \in \left]0, \frac{2}{3}\right]$, alors $u_1 = f(u_0)$ existe et appartient à $\mathbb{R}_-^\times$ donc $u_2 = f(u_1)$ existe et appartient à $f(\mathbb{R}_-^\times) = [1, +\infty[$ qui est un intervalle stable, ce qui entraîne que la suite $(u_n)_n$ existe et $\forall n \geq 2, u_n \in [1, +\infty[$.

Au final, il ne reste plus que les $u_0 \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ à traiter (puisque $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0, u_2 = f(u_1) = f(0)$ n'existe pas). Nous ne le ferons pas pour l'instant, puisque l'étude s'avère assez compliquée, même si elle est faisable.

Méthode 1 (Existence d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$)

Pour établir l'existence d'une telle suite selon des valeurs de u_0 , on procède dans cet ordre :

1. Si u_0 appartient à un certain ensemble S et si par la règle des signes ou par un encadrement simple de $u_1 = f(u_0)$, u_1 appartient également à S , on montre alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in S$.
2. On détermine les points fixes de f puis on dresse le tableau de variations de f en y plaçant également ces points fixes. Si u_0 est donné dans une plage de valeurs S , on montre que S est stable par f . Si cela n'est pas le cas, on cherche un intervalle stable I contenant S .
Si u_0 n'est pas donné, on cherche tous les intervalles stables et on considère alors les différents cas où u_0 appartient à l'un de ces intervalles.

2 Monotonie de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$

2.1 Cas général

On suppose que la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. Pour déterminer la monotonie de la suite u , on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ par des considérations élémentaires : règle des signes, encadrement simple (en exploitant si nécessaire son appartenance à un certain intervalle stable I). Si cela ne convient pas, on remarque que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Par conséquent, la détermination du signe de $u_{n+1} - u_n$ revient à la connaissance du signe de $f(x) - x$. On est alors face à deux cas :

- On détermine un intervalle stable I contenant toute la suite $(u_n)_n$ et $x \mapsto f(x) - x$ est de signe constant sur I .
 - Si $\forall x \in I, f(x) - x \leq 0$ alors, on peut substituer, pour chaque entier n , u_n à x (ce qui est licite car $u_n \in I$) ce qui entraîne que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) - u_n \leq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$$
 et la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
 - Si $\forall x \in I, f(x) - x \geq 0$ alors, on peut substituer, pour chaque entier n , u_n à x (ce qui est licite car $u_n \in I$) ce qui entraîne que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) - u_n \geq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$$
 et la suite $(u_n)_n$ est croissante.
- Si l'intervalle stable I choisi ne convient pas, il faut en trouver un autre sur lequel $x \mapsto f(x) - x$ soit de signe constant et l'on se ramène au cas précédent.
- Si l'on y arrive pas, on teste l'une des deux procédures suivantes (f monotone sur I). Si aucune de ces trois procédures ne convient, c'est que la suite est fort difficile et non scolaire ! Utiliser alors votre perspicacité

Exemple 8

- La suite définie par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2$ est croissante car $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$.
- La suite définie par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ avec $u_0 > 0$ est croissante. En effet, nous avons montré précédemment que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$.

Exemple 9

Etudions la monotonie de la suite $(u_n)_n$ définie par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$. Il est immédiat que la suite existe et elle est associée à $f : x \mapsto \sin x$. Des considérations élémentaires ne fournissent pas le

signe de $u_{n+1} - u_n$. On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - x = \sin x - x$. Il est immédiat que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \cos x - 1$$

qui est négative sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$ et comme $g(0) = 0$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq x$$

Néanmoins, on ne connaît pas le signe de u_n ce qui nous empêche de remplacer x par u_n dans l'une de ces deux inégalités. On remarque si $u_0 \in \mathbb{R}$ alors $u_1 = \sin(u_0) \in [-1, 1]$ puis que les intervalles $[-1, 0]$ et $[0, 1]$ sont stables par $f = \sin$ ($f([-1, 0]) = [-\sin 1, 0] \subset [-1, 0]$ et $f([0, 1]) = [0, \sin 1] \subset [0, 1]$). Nous allons alors distinguer deux cas :

- Si $u_1 \in [-1, 0]$ alors $\forall n \geq 1, u_n \in [-1, 0]$ (par stabilité de $[-1, 0]$ par f) donc $\forall n \geq 1, \quad f(u_n) \geq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$ est la suite $(u_n)_n$ est croissante à partir du rang $n = 1$.
- Si $u_1 \in [0, 1]$ alors $\forall n \geq 1, u_n \in [0, 1]$ par stabilité de $[0, 1]$ par f) donc $\forall n \geq 1, \quad f(u_n) \leq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$ est la suite $(u_n)_n$ est décroissante à partir du rang $n = 1$.

Puisque $u_1 = \sin(u_0)$, on obtient que la suite $(u_n)_n$ est croissante (resp. décroissante) à partir du rang 1 si et seulement si $u_0 \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ (resp. $u_0 \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$).

Exemple 10

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$ avec $u_0 > 0$.

Une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$ donc la suite $(u_n)_n$ existe bien. Étudions sa monotonie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} = \frac{(\sqrt{2} - u_n) \overbrace{\left(\sqrt{2} + u_n \right)}^{>0}}{\underbrace{2u_n}_{>0}}$$

Par conséquent, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui du signe de $\sqrt{2} - u_n$ donc il dépend de la position de u_n par rapport à $\sqrt{2}$. Il nous faut donc obtenir un intervalle stable pour $f : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$ sur lequel la fonction $x \mapsto f(x) - x = \frac{2 - x^2}{2x}$ soit de signe constant. Commencer par déterminer les points fixes de f

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) = x \Leftrightarrow_{\times 2x} x^2 + 2 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

La suite $(u_n)_n$ étant à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\times$, il suffit de déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+^\times$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et sa dérivée vaut $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$ donc son tableau de variation est

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	-	0	+	
$f(x)$	$\parallel$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

L'intervalle $[\sqrt{2}, +\infty[$ est stable par f et $x \mapsto f(x) - x$ est de signe négatif sur cet intervalle. On distingue alors deux cas :

- Si $u_0 \in [\sqrt{2}, +\infty[$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [\sqrt{2}, +\infty[$ (par stabilité de $[\sqrt{2}, +\infty[$ par f) et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$$

donc la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

- Si $u_0 \in]0, \sqrt{2}]$ alors $u_1 = f(u_0) \in f([0, \sqrt{2}]) = [\sqrt{2}, +\infty[$ donc $\forall n \geq 1, u_n \in [\sqrt{2}, +\infty[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$$

ce qui entraîne que la suite $(u_n)_n$ est décroissante à partir du rang 1.

Il n'est pas toujours possible d'obtenir un intervalle stable par f sur lequel $x \mapsto f(x) - x$ n'est pas de signe constant comme nous le montre l'exemple suivant. Pour contourner le problème, nous serons amenés à étudier les deux cas particuliers suivants.

Exemple 11

Étudions la monotonie de la suite $(u_n)_n$ définie par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$ et $u_0 = 0$.

Une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0$ donc la suite (u_n) existe. La fonction associée est $f : x \mapsto \frac{x+2}{2x+1}$, l'intervalle $\mathbb{R}_+$ est clairement stable par f (inutile d'étudier les variations, si $x \geq 0$ alors $f(x) \geq 0$ donc $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$) et le signe de

$$f(x) - x = \frac{x+2}{2x+1} - x = \frac{x+2-2x^2-x}{2x+1} = \frac{2(1-x)(1+x)}{2x+1}$$

n'est pas constant sur $\mathbb{R}_+$. Dressons simultanément le tableau de variation de f et le tableau de signe de $x \mapsto f(x) - x$. La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ ($\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = \frac{-3}{(2x+1)^2}$) et son point fixe sur $\mathbb{R}_+$ est 1 (d'après le calcul de $f(x) - x$) ce qui nous donne

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	2	$\searrow$	1	$\searrow$	$1/2$
$f(x) - x$		+		-	

On constate que $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$ ne sont pas stables par f et le seul intervalle stable que l'on devine est $\mathbb{R}_+$ sur lequel $x \mapsto f(x) - x$ n'est pas de signe constant. Dans les sections 2.2 et 2.3, nous allons montrer comment gérer cette situation dans certains cas particuliers.

2.2 f est croissante

Supposons que f est croissante sur un intervalle I stable par f et contenant u_0 . On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n$ existe et $u_n \in I$. Dans ce cas, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $u_1 - u_0$. En effet, si

- $u_0 \leq u_1$: Alors la suite $(u_n)_n$ est croissante. En effet, procédons par récurrence en posant $(\mathcal{H}_n) : \ll u_n \leq u_{n+1} \gg$.
 - $(\mathcal{H}_0)$ est trivialement vraie
 - Supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie et montrons que $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie. Puisque l'on a $u_n \leq u_{n+1}$, $u_n \in I$ et $u_{n+1} \in I$ et que la fonction f est croissante sur I alors $f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$, ce qui montre que $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.
- $u_0 \geq u_1$: Alors la suite $(u_n)_n$ est décroissante. En effet, procédons par récurrence en posant $(\mathcal{H}_n) : \ll u_n \geq u_{n+1} \gg$.
 - $(\mathcal{H}_0)$ est trivialement vraie
 - Supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie et montrons que $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie. Puisque l'on a $u_n \geq u_{n+1}$, $u_n \in I$ et $u_{n+1} \in I$ et que la fonction f est croissante sur I alors $f(u_n) \geq f(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_{n+2}$, ce qui montre que $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

Remarque 2 (Z)

Le fait que la fonction f soit croissante n'implique pas que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ le soit.

Exemple 12

Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$ définie par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ avec $u_0 = 0$.

Une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0$ donc la suite (u_n) existe. La fonction associée est $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$ qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $u_1 = \sqrt{2+0} = \sqrt{2} \geq u_0 = 0$, on en déduit que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

2.3 f est décroissante

Supposons que f est décroissante sur un intervalle I stable par f et contenant u_0 . On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n$ existe et $u_n \in I$. Nous introduisons alors deux suites auxiliaires a et b définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = u_{2n} \text{ et } b_n = u_{2n+1}$$

Etablissons la relation de récurrence des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(a_n)$$

Par le même calcul, on obtient que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = (f \circ f)(b_n)$. On remarque alors que les trois propriétés suivantes sont vérifiées

- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n$ et b_n appartiennent à I
- I est stable par $f \circ f$ puisque $(f \circ f)(I) = f(f(I)) \subset f(I) \subset I$.
- la fonction $f \circ f$ est croissante sur I .

Par conséquent, on étudie les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ en utilisant la procédure de la section.2.2.

- Le signe de $a_1 - a_0 = u_2 - u_0$ est celui de $a_{n+1} - a_n = u_{2n+2} - u_{2n}$
- Le signe de $b_1 - b_0 = u_3 - u_1$ est celui de $b_{n+1} - b_n = u_{2n+3} - u_{2n+1}$
- En cas de convergence, la limite de (u_{2n}) (resp. $(u_{2n+1})_n$) est point fixe de $\dots f \circ f$!

Remarque 3 (Z)

Le fait que le fonction f soit décroissante n'implique pas que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ le soit, c'est même toujours faux ! (sauf pour les suites constantes, sic)

Remarque 4

Si a est un point fixe de f alors a est aussi point fixe de $f \circ f$ (en effet, $(f \circ f)(a) = f(f(a)) = f(a) = a$). Cela peut être utile pour obtenir des solutions évidentes à $(f \circ f)(x)$ lorsque $f \circ f$ est un polynôme (et donc on obtient des factorisations de ce polynôme) ou lorsque l'on a montré que l'équation $(f \circ f)(x) = x$ n'admet qu'une seule solution (qui sera alors a).

Exemple 13

Etudions de nouveau la suite $(u_n)_n$ définie par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$ lorsque $u_0 = 0$ puisque lorsque $u_0 \geq 0$

- $u_0 = 0$: D'après les calculs menés précédemment, nous savons que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc la fonction $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On introduit les deux suites $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$ qui sont définies par la relation de récurrence $a_{n+1} = (f \circ f)(a_n)$ et $b_{n+1} = (f \circ f)(b_n)$. Puisque l'on a $a_0 = u_0 = 0, b_0 = u_1 = 2$ et

$$a_1 = u_2 = f(u_1) = f(2) = \frac{4}{5}, \quad b_1 = u_3 = f(u_2) = f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{14}{13}$$

on obtient que $a_1 \geq a_0$ et $b_1 \leq b_0$, ce qui entraîne que les suites $(a_n)_n = (u_{2n})_n$ et $(b_n)_n = (u_{2n+1})_n$ sont respectivement croissante et décroissante.

- $u_0 \geq 0$: Déterminons les intervalles stables par $f \circ f$ (qui est, rappelons-le une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$) et sur lesquels la fonction $x \mapsto (f \circ f)(x) - x$ soit de signe constant. Explicitons $f \circ f$ pour commencer

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x+2}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x+2}{2x+1} + 2}{2\left(\frac{x+2}{2x+1}\right) + 1} = \frac{5x+4}{4x+5}$$

Déterminons le signe de $(f \circ f)(x) - x$ (ce qui fournira également les points fixes de $f \circ f$!)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (f \circ f)(x) - x = \frac{5x+4}{4x+5} - x = \frac{4(1-x)(x+1)}{4x+5}$$

Par conséquent, seul 1 est point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$ (c'est miraculeux, il suffit d'essayer avec la fonction $f : x \mapsto 2 - x^2$ dont les points fixes sont -2 et 1 et ceux de $f \circ f$ sont $1, -2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, en remarquant que $(f \circ f)(x) - x$ est un polynôme en x dont deux racines évidentes sont -2 et 1 donc il se factorise par $(x+2)(x-1)$). Dressons simultanément le tableau de variation de $f \circ f$ et le tableau de signe de $x \mapsto (f \circ f)(x) - x$

x	0		1		$+\infty$
				$\nearrow$	$5/4$
$(f \circ f)(x)$		$\nearrow$	1		
	$4/5$				
$f(x) - x$		+		-	

Par conséquent, $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$ sont stables par $f \circ f$ et $x \mapsto (f \circ f)(x) - x$ est de signe constant sur chacun d'eux. On distingue alors deux cas :

- Si $u_0 \in [0, 1]$ alors $u_1 = f(u_0) \in f([0, 1]) \subset [1, +\infty[$ (d'après l'étude que nous avons menée précédemment sur f). Les intervalles $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$ étant stables par $f \circ f$ et $a_0 = u_0 \in [0, 1]$ et $b_0 = u_1 \in [1, +\infty[$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \in [0, 1] \Leftrightarrow u_{2n} \in [0, 1] \quad \text{et} \quad b_n \in [1, +\infty[\Leftrightarrow u_{2n+1} \in [1, +\infty[$$

Cela entraîne que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} - a_n = (f \circ f)(a_n) - a_n \geq 0 \quad \text{et} \quad b_{n+1} - b_n = (f \circ f)(b_n) - b_n \leq 0$$

donc les suites $(a_n)_n = (u_{2n})_n$ et $(b_n)_n = (u_{2n+1})_n$ sont respectivement croissante et décroissante.

- Si $u_0 \in [1, +\infty[$ alors $u_1 = f(u_0) \in f([1, +\infty[) \subset [0, 1]$. Les intervalles $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$ étant stables par $f \circ f$ et $a_0 = u_0 \in [1, +\infty[$ et $b_0 = u_1 \in [0, 1]$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \in [1, +\infty[\Leftrightarrow u_{2n} \in [1, +\infty[\quad \text{et} \quad b_n \in [0, 1] \Leftrightarrow u_{2n+1} \in [0, 1]$$

Cela entraîne que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} - a_n = (f \circ f)(a_n) - a_n \leq 0 \quad \text{et} \quad b_{n+1} - b_n = (f \circ f)(b_n) - b_n \geq 0$$

donc les suites $(a_n)_n = (u_{2n})_n$ et $(b_n)_n = (u_{2n+1})_n$ sont respectivement décroissante et croissante.

Méthode 2 (Monotonie de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$)

On procède dans cet ordre :

- Par un calcul direct, on obtient le signe de $u_{n+1} - u_n$ et on conclut.
- On détermine un intervalle I stable par f , contenant u_0 (resp. u_N pour un certain $N \in \mathbb{N}$) et sur lequel $x \mapsto f(x) - x$ est de signe constant.
Dans ce cas, le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (resp. pour $n \geq N$) est celui de $x \mapsto f(x) - x$.
- On détermine un intervalle I stable pour f avec $u_0 \in I$ et si
 - f est croissante sur I , le signe de $u_{n+1} - u_n$ est alors le signe de $u_1 - u_0$.
 - f est décroissante sur I , on introduit les deux suites auxiliaires $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$ qui sont associées à la fonction $f \circ f$ croissante sur I et le signe de $a_{n+1} - a_n$ (resp. $b_{n+1} - b_n$) est celui de $a_1 - a_0$ (resp. $b_1 - b_0$).
Si en outre u_0 appartient à une plage de valeurs S , on cherche des intervalles stables par $f \circ f$ sur lesquels $x \mapsto (f \circ f)(x) - x$ sera de signe constant et qui vont recouvrir S .

3 Convergence de $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour justifier la convergence d'une suite $(u_n)_n$, une méthode élémentaire consiste à utiliser le théorème de convergence monotone des suites que voici

Théorème 2 (Convergence monotone des suites)

Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs réelles.

- Si la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée par M alors elle converge et sa limite est majorée par M
- Si la suite $(u_n)_n$ est croissante et non majorée alors elle diverge vers $+\infty$.
- Si la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par m alors elle converge et sa limite est minorée par m .
- Si la suite $(u_n)_n$ est décroissante et non minorée alors elle diverge vers $-\infty$.

Ce théorème suffit amplement dans le cas $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque $(u_n)_n$ appartient à un intervalle stable et sur lequel $x \mapsto f(x) - x$ est de signe constant ou dans le cas où sur lequel la fonction f est croissante (convergence de $(u_n)_n$) ou décroissante (convergence des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$). Dans ce dernier, le théorème suivant permet d'obtenir la convergence ou la divergence de la suite $(u_n)_n$ connaissant la convergence des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$. Nous donnerons sa preuve dans le chapitre sur la convergence des suites (non nécessairement récurrentes)

Théorème 3

Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs réelles. La suite $(u_n)_n$ converge si et seulement si les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite. Dans ce cas, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$

Une fois la convergence de la suite $(u_n)_n$ acquise, il est utile d'avoir un critère permettant de calculer la limite (ou plus modestement, de la caractériser). Pour cela nous admettons la proposition suivante (que l'on démontrera dans le chapitre sur la continuité des fonctions) et nous en déduirons le critère attendu.

Proposition 2

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels convergeant vers $L \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un intervalle contenant tous les u_n , $n \in \mathbb{N}$ ainsi que la limite L . Si f est continue en L alors $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(L)$.

Théorème 4 (Limites des suites $u_{n+1} = f(u_n)$)

Soit $(u_n)_n$ une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite $(u_n)_n$ existe. Dans ce cas, si la suite $(u_n)_n$ converge vers $L \in \mathbb{R}$ et si f est continue en L alors L est un point fixe de f .

Preuve :

La suite $(u_n)_n$ converge vers L donc la suite $(u_{n+1})_n$ également. D'autre part, d'après le théorème précédent, la suite $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(L)$. En considérant l'égalité $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ et en passant à la limite, on obtient $L = f(L)$, i.e. L est un point fixe de f . ■

Remarque 5

Si f est décroissante et si les suites $a_{n+1} = (f \circ f)(a_n)$ et $b_{n+1} = (f \circ f)(b_n)$ convergent, alors leurs limites respectives L et L' sont des points fixes de $f \circ f$. Ainsi, si elles convergent vers la même limite L , la suite $(u_n)_n$ converge également vers L mais L est point fixe de $f \circ f$ et non de f !

Pour montrer qu'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ qui est croissante (resp. décroissante) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), on procède par l'absurde en supposant qu'elle est majorée (resp. minorée). Dans ce cas, sa limite L existe et est point fixe de f . Il suffit alors de montrer que f n'admet aucun point fixe ou bien qu'il n'existe aucun point fixe de f appartenant à l'intervalle dans lequel se trouve tous les termes de la suite.

Exemple 14

Etudier la convergence des suites :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ avec $u_0 > 0$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$ avec $u_0 > 0$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ avec $u_0 = 0$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$ et $u_0 \geq 0$

Réponses :

1. On a montré précédemment que la suite $(u_n)_n$ est strictement positive et croissante. On remarque que la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ n'admet aucun point fixe car

$$f(x) = x \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0$$

ce qui est impossible, ce qui nous fait penser que la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente. Procédons par l'absurde et supposons que la suite $(u_n)_n$ est majorée. Etant croissante, on en déduit qu'elle converge. La limite L est alors un point fixe de f qui n'en possède pas, ce qui est contradictoire. Par conséquent, la suite $(u_n)_n$ n'est pas majorée et elle est croissante donc elle diverge vers $+\infty$.

2. On a montré précédemment que

- si $u_0 \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$ alors $\forall n \geq 1, u_n \in [0, 1]$ et la suite $(u_n)_n$ est décroissante donc elle converge. Sa limite L est point fixe de $f : x \mapsto \sin x$ qui n'admet qu'un seul point fixe $x = 0$ (puisque $x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et elle s'annule en 0) donc $L = 0$.

- si $u_0 \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ alors $\forall n \geq 1, u_n \in [-1, 0]$ et la suite $(u_n)_n$ est croissante donc elle converge. Sa limite L est point fixe de $f : x \mapsto \sin x$ et d'après le cas précédent $L = 0$.

3. On a montré précédemment que

- si $u_0 \in [\sqrt{2}, +\infty[$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\sqrt{2}, +\infty[$, donc elle est minorée par $\sqrt{2}$, et la suite $(u_n)_n$ est décroissante. Par conséquent, elle converge vers une limite $L \geq \sqrt{2}$ qui est en outre un point fixe de $f : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$ dont les points fixes sont $\pm\sqrt{2}$, ce qui entraîne que $L = \sqrt{2}$.
- si $u_0 \in [0, \sqrt{2}]$, alors $\forall n \geq 1, u_n \in [\sqrt{2}, +\infty[$, donc elle est minorée par $\sqrt{2}$, et la suite $(u_n)_n$ est décroissante à partir du rang 1. Par conséquent, elle converge vers une limite $L \geq \sqrt{2}$ qui est en outre un point fixe de $f : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$ dont les points fixes sont $\pm\sqrt{2}$, ce qui entraîne que $L = \sqrt{2}$.

4. On a montré précédemment que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}_+$ et que la suite $(u_n)_n$ est croissante. Pour l'instant, on ne peut conclure. Déterminer les points fixes de $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{2+x} = x \Leftrightarrow (x \geq 0 \text{ et } 2+x = x^2) \Leftrightarrow (x \geq 0 \text{ et } x \in \{-1, 2\}) \Leftrightarrow x = 2$$

La fonction f étant croissante, on en déduit que l'intervalle $[0, 2]$ est stable par f (car $f([0, 2]) = [\sqrt{2}, 2] \subset [0, 2]$). Puisque $u_0 \in [0, 2]$, on peut affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 2]$. La suite $(u_n)_n$ étant croissante et majorée par 2, on en déduit qu'elle converge vers une limite L qui appartient à $[0, 2]$ et qui est un point fixe de f donc $L = 2$.

5. Nous avons montré précédemment que

- si $u_0 \in [0, 1]$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \in [0, 1]$ et $u_{2n+1} \in [1, +\infty[$, les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont respectivement croissante et décroissante donc la suite $(u_{2n})_n$ (resp. $(u_{2n+1})_n$) est croissante et majorée par 1 (resp. décroissante et minorée par 1) donc la suite $(u_{2n})_n$ (resp. $(u_{2n+1})_n$) converge vers une limite L (resp. L') appartenant à $[0, 1]$ (resp. $[1, +\infty[$) qui est en outre un point fixe de $f \circ f$. Nous avons montré précédemment que seul 1 est point fixe de $f \circ f$ donc $L = L' = 1$. Ainsi, les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite 1, ce qui entraîne que la suite $(u_n)_n$ converge également vers 1.
- si $u_0 \in [1, +\infty[$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \in [1, +\infty[$ et $u_{2n+1} \in [0, 1]$, les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont respectivement décroissante et croissante donc la suite $(u_{2n})_n$ (resp. $(u_{2n+1})_n$) est décroissante et minorée par 1 (resp. croissante et majorée par 1) donc la suite $(u_{2n})_n$ (resp. $(u_{2n+1})_n$) converge vers une limite L (resp. L') appartenant à $[1, +\infty[$ (resp. $[0, 1]$) qui est en outre un point fixe de $f \circ f$. Nous avons montré précédemment que seul 1 est point fixe de $f \circ f$ donc $L = L' = 1$. Ainsi, les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite 1, ce qui entraîne que la suite $(u_n)_n$ converge également vers 1.

Méthode 3 (Convergence de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ et calcul de la limite)

On procède dans cet ordre

- On applique le théorème de convergence monotone à la suite $(u_n)_n$. Dans les cas de convergence, on détermine la limite L en utilisant le fait qu'elle est point fixe de f et qu'elle appartient à un certain intervalle (voire en utilisant des minoration ou majoration de u_n par rapport aux premiers termes de la suite u_0, u_1 ou u_2)
- Si f est décroissante sur I , on applique le théorème de convergence monotone aux deux suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$. Si l'une de ces deux suites ne converge pas, on en déduit que la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente. Sinon, on détermine la limite de chacune de ces suites en utilisant le fait que leurs limites respectives sont points fixes de $f \circ f$ et qu'elles appartiennent à un certain intervalle. Dans ce cas, la suite $(u_n)_n$ convergent si et seulement les deux limites obtenues sont égales et, dans ce cas, la limite commune des deux suites est la limite de la suite $(u_n)_n$

4 Plan d'étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Étudier les variations de f ainsi que le signe de $x \mapsto f(x) - x$.
2. En déduire les points fixes de f ainsi que les intervalles stables par f (si possible sur lequel $x \mapsto f(x) - x$ est de signe constant)
3. Représenter sur un même schéma la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$ pour visualiser les différents comportements possibles selon les valeurs de u_0 .
4. Pour chaque intervalle stable I :

- lorsque $x \mapsto f(x) - x$ est de signe constant sur I , obtenir la monotonie de $(u_n)_n$ et conclure.
 - lorsque $x \mapsto f(x) - x$ n'est de signe constant sur I ,
 - si f est croissante sur I , déterminer le sens de variations de $(u_n)_n$ en comparant u_0 et u_1 puis conclure.
 - si f est décroissante sur I , déterminer le sens de variations de $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ et conclure.
5. Pour chaque intervalle non stable J , si $f(J)$ est inclus dans un intervalle stable I alors $u_1 \in I$ et conclure en considérant la suite $v_n = u_{n+1}$ qui vérifie $v_{n+1} = f(v_n)$ avec $v_0 = u_1 \in I$. Idem avec $f(f(J)) \subset I$ et $u_2 \in I$, (prendre la suite $v_n = u_{n+2}$), etc.

5 Deux exemples complets

5.1 Etude de la suite $u_{n+1} = u_n - (u_n)^2$

- Il est immédiat que la suite $(u_n)_n$ existe quel que soit la valeur de u_0 .
- Il est également immédiat que la suite $(u_n)_n$ est décroissante car $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = -(u_n)^2 \leq 0$.
- Considérons la fonction $f : x \mapsto x - x^2$.
Points fixes de $f : f(x) = x \Leftrightarrow x - x^2 = x \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc 0 est l'unique point fixe de f .
- Variations de f et intervalles stables : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme) et sa dérivée vaut $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 - 2x$ donc son tableau de variations est donné par

x	$-\infty$		0		1/2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+		-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1/4	$\searrow$	$-\infty$

On constate que les intervalles $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\mathbb{R}_-$ sont stables par f (car $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{4}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_-$) mais l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ ne l'est pas. Par contre, on voit que son image va contenir les deux intervalles précédents. Cherchons alors le point appartenant à $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ dont l'image par f vaut 0.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$$

Il s'agit donc de $x = 1$. Intégrons le au tableau de variation de f .

x	$-\infty$		0		1/2		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		+		-			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1/4	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Par conséquent, les intervalles $\mathbb{R}_-$ et $[0, 1]$ sont stables par f et $f([1, +\infty[) = \mathbb{R}_-$. On distingue alors les différents cas suivants :

1. Si $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_n$ est constante et vaut 0 donc elle tend vers 0 !
2. Si $u_0 = 1$, alors $u_1 = 0$ et $\forall n \geq 1, \quad u_n = 0$. La suite est alors constante à partir du rang 1 et vaut 0 donc elle tend vers 0 !
3. Si $u_0 \in]0, 1]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0, 1]$ (c'est un intervalle stable par f). Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite $L \in [0, 1]$ qui est en outre un point fixe de f . Cela entraîne que $L = 0$.

4. Si $u_0 \in \mathbb{R}_-^\times$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_-^\times$ (c'est un intervalle stable par f) et la suite $(u_n)_n$ est décroissante. Le seul point fixe de f étant 0, il est peu probable qu'elle tende vers 0 ! Supposons que la suite $(u_n)_n$ soit minorée. Etant décroissante, on en déduit qu'elle converge vers une limite $L \leq u_0$ (décroissante de la suite) et comme $u_0 < 0$, on a $L < 0$ et L doit être un point fixe de f donc $L = 0$, ce qui est contradictoire. Par conséquent, la suite $(u_n)_n$ n'est pas minorée et elle décroît donc elle diverge vers $-\infty$.
5. Si $u_0 \in]1, +\infty[$ alors $u_1 \in f(]1, +\infty[) = \mathbb{R}_-^\times$. Ainsi, $\forall n \geq 1$, $u_n \in \mathbb{R}_-^\times$ et la suite $(u_n)_n$ décroît et diverge vers $-\infty$ (même raisonnement que précédemment avec $L \leq u_1 < 0$)

5.2 Etude de la suite $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$

- On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2 - x}$. Elle est définie sur $] -\infty, 2]$.
- Signe de $x \mapsto f(x) - x$ et points fixes de f : Puisque $f(x) - x = \sqrt{2 - x} - x$, il est immédiat que si $x \leq 0$ alors $f(x) - x \geq 0$. Il reste le cas $x \geq 0$ à traiter.

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow \sqrt{2 - x} \geq x \underset{x \geq 0 \text{ et } \sqrt{2-x} \geq 0}{\Leftrightarrow} 2 - x \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 0$$

Le trinôme $x^2 + x - 2$ admet pour racine -2 et 1 donc il est négatif sur l'intervalle $[-2, 1]$ et, puisque l'on a supposé x positif, on obtient que $x \in [0, 1]$. On en déduit que 1 est l'unique point fixe de f et le tableau de signe de $x \mapsto f(x) - x$ est

x	$-\infty$		0		1		2
$f(x) - x$		$+$		$-$	0	$+$	

- Variations de f et intervalles stables : il est immédiat que f est décroissante sur $] -\infty, 2]$. On construit alors le tableau contenant les variations de f et le signe de $x \mapsto f(x) - x$

x	$-\infty$		0		1		2
$f(x) - x$		$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

On constate que l'intervalle $[0, 2]$ est stable par f (car $f([0, 2]) = [\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \sqrt{2}] \subset [0, 2]$) mais le signe de $x \mapsto f(x) - x$ n'y est pas constant (la fonction f étant décroissante, on sera amené à considérer les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$). Par contre, l'intervalle $\mathbb{R}_-$ n'est pas stable par f mais son image $f(\mathbb{R}_-) = [\sqrt{2}, +\infty[$ contient une partie de l'intervalle $[0, 2]$. Déterminons le réel $x \in \mathbb{R}_-$ tel que $f(x) = 2$.

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2 - x} = 2 \underset{x \geq 0 \text{ et } \sqrt{2-x} \geq 0}{\Leftrightarrow} 2 - x = 4 \Leftrightarrow x = -2$$

Plaçons ce point dans le tableau précédent

x	$-\infty$		-2		0		1		2
$f(x) - x$		$+$				$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

On constate alors que $[0, 2]$ est stable par f , que $f([-2, 0]) = [\sqrt{2}, 2] \subset [0, 2]$ et $f(]-\infty, 2]) =]2, +\infty[$.

- Etudions maintenant la suite $(u_n)_n$.

- Si $u_0 \in]2, +\infty[$, alors u_1 n'existe pas donc la suite $(u_n)_n$ n'existe pas à partir du rang 1.
- Si $u_0 \in]-\infty, -2[$ alors $u_1 = f(u_0) \in f(]-\infty, -2[) =]2, +\infty[$, ce qui entraîne que u_2 n'existe pas et la suite $(u_n)_n$ n'existe pas à partir du rang 2.
- Si $u_0 \in [0, 2]$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 2]$ (stabilité par f de cet intervalle). On introduit alors les deux suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$. La fonction $f \circ f$ étant croissante sur $[0, 2]$, on en déduit que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones. En outre, elles sont bornées donc elles convergent et leurs limites respectives appartiennent à $[0, 2]$.
Déterminons les points fixes de $f \circ f$ appartenant à $[0, 2]$

$$\begin{aligned}
 (f \circ f)(x) &= x \Leftrightarrow \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}} = x \underset{x \geq 0 \text{ et } \sqrt{\cdot} \geq 0}{\Leftrightarrow} 2 - \sqrt{2 - x} = x^2 \Leftrightarrow 2 - x^2 = \sqrt{2 - x} \\
 &\Leftrightarrow (2 - x^2 \geq 0 \text{ et } (2 - x^2)^2 \underset{2 - x^2 \geq 0 \text{ et } \sqrt{\cdot} \geq 0}{=} 2 - x) \Leftrightarrow x \in [0, \sqrt{2}] \text{ et } x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0
 \end{aligned}$$

Remarquons que lors de l'étude des points fixes de f , on avait obtenu -2 et 1 comme solutions (il s'agissait de l'équation $2 - x = x^2$, même s'il a fallu ensuite éliminer -2). On constate que -2 et 1 sont également solutions de l'équation $x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0$ (*ce fait qui semble étonnant ne l'est pas, si l'on se place dans $\mathbb{C}$, le fait que $f(z) = z$ entraîne que $f(f(z)) = f(z) = z$ donc si z est point fixe de f alors z est aussi point fixe de $f \circ f$, ce raisonnement étant formel puisque la fonction $\sqrt{z}$ n'est pas définie sur $\mathbb{C}$, du moins pour l'instant*). On peut donc factoriser ce polynôme par $(x + 2)(x - 1)$. Il existe donc trois réels a, b, c tels que

$$x^4 - 4x^2 + x + 2 = (x + 2)(x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

En considérant les coefficients constants et dominants puis en évaluant en $x = -1$ (si l'on évalue en $x = 0$, $x = 1$ ou $x = -2$, le membre de droite est nul donc on ne peut obtenir b), on obtient que

$$\begin{cases} 1 \times 1 \times a = 1 \\ -2 = -2(a - b + c) \\ 2 \times (-1) \times c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On obtient donc

$$x^4 - 4x^2 + x + 2 = (x + 2)(x - 1) \left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) = (x - 1)(x + 2) \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

Par conséquent, les points fixes de $f \circ f$ sont les racines de ce polynôme appartenant à $[0, \sqrt{2}]$, autrement dit il s'agit de $x = 1$.

Les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent donc vers la même limite 1, ce qui entraîne que la suite $(u_n)_n$ converge vers 1.

- Si $u_0 \in [-2, 0]$ alors $u_1 = f(u_0) \in [0, 2]$ et la suite $(u_n)_n$ converge vers 1 (il suffit de considérer la suite $v_n = u_{n+1}$ qui satisfait à la relation de récurrence $v_{n+1} = f(v_n)$ avec $v_0 = u_1 \in [0, 2]$).