Algèbre linéaire

Abdellah Bechata

www.mathematiques.fr.st

Dans ce chapitre, la lette $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'addition de $\mathbb{K}$ est notée $+$ et $0_{\mathbb{K}}$ désigne l'élément neutre pour l'addition du corps $\mathbb{K}$.

La multiplication de $\mathbb{K}$ est notée $\times$.et 1 désigne l'élément neutre pour la multiplication de ce même corps $\mathbb{K}$.

Si p est un entier naturel non nul et si $E_1, .., E_p$ désignent p ensembles, l'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_p$ désigne l'ensemble des p-uplets $(x_1, .., x_p)$ avec $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $x_i \in E_i$.

Si E est un ensemble et p un entier non nul, E^p désigne l'ensemble $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$

Si A et B désignent deux ensembles non vides, $\mathcal{F}(A, B)$ désigne l'ensemble des applications de A dans B (i.e.si $f \in \mathcal{F}(A, B)$, $\quad \forall x \in A,\ f(x) \in B$).

1 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

1.1 Espaces vectoriels

Définition 1 (Espace vectoriel)
On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel tout triplet $(E, \oplus, \cdot)$ où

- *E est un ensemble non vide ,*
- *$\oplus$ est une loi de composition interne sur E, i.e. une application qui à tout couple (u, v) de $E \times E$ associe un élément de E noté $u \oplus v$.*
- *$\cdot$ une loi de composition externe, i.e. une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E, i.e. une application qui à tout couple (α, u) de $\mathbb{K} \times E$ associe un élément de E noté $\alpha \cdot u$.*

et ces deux lois vérifient vérifiant les conditions suivantes :

1. *Le couple $(E, +)$ constitue un groupe commutatif, i.e.*
   - *pour tout couple (u, v) de $E \times E$, $\quad u \oplus v = v \oplus u$ (commutativité de $\oplus$)*
   - *pour tout triple (u, v, w) de $E \times E \times E$, $\quad (u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ (associativité de $\oplus$)*
   - *il existe un élément 0_E de E tel que $\forall u \in E, \quad u \oplus 0_E = u$ (existence d'un élément neutre pour $\oplus$)*
   - *pour tout élément u de E, il existe un élément v de E tel que $u \oplus v = 0_E$ (existence d'un opposé pour la loi $\oplus$ de tout élément u de E).*
2. *Pour tout couple (u, v) de $E \times E$ et tout couple (α, β) de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$, on a :*

$$\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \times \beta) \cdot u, \quad (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u \oplus \beta \cdot u, \quad \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u \oplus \alpha \cdot v, \quad 1 \cdot u = u$$

Les éléments x du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E s'appellent des vecteurs de E, les éléments α de $\mathbb{K}$ s'appellent des scalaires, la loi $\oplus$ s'appelle l'addition sur E, la loi $\cdot$ s'appelle la multiplication des scalaires sur les vecteurs.

Proposition 1
Soit $(E, \oplus, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. *0_E est l'unique élément neutre pour $\oplus$ et $0_E \oplus 0_E = 0_E$.*
2. *Si $u \in E$, u possède un unique opposé que l'on note $-u$.*
3. *$\forall u \in E, \quad 0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \alpha \cdot 0_E = 0_E, \quad \forall u \in E, \quad (-1) \cdot u = -u$*

Preuve :

1. Soit a un autre élément pour $\oplus$. On a, par définition de 0_E, $a \oplus 0_E = a$ et, par définition de a, $0_E \oplus a = 0_E$. Or on a $0_E \oplus a = a \oplus 0_E$ donc $a = 0_E$. En outre, par définition de 0_E, on a $0_E \oplus 0_E = 0_E$.
2. Soient v et w deux opposés de u. Par définition, on a $u \oplus v = 0_E$ et $u \oplus w = 0_E$ donc
$$v = v \oplus 0_E = v \oplus (u \oplus w) = (v \oplus u) \oplus w = (u \oplus v) \oplus w = 0_E \oplus w = w.$$
3. $\underline{0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E}$: Puisque l'on a $0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$, on en déduit que
$$0_{\mathbb{K}} \cdot u = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot u = 0_{\mathbb{K}} \cdot u \oplus 0_{\mathbb{K}} \cdot u \Rightarrow 0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_{\mathbb{K}} \cdot u \oplus 0_{\mathbb{K}} \cdot u$$
En ajoutant l'opposé $-(0_{\mathbb{K}} \cdot u)$ de $0_{\mathbb{K}} \cdot u$ à chaque membre de cette égalité, on obtient
$$0_{\mathbb{K}} \cdot u \oplus (-(0_{\mathbb{K}} \cdot u)) = 0_{\mathbb{K}} \cdot u \oplus 0_{\mathbb{K}} \cdot u + (-(0_{\mathbb{K}} \cdot u)) = 0_{\mathbb{K}} \cdot u \oplus [0_{\mathbb{K}} \cdot u \oplus (-(0_{\mathbb{K}} \cdot u))] \Leftrightarrow 0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot u \oplus 0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot u \Rightarrow 0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$$
$\underline{\alpha.0_E = 0_E}$: Puisque l'on a $0_E \oplus 0_E = 0_E$, on en déduit que
$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \alpha \cdot (0_E \oplus 0_E) = \alpha \cdot 0_E \Leftrightarrow \alpha \cdot 0_E \oplus \alpha \cdot 0_E = \alpha \cdot 0_E$$
En ajoutant l'opposé $-(\alpha \cdot 0_E)$ de $\alpha \cdot 0_E$ à chaque membre de cette égalité, on obtient
$$\begin{aligned}(\alpha \cdot 0_E \oplus \alpha \cdot 0_E) \oplus (-(\alpha \cdot 0_E)) &= \alpha \cdot 0_E \oplus (-(\alpha \cdot 0_E)) \Leftrightarrow \alpha \cdot 0_E \oplus (\alpha \cdot 0_E \oplus (-(\alpha \cdot 0_E))) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \alpha \cdot 0_E \oplus 0_E = 0_E \Leftrightarrow \alpha \cdot 0_E = 0_E\end{aligned}$$
$\underline{(-1) \cdot u = -u}$: On a
$$0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot u = ((-1) + 1) \cdot u = (-1) \cdot u \oplus 1 \cdot u = (-1) \cdot u \oplus u$$
donc $(-1) \cdot u$ est un opposé à u. Comme l'opposé de u est unique et qu'il se note $-u$, on a bien $(-1) \cdot u = -u$.

■

Définition 2
Si u, v appartienne à E, on pose $u - v \underset{\text{définition}}{=} u \oplus (-v)$.

Remarque 1 (Z)
Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est toujours *a fortiori* un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet, si les propriétés du 2 sont satisfaites pour tout couple (α, β) de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, elles sont encore satisfaites pour tout couple (α, β) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).
Par contre un $\mathbb{R}$-espace vectoriel n'est pas forcément un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.
En pratique le corps $\mathbb{K}$ à considérer sera toujours clair suivant le contexte.

Proposition 2
Soient $(E, \oplus, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $u \in E$, on a :
$$\alpha \cdot u = 0_E \Leftrightarrow (\alpha = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } u = 0_E)$$

Preuve :
On sait déjà que si $u = 0_E$ ou $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$, alors $\alpha \cdot u = 0_E$.
Réciproquement, supposons que $\alpha \cdot u = 0_E$. Si $\alpha = 0$, c'est fini, sinon $\alpha \neq 0$. Dans ce cas, α admet un inverse α^{-1} dans $\mathbb{K}$ pour la multiplication de $\mathbb{K}$ et l'on a
$$\alpha \cdot u = 0_E \Rightarrow \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot u) = \alpha \cdot 0_E \Leftrightarrow (\alpha^{-1} \times \alpha) \cdot u = 0_E \Leftrightarrow 1 \cdot u = 0_E \Leftrightarrow u = 0_E.$$

■

Notation 1
Dans la suite, lorsque l'on disposera d'un espace vectoriel, pour une plus grand simplicité d'écriture la loi interne sera toujours notée $+$ et la loi externe $\cdot$, ce qui permettra de parler du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E au lieu du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, \oplus, \cdot)$.
On fera néanmoins attention que si α, β appartiennent à $\mathbb{K}$, $\alpha + \beta$ désigne alors l'addition dans $\mathbb{K}$ et si u, v appartiennent à E, $u + v$ désigne l'addition dans E. En particulier, on évitera d'écrire $\alpha + u$ lorsque $\alpha \in \mathbb{K}$ et $u \in E$ car cette notation n'aura aucun sens.
Par contre, on continuera de désigner par 0_E l'élément neutre pour l'addition de E.

1.2 Contructions d'espaces vectoriels

Proposition 3 (Espace vectoriel produit)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour $(u,v),(u',v') \in E \times F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on pose :

$$(u,v)+(u',v') \underset{\text{définition}}{=} (u+u',v+v'), \quad \alpha\cdot(u,v) \underset{\text{définition}}{=} (\alpha\cdot u, \alpha\cdot v)$$

Alors $E \times F$ muni des lois $+$ et $\cdot$ ainsi définies est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, que l'on nomme espace vectoriel produit de E et F.

Preuve :
Il faut tout d'abord démontrer que la loi $+$ définit sur $E \times F$ une structure de groupe commutatif.
Soient $(u,v),(u',v'),(u'',v'')$ appartenant à $E \times F$ et α,β appartenant à $\mathbb{K}$

1. La loi $+$ est commutative puisque l'on a
$$(u,v)+(u',v') = (u+u',v+v') = (u'+u,v'+v) = (u',v')+(u,v)$$
étant donné que les lois d'addition sur E et F sont des lois commutatives
2. La loi $+$ est associative car les lois d'addition de E et F le sont, en effet :
$$\begin{aligned}[(u,v)+(u',v')]+(u'',v'') &= (u+u',v+v')+(u''+v'') = ((u+u')+u'',(v+v')+v'') \\ &= (u+(u'+u''),v+(v'+v'')) = (u,v)+[(u',v')+(u'',v'')]\end{aligned}$$
3. La loi $+$ admet un élément neutre $0_{E\times F}$ qui est le couple $(0_E,0_F)$. En effet :
$$(u,v)+(0_E,0_F) = (u+0_E,v+0_F) = (u,v)$$
4. Chaque couple $(u,v) \in E \times F$ possède un symétrique qui est le couple $(-u,-v)$, en effet :
$$(u,v)+(-u,-v) = (u-v,u-v) = (0_E,0_F)$$
5. Il faut ensuite vérifier les propriétés de la loi externe.
$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\beta\cdot(u,v)) &= \alpha\cdot(\beta\cdot u,\beta\cdot v) = (\alpha\cdot(\beta\cdot u),\alpha\cdot(\beta\cdot v)) = ((\alpha\times\beta)\cdot u,(\alpha\times\beta)\cdot v) = (\alpha\times\beta)\cdot(u,v) \\ (\alpha+\beta)\cdot(u,v) &= ((\alpha+\beta)\cdot u,(\alpha+\beta)\cdot v) = (\alpha\cdot u+\beta\cdot u,\alpha\cdot v+\beta\cdot v) \\ &= (\alpha\cdot u,\alpha\cdot v)+(\beta\cdot u,\beta\cdot v) = \alpha\cdot(u,v)+\beta\cdot(u,v) \\ \alpha\cdot((u,v)+(u',v')) &= \alpha\cdot(u+u',v+v') = (\alpha\cdot(u+u'),\alpha\cdot(v+v')) = (\alpha\cdot u+\alpha\cdot u',\alpha\cdot v+\alpha\cdot v') \\ &= (\alpha\cdot u,\alpha\cdot v)+(\alpha\cdot u',\alpha\cdot v') = \alpha\cdot(u,v)+\alpha\cdot(u',v') \\ 1\cdot(u,v) &= (1\cdot u,1\cdot v) = (u,v)\end{aligned}$$
On en déduit que $E \times F$ est bien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

■

Corollaire 1
Soit $p \in \mathbb{N}^\times$, si $E_1,.,E_p$ désignent p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $E_1 \times \cdots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois

$$(x_1,..,x_p)+(x'_1,..,x'_p) \underset{\text{définition}}{=} (x_1+x'_1,..,x_p+x'_p), \quad \alpha\cdot(x_1,..,x_p) \underset{\text{définition}}{=} (\alpha\cdot x_1,..,\alpha\cdot x_p)$$

En particulier, pour $n \geqslant 1$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve :
On procède par récurrence sur p et, pour l'hérédité, il suffit d'appliquer la proposition précédente avec $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ et $F = E_{p+1}$. ■

Proposition 4 (Espace vectoriel des applications)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A un ensemble non vide. On note $\mathcal{F}(A,E)$ l'ensemble des applications de A dans E et pour $f,g \in \mathcal{F}(A,E)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
On définit la somme de deux telles applications ainsi que le produit d'un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ par une telle fonction par les formules suivantes :

$$f+g : \left\{\begin{array}{lll} A & \mapsto & E \\ x & \mapsto & f(x)+g(x)\end{array}\right. , \quad \alpha\cdot f : \left\{\begin{array}{lll} A & \mapsto & E \\ x & \mapsto & \alpha\cdot f(x)\end{array}\right.$$

Alors l'ensemble $\mathcal{F}(A,E)$ muni des lois $+$ et $\cdot$ ainsi définies est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve :
L'ensemble $\mathcal{F}(A,E)$ n'est pas vide car il contient la fonction $x \mapsto 0_E$.
Considérons $f,g,h \in \mathcal{F}(A,E)$ et $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$. On a, par commutativité et commutativité de $+$ dans E, :

$$\begin{aligned}\forall x \in A,\quad (f+g)(x) &= f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x) \Rightarrow f+g=g+f \\ ((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x)+h(x) = f(x)+g(x)+h(x) = f(x)+(g+h)(x) = (f+(g+h))(x) \Rightarrow (f+g)+h = f+(g+h)\end{aligned}$$

Notons $0_{\mathcal{F}(A,E)}$ la fonction de A dans E qui à $x\in A$ associe $0 \in E$, alors :

$$\forall x \in A,\quad (f+0_{\mathcal{F}(A,E)})(x) = f(x)+0_{\mathcal{F}(A,E)}(x) = f(x)+0_E = f(x) \Rightarrow f+0_{\mathcal{F}(A,E)} = f$$

Notons $-f$ la fonction de A dans E qui à $x\in A$ associe $-f(x)\in E$, alors :

$$\forall x \in A,\quad (f+(-f))(x) = f(x)+(-f)(x) = f(x)-f(x) = 0_E = 0_{\mathcal{F}(A,E)}(x) \Rightarrow f+0_{\mathcal{F}(A,E)} = f$$

ce qui montre $-f$ est l'opposé de f pour l'addition dans $\mathcal{F}(A,E)$.
Ainsi, $\mathcal{F}(A,E)$ est un groupe commutatif pour l'addition $+$. On doit ensuite vérifier les propriétés de la loi externe :

$$\begin{aligned}&\forall x \in A,\quad (\alpha\cdot(\beta\cdot f))(x) = \alpha\cdot(\beta\cdot f)(x) = \alpha\cdot(\beta\cdot f(x)) = (\alpha\times\beta)\cdot f(x) = ((\alpha\times\beta)\cdot f)(x)\\ &\quad \Rightarrow \alpha\cdot(\beta\cdot f) = (\alpha\times\beta)\cdot f\\ &\forall x \in A,\quad ((\alpha+\beta)\cdot f)(x) = (\alpha+\beta)\cdot f(x) = \alpha\cdot f(x)+\beta\cdot f(x) = (\alpha\cdot f+\beta\cdot f)(x)\\ &\quad \Rightarrow (\alpha+\beta)\cdot f = \alpha\cdot f+\beta\cdot f\\ &\forall x \in A,\quad (\alpha\cdot(f+g))(x) = \alpha\cdot(f+g)(x) = \alpha\cdot(f(x)+g(x)) = \alpha\cdot f(x)+\alpha\cdot g(x) = (\alpha\cdot f+\alpha\cdot g)(x)\\ &\quad \Rightarrow \alpha\cdot(f+g) = \alpha\cdot f+\alpha\cdot g\\ &\forall x \in A,\quad (1\cdot f)(x) = 1\cdot f(x) = f(x) \Rightarrow 1\cdot f = f\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{F}(A,E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. ■

Corollaire 2

1. *L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois suivantes*

$$\begin{aligned}\forall u &= (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\quad \forall v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\quad \forall \alpha\in\mathbb{K},\\ u+v &= w = (w_n)_n \text{ où } \forall n\in\mathbb{N},\quad w_n = u_n+v_n,\quad \alpha\cdot u = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ où } \forall n\in\mathbb{N},\quad z_n = \alpha\times u_n\end{aligned}$$

   En outre, deux suites $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales si et seulement $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=v_n$.

2. *Si D est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{F}(D,\mathbb{K})$, qui désigne l'ensemble des fonctions $x\mapsto f(x)$ de D dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Preuve :
Le point 2 est immédiat puisque $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour le premier point, on remarque qu'une suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement la donnée d'une application

$$u : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \to & \mathbb{K}\\ n & \mapsto & u_n\end{array}\right. \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$$

donc $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$. Par conséquent, puisque $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on en déduit que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est également un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En outre, deux applications étant égales si et seulement elles sont égales en tout point, ce qui donne la caractérisation de l'égalité de deux suites. ■

Définition 3 (Matrices)
Soient n et p deux nombres entiers non nuls. On appelle matrice à n lignes et p colonnes tout tableau rectangulaire constitué d'éléments de $\mathbb{K}$ comportant n lignes et p colonnes
L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Soit $A\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le coefficient situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $k^{\text{ème}}$ colonne se note $a_{i,j}$ et on écrit alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,,j} & \cdots & a_{1,p}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,,j} & \cdots & a_{2,p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p}\end{pmatrix}$$

ou encore $A = (a_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$. *Lorsque* $n = p$, *on note conventionnellement* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \underset{définition}{=} \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ *et les éléments de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *s'appellent les matrices carrées de taille* n.
On remarque alors que $\mathbb{K}^n = \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Corollaire 3
Soient n *et* p *deux nombres entiers non nuls. L'ensemble* $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel lorsqu'on le munit des lois*

$$\begin{aligned} \forall A &= (a_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \forall B = (b_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \\ A + B &= (c_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \text{ où } \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{i,,j} = a_{i,,j} + b_{i,,j} \\ \alpha \cdot A &= (d_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \text{ où } \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad d_{i,,j} = \alpha \times a_{i,,j} \end{aligned}$$

L'élément neutre pour l'addition de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *que l'on note* $0_{n,p}$, *est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.*
En outre, deux matrices $A = (a_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *et* $B = (b_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *de* $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *sont égales si et seulement*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad a_{i,,j} = b_{i,,j}$$

Preuve :
On remarque qu'une matrice $A = (a_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est simplement la donnée de l'application

$$A : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \to & \mathbb{K} \\ (i,j) & \mapsto & a_{i,j} \end{array} \right. \in \mathcal{F}([\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \mathbb{K})$$

donc $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathcal{F}([\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \mathbb{K})$ qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois $+$ et $\cdot$ définies ci-dessus puisque $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En outre, deux applications étant égales si et seulement elles sont égales en tout point, ce qui donne la caractérisation de l'égalité de deux matrices. ■

Remarque 2
Par définition de la somme de deux matrices et de la multiplication par un scalaire, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 4 (Sous-espace vectoriel)
Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* F *un sous-ensemble de* E.
On dit que F *est un sous-espace vectoriel de* E *si* F *est un* $\mathbb{K}$*-espace espace vectoriel et* $F \subset E$.

Proposition 5 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)
Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* F *un sous-ensemble de* E. *On a équivalence entre :*

1. F *est un sous-espace vectoriel de* E;
2. F *est non vide et quels que soient* $u, v \in F$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, *on a* $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in F$ *(stabilité par combinaison linéaire)*

Preuve :
(1) $\Rightarrow$ (2) : Supposons que F est un sous-espace vectoriel de E. Alors, par définition, F est non vide. Soient $u, v \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a alors $\alpha \cdot u \in F$ et $\beta \cdot v \in F$ (produit d'un élément de F par un scalaire) et $(\alpha \cdot u) + (\beta \cdot v) \in F$ (somme de deux éléments de F). Ainsi $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in F$.
(2) $\Rightarrow$ (1) : Supposons F non vide et $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in F$ quels que soient $u, v \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Ainsi, quels que soient $u, v \in F$,

- en choisissant $\alpha = \beta = 1$, on obtient que $u + v = 1 \cdot u + 1 \cdot v \in F$ donc la loi $+$ est bien une loi de composition interne pour F.
  En outre, comme l'addition est associative et commutative sur E, elle est encore associative et commutative sur $F \subset E$.
- en choisissant $\beta = 0_{\mathbb{K}}$, on obtient que $\alpha \cdot u = \alpha \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot v \in F$ donc la loi $\cdot$ est bien une loi de composition externe sur F.
  En outre, $0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot u \in F$ et comme $u + 0_E = u$, on en déduit que 0_E est un élément neutre pour l'addition sur F.
- en choisissant $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et $u = v$, on obtient $(-1) \cdot u + u = 0_E \in F$ donc $(-1) \cdot u$, qui est un élément de F d'après la ligne précédente, est un opposé de u pour la loi $+$ donc tout élément de F admet bien un opposé pour l'addition $+$.

- Les propriétés

$$\alpha\cdot(\beta\cdot u)=(\alpha\times\beta)\cdot u,\quad(\alpha+\beta)\cdot u=\alpha\cdot u\oplus\beta\cdot u,\quad 1\cdot u=u,\quad \alpha\cdot(u+v)=\alpha\cdot u\oplus\alpha\cdot v$$

  étant valable sur E, elles restent valables sur $F\subset E$

Par conséquent, F est bien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel contenu dans E donc F est sous-espace vectoriel de E. Remarquons que 0_E étant un élément neutre pour l'addition sur F et que l'élément neutre étant unique, on en déduit que $0_F=0_E$. ■

Remarque 3
D'après ce qui précède, un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E contient nécessairement 0_E qui est son élément neutre pour l'addition.
Un espace vectoriel E possède toujours deux sous-espaces vectoriels particuliers : l'espace E tout entier et $\{0_E\}$ (sous-espace nul).

Définition 5 (Fonctions polynômes)
Soit $n\in\mathbb{N}$, on note

- $\mathbb{K}_n[x]=\{P\in\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ *pour lesquelles il existe* $(a_0,..,a_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$ *tel que* $\forall x\in\mathbb{K},\quad P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\}$.
- $\mathbb{K}[x]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{K}_n[x]$.

Un élément de $\mathbb{K}_n[x]$ s'appelle une fonction polynôme de degré au plus n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et un élément de $\mathbb{K}[x]$ s'appelle une fonction polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Si $P\in\mathbb{K}_n[x]$, alors il existe $(a_0,..,a_n)\in\mathbb{K}^{n+1},\quad\forall x\in\mathbb{K},\quad P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ et a_k s'appelle le coefficient de degré k de P.
La fonction polynôme nulle est la fonction $P:x\mapsto 0_{\mathbb{K}}$.
Il est immédiat que $\mathbb{K}_n[x]\subset\mathbb{K}_m[x]\subset\mathbb{K}[x]$ lorsque $n\leqslant m$.

Proposition 6
Les ensembles $\mathbb{K}_n[x]$ et $\mathbb{K}[x]$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Preuve :

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrons que $\mathbb{K}_n[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$.
   - $\mathbb{K}_n[x]\subset\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$
   - $\mathbb{K}_n[x]$ car $P:x\mapsto 0_{\mathbb{K}}\in\mathbb{K}[x]$.
   - Soient $P,Q\in\mathbb{K}_n[x]$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, montrons que $\alpha P+\beta Q\in\mathbb{K}_n[x]$. Puisque P,Q appartiennent à $\mathbb{K}_n[x]$, il existe $(a_0,..,a_n)$ et $(b_0,.,b_n)$ appartenant à $\mathbb{K}^{n+1}$ tels que

$$\begin{aligned}\forall x\quad\in\quad\mathbb{K},\quad P(x)&=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k,\quad Q(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kx^k\\ \Rightarrow\quad\forall x\in\mathbb{K},\quad(\alpha P+\beta Q)(x)&=\alpha P(x)+\beta Q(x)=\alpha\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+\beta\sum_{k=0}^{n}b_kx^k=\sum_{k=0}^{n}(\alpha a_k+\beta b_k)x^k\end{aligned}$$

     donc $\alpha P+\beta Q\in\mathbb{K}_n[x]$.

   Par conséquent, $\mathbb{K}_n[x]$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ donc $\mathbb{K}_n[x]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. Montrons que $\mathbb{K}[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$.
   - $\mathbb{K}[x]\subset\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$
   - $\mathbb{K}[x]$ car $P:x\mapsto 0_{\mathbb{K}}\in\mathbb{K}[x]$.
   - Soient $P,Q\in\mathbb{K}[x]$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, montrons que $\alpha P+\beta Q\in\mathbb{K}[x]$. Il existe deux entiers n et m tels que $P\in\mathbb{K}_n[x]$ et $Q\in\mathbb{K}_m[x]$. En notant $N=\max(n,m)$, on a $n\leqslant N$ et $m\leqslant B$ donc $\mathbb{K}_n[x]$ et $\mathbb{K}_m[x]$ qui sont contenus dans $\mathbb{K}_N[x]$. Par conséquent, P et Q appartiennent à $\mathbb{K}_N[x]$ et $\mathbb{K}_N[x]$ étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on a $\alpha P+\beta Q\in\mathbb{K}_N[x]\subset\mathbb{K}[x]$.
     Par conséquent, $\mathbb{K}[x]$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ donc $\mathbb{K}[x]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

■

Méthode 1 (Montrer qu'un ensemble F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel)

1. *Déterminer un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E « classique » contenant F ($\mathbb{K}^n$, $\mathcal{F}(A,V)$ avec V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, etc.)*
2. *Montrer que F est non vide en montrant qu'il contient 0_E;*
3. *Montrer que pour tous $u, v \in F$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in F$.*
Alors F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, c'est donc lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 1
Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

$$A = \{(x,y,z)) \in \mathbb{K}^3 \quad / \quad x - y + z = 0\} \qquad B = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad / \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = f(x)\}$$
$$C = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \quad / \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + u_n = 0\} \qquad D = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & -a \end{pmatrix}, \quad (a,b) \in \mathbb{K}^2\}$$
$$E = \{P \in \mathbb{K}_2[x] \text{ pour lesquels il existe } (a,b) \in \mathbb{K}^2 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = ax^2 + b, \quad (a,b) \in \mathbb{K}^2$$

Solution 1

1.
   - $A \subset \mathbb{K}^3$ qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
   - $A \neq \emptyset$ puisque $0_{\mathbb{K}^3} = (0,0,0) \in A$ car $0 - 0 + 0 = 0$.
   - Soient $X, Y \in A$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha X + \beta Y \in A$. Puisque l'on a $X = (x,y,z)$ avec $x - y + z = 0$ et $Y = (x',y',z')$ avec $x' - y' + z' = 0$, on obtient
   $$\begin{aligned} \alpha X + \beta Y &= \alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \\ (\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z') &= \alpha(x - y + z) + \beta(x' - y' + z') = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0 \end{aligned}$$
   ce qui montre que $\alpha X + \beta Y \in A$.

   Par conséquent, A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ donc A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.
   - $B \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ qui est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel,
   - $B \neq \emptyset$ puisque $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})} : x \mapsto 0 \in B$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})}(x+1) = 0$ et $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})}(x) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})}(x+1) = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})}(x)$.
   - Soient $f, g \in B$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha f + \beta g \in B$. Puisque l'on a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = f(x)$ et $g(x+1) = g(x)$, on obtient
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\alpha f + \beta g)(x+1) = \alpha f(x+1) + \beta g(x+1) = \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x)$$
   ce qui montre que $\alpha f + \beta g \in B$.

   Par conséquent, B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ donc B est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

3.
   - $C \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
   - $C \neq \emptyset$ puisque $0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ car $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}})_{n+2} + (0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}})_n = 0 + 0 = 0$.
   - Soient $u, v \in C$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha u + \beta v \in C$. Puisque l'on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + u_n$ et $v_{n+2} + v_n = 0$, on obtient
   $$\forall x \in \mathbb{N}, \quad (\alpha u + \beta v)_{n+2} + (\alpha u + \beta v)_n = \alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2} + \alpha u_n + \beta v_n = \alpha\,(u_{n+2} + u_n) + \beta\,(v_{n+2} + v_n) = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$$
   ce qui montre que $\alpha u + \beta v \in C$.

   Par conséquent, C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ donc C est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

4.
   - $D \subset \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
   - $D \neq \emptyset$ puisque $0_{\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in D$ car $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & -a \end{pmatrix}$ si l'on choisit $a = 0$ et $b = 0$.
   - Soient $M, N \in D$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha M + \beta N \in D$. Puisque l'on a $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & -a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 2b' & -a' \end{pmatrix}$, on obtient
   $$\alpha M + \beta N = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & -a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & b' \\ 2b' & -a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + \beta a' & b\alpha + \beta b' \\ 2(b\alpha + \beta b') & -(a\alpha + \beta a') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 2c & -d \end{pmatrix}$$
   si l'on choisit $c = a\alpha + \beta a'$ et $d = b\alpha + \beta b'$, ce qui montre que $\alpha X + \beta Y \in D$.

   Par conséquent, D est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ donc D est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

5.
- $E \subset \mathbb{K}_2[x]$ qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
- $E \neq \emptyset$ puisque $0_{\mathbb{K}_2[x]} : x \mapsto 0 \in E$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0_{\mathbb{K}_2[x]}(x) = 0 \times x^2 + 0$ (on choisit $a = b = 0$).
- Soient $P, Q \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha P + \beta Q \in E$. Puisqu'il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $(a', b') \in \mathbb{K}^2$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^2 + b \quad \text{et} \quad Q(x) = a'x^2 + b',$$
on obtient
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\alpha P + \beta Q)(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) = \alpha \left(ax^2 + b\right) + \beta \left(a'x^2 + b'\right) = (\alpha a + \beta a')\, x^2 + (\alpha b + \beta b') = cx^2 + d$$
si l'on choisit $c = \alpha a + \beta a'$ et $d = \alpha b + \beta b'$, ce qui montre que $\alpha P + \beta Q \in E$.

Par conséquent, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_2[x]$ donc E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 7
Soient $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ deux éléments de $\mathbb{K}_n[x]$.
Alors $P = Q$ si et seulement si $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k = b_k$.

Preuve :
L'implication réciproque est évidente. En effet, si $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k = b_k$ alors
$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = Q(x)$$
donc $P = Q$.
Montrons l'implication directe : Supposons que
$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{K}, \quad a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$
Montrons que récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = b_k$. On considère l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}(p)$: « $\forall p \in [\![0, k]\!], \quad a_p = b_p$ »
Initialisation $k = 0$: En substituant $x = 0$ dans l'égalité $P(x) = Q(x)$, on obtient $a_0 = b_0$, ce qui démontre $\mathcal{H}(0)$.
Hérédité : Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que $\mathcal{H}(k)$ est vraie et montrons $\mathcal{H}(k+1)$. Puisque $\forall p \in [\![0, k]\!], \quad a_p = b_p$ et que $\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = Q(x)$, on obtient
$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad a_n x^n + \cdots + a_{k+1} x^{k+1} = b_n x^n + \cdots + b_{k+1} x^{k+1}$$
Lorsque $x \neq 0$, en divisant par x^{k+1}, on obtient
$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad a_n x^{n-(k+1)} + \cdots + a_{k+1} = b_n x^{n-(k+1)} + \cdots + b_{k+1}$$
En choisissant $x \in \mathbb{R}$ (ce qui est possible car $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et en faisant tendre x vers 0, on obtient $a_{k+1} = b_{k+1}$ donc $\forall p \in [\![0, k+1]\!], \quad a_p = b_p$, ce qui démontre $\mathcal{H}(k+1)$ et achève la récurrence.
Par conséquent, $\mathcal{H}(n)$ est vraie, i.e. $\forall p \in [\![0, n]\!], \quad a_p = b_p$ ■

1.4 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Proposition 8 (Intersection de deux sous-espaces vectoriels)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve :

- Il est immédiat que $F \cap G \subset E$ qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $F \cap G \neq \emptyset$ car; puisque 0_E appartient à F et à G (ce sont des sous-espaces vectoriels de E !), on en déduit que $0_E \in F \cap G$.
- Soient $u, v \in F \cap G$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in F \cap G$. Puisque $u, v \in F$ (resp. G) et que F (resp. G) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on en déduit que $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in F$ (resp. G) donc $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in F \cap G$.

Par conséquent, $F \cap G$ est bien un sous-espace vectoriel de E. ■

Proposition 9 (Intersection d'une famille finie de sous-espaces vectoriels)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, I un ensemble non vide (fini ou infini) $(F_i)_{i \in I}$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve :

- Puisque $\forall i \in I, \quad F_i \subset E$, on en déduit que $\bigcap_{i\in I} F_i \subset E$.
- $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ car $0_E \in \bigcap_{i\in I} F_i$ puisque $\forall i \in I, \quad 0_E \in F_i$ (ce sont des sous-espaces vectoriels de E !)
- Soient $u, v \in \bigcap_{i\in I} F_i$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in \bigcap_{i\in I} F_i$. Puisque $\forall i \in I, \quad u, v \in F_i$ et que F_i est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on en déduit que $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in F_i$ et ce quel que soit i donc $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in \bigcap_{i\in I} F_i$.

Par conséquent, $\bigcap_{i\in I} F_i$ est bien un sous-espace vectoriel de E. ■

Remarque 4 (Z)
En général, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, le sous-ensemble $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E (sauf si $F \subset G$ ou $G \subset F$)..

1.5 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition 6
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, ., u_p$ des vecteurs de E.

1. *On dit qu'un vecteur $u \in E$ est combinaison linéaire de $u_1, .., u_p$ si et seulement si il existe $\alpha_1, .., \alpha_p \in \mathbb{K}$ tels que $u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p$.*
2. *On note $\mathrm{Vect}(u_1, .., u_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, .., u_p$, autrement dit*
$$\mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p) = \{\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p \quad / \quad \alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbb{K}\}$$
En particulier, $\mathrm{Vect}(u) = \{\alpha \cdot u, \quad \alpha \in \mathbb{K}\}$.

Remarque 5
Etant donné que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que $u_1, .., u_p$, on est assuré que $\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p \in E$ donc $\mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p)$ est un sous-ensemble de E.

Proposition 10 (Sous-espace vectoriel engendré)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, ..., u_p \in E$.
Alors $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E et c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, ..., u_p$.

Preuve :
Posons $F = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p)$ et montrons que F est un sous-espace vectoriel de E.

- $F \subset E$
- $F \neq \emptyset$ car $0_E = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_p \in F$.
- Soient $u, v \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Par définition de F, il existe $\alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbb{K}$ et $\beta_1, ..., \beta_p \in \mathbb{K}$ tels que :
$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p, \quad v = \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_p \cdot u_p$$
On en déduit que
$$\alpha \cdot u + \beta \cdot v = \alpha \cdot (\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p) + \beta \cdot (\beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_p \cdot u_p) = (\alpha \times \alpha_1 + \beta \times \beta_1) \cdot u_1 + \cdots + (\alpha \times \alpha_p + \beta \times \beta_p) \cdot u_p$$
et ceci montre que $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in F$.

Par conséquent, F est un sous-espace vectoriel de E.
Montrons que c'est le plus petit. Soit G un sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, ., u_p$. Il contient alors nécessairement $\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p$ quels que soient les scalaires $\alpha_1, .., \alpha_p \in \mathbb{K}$ donc $\mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p) \subset G$. ■

Exemple 2
On considère les fonctions :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(2x) \end{array} \right. , \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array} \right. , \quad h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos^2(x) \end{array} \right.$$

Montrer que $h \in \mathrm{Vect}(f, g)$.

Solution 2
On a $f = 2h - g$ donc $f \in \mathrm{Vect}(f, g)$.

Méthode 2
Soit F un sous-ensemble d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour montrer que F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,

- *soit on montre que c'est un sous-espace vectoriel de E,*
- *soit on détermine une famille $u_1, .., u_p$ de F telle $F = \mathrm{Vect}(u_1, .., u_p)$ et on conclut en remarquant que $\mathrm{Vect}(u_1, .., u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Exemple 3
Montrer que

1. $E = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & -a \end{pmatrix}, \quad (a, b) \in \mathbb{K}^2\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. $F = \{x \mapsto (a + 2c)e^x + (a + b + c)x^2 + c, \quad (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Solution 3

1. Il est immédiat que $E \subset \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En outre, l'égalité

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

entraine l'égalité ensembliste

$$E = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & -a \end{pmatrix}, \quad (a, b) \in \mathbb{K}^2\} = \{a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (a, b) \in \mathbb{K}^2\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

donc E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. Il est immédiat que $F \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. En outre, l'identité

$$(a + 2c)e^x + (a + b + c)x^2 + c = a(e^x + x^2) + bx^2 + c(2e^x + x^2 + 1)$$

entraine l'égalité ensembliste

$$\begin{aligned} E &= \{x \mapsto (a + 2c)e^x + (a + b + c)x^2 + c, \quad (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\} = \{x \mapsto a(e^x + x^2) + bx^2 + c(2e^x + x^2 + 1), \quad (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(x \mapsto e^x + x^2, x \mapsto x^2, x \mapsto 2e^x + x^2 + 1\right) \end{aligned}$$

donc E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

Définition 7
Soit E un espace vectoriel. On dit que $u_1, .., u_p$ est une famille génératrice de E si et seulement si $E = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p)$

Proposition 11

1. *La famille $e_1 = (1, 0, .., 0), .., e_k = \underbrace{(0, .., 0, 1, 0, .., 0)}_{1 \text{ en } k\text{-ième position}}, ..., e_n = (0, .., 0, 1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$.*
2. *La famille $e_1 : x \mapsto x^n, .., e_i : x \mapsto x^k, ..., e_n : x \mapsto x^n$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$.*
3. *Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.*
   La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une famille génératrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Preuve :
Il est immédiat que

$$\begin{aligned}
u &\in \mathbb{K}^n \Leftrightarrow u=(x_1,..,x_n) \quad x_1,..,x_n \in \mathbb{K}\\
&\Leftrightarrow u = x_1(1,0,..,0)+\cdots+x_i\underbrace{(0,..,0,1,0,..,0)}_{1 \text{ en } k\text{-ième position}}+\cdots+x_n(0,..,0,1) \quad x_1,..,x_n\in\mathbb{K} \Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}(e_1,..,e_n)\\
&\Rightarrow \mathbb{K}^n = \mathrm{Vect}((1,0,..,0),\cdots,\underbrace{(0,..,0,1,0,..,0)}_{1 \text{ en } k\text{-ième position}},..,(0,..,0,1))\\
P &\in \mathbb{K}_n[x] \Leftrightarrow P : x\mapsto a_nx^n+\cdots+a_0 \quad a_n,..,a_0\in\mathbb{K}\\
&\Leftrightarrow P = a_n(x\mapsto x^n)+\cdots a_k(x\mapsto x^k)+\cdots+a_0(x\mapsto 1) \quad a_n,..,a_0\in\mathbb{K}\\
&\Rightarrow \mathbb{K}_n[x] = \mathrm{Vect}((x\mapsto x^n),..,(x\mapsto x^k),..,(x\mapsto 1))
\end{aligned}$$

Pour $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on en traite que le cas $n=p=2$, les autres étant absolument semblables (sauf que l'écriture est plus aride).

$$\begin{aligned}
M &\in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \Leftrightarrow M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \quad a,b,c,d\in\mathbb{K} \Leftrightarrow M = a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \quad a,b,c,d\in\mathbb{K}\\
&\Rightarrow \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

■

Méthode 3 (Déterminer une famille génératrice d'un espace vectoriel)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E (éventuellement égal à E).

- *Si F est défini par la forme des paramètres composant les vecteurs le constituant, écrire ces vecteurs comme combinaison linéaire de vecteurs $u_1,.,u_p$, chacun étant pondéré par un seul de ces paramètres pour en déduire que $F\subset \mathrm{Vect}(u_1,.,u_p)$. Ensuite, vérifier que $u_1,..,u_p\in F$ pour obtenir $\mathrm{Vect}(u_1,.,u_p)\subset F$.*
- *Si F est défini par des équations vérifiées par les vecteurs le composant, considérer un vecteur u de F et l'écrire sous forme explicite faisant intervenir différents paramètres dans $\mathbb{K}$. A l'aide des équations vérifiées par u,*
  - *obtenir un système d'équations portant sur ces paramètres,*
  - *le résoudre en fonction de certains paramètres auxiliaires,*
  - *réinjecter les solutions du système « dans u » pour obtenir F comme ensemble défini par la forme des paramètres composant les vecteurs le constituant, ce qui ramène au cas précédent.*

Exemple 4
Montrer que chacun des ensembles suiOn admet que les ensembles suivants sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Donner, pour chacun d'eux, une famille génératrice.

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{\begin{pmatrix} a & a+b & c\\ c-a & b+c & b\end{pmatrix}, \quad (a,b,c)\in\mathbb{K}^3\} \quad E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{K}^4 \quad / \quad x-y+z=0\}\\
E_3 &= \{t\mapsto a\cos(t+b), \quad (a,b)\in\mathbb{R}^2\} \quad E_4=\{P\in\mathbb{K}_3[x], \quad P(1)=P(-1)=P'(1)=0\}
\end{aligned}$$

Solution 4

- En remarquant que
$$\begin{pmatrix} a & a+b & c\\ c-a & b+c & b\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$
on obtient $E_1=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\right)$.
- Soit $X=(x,y,z)\in E_2$, on a $x-y+z=0\Leftrightarrow y=x+z$, ce qui entraine que
$$X=(x,x+z,z)=x(1,1,0)+z(0,1,1)\in\mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,1)$$
donc $E_2\subset\mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,1)$. Réciproquement, puisque $(1,1,0)\in E_2$ $(1-1+0=0)$ et $(0,1,1)\in E_2$ $(0-1+1=0)$, on en déduit que $\mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,1)\subset E_2$ d'où $E_2=\mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,1)$.
- Soit $f\in E_3$,
$$f:t\mapsto a\cos(t+b)=a\cos(b)\cos(t)-a\sin(b)\sin(t)\Rightarrow f=a\cos(b)(t\mapsto\cos(t))-a\sin(b)(t\mapsto\sin(t))\in\mathrm{Vect}(t\mapsto\cos t,t\mapsto\sin t)$$
donc $E_3\subset\mathrm{Vect}(t\mapsto\cos t,t\mapsto\sin t)$. Réciproquement, $t\mapsto\cos(t)\in E_3$ (prendre $a=1,b=0$) et $t\mapsto\sin(t)\in E_3$ (prendre $a=1,b=\dfrac{\pi}{2}$) donc $\mathrm{Vect}(t\mapsto\cos t,t\mapsto\sin t)\subset E_3$, ce qui montre l'égalité $E_3=\mathrm{Vect}(t\mapsto\cos t,t\mapsto\sin t)$.

- Soit $P \in E_4$. On a $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ donc

$$\left\{\begin{array}{l} P(1)=0 \\ P(-1)=0 \\ P'(1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b+c+d=0 \\ -a+b-c+d=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} a+b+c+d=0 & \\ b+d=0 & (2)+(1) \\ -b-2c-3d=0 & (3)-3(1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} a+b+c+d=0 & \\ b+d=0 & \\ -2c-2d=0 & (3)+(2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=d \\ b=-d \\ c=-d \end{array}\right. \Rightarrow P : x \mapsto dx^3 - dx^2 - dx + d = d\left(x^3 - x^2 - x + 1\right) \in \text{Vect}(x \mapsto x^3 - x^2 - x + 1)$$

donc $E_4 \subset \text{Vect}(x \mapsto x^3 - x^2 - x + 1)$. Réciproquement, $P_1 : x \mapsto x^3 - x^2 - x + 1 \in E_4$ (car $P_1(0) = P_1(1) = P'(1) = 0$) donc $\text{Vect}(x \mapsto x^3 - x^2 - x + 1) \subset E_4$, ce qui montre l'égalité $E_4 = \text{Vect}(x \mapsto x^3 - x^2 - x + 1)$.

Si un espace vectoriel E admet une famille génératrice, celle ci n'est pas nécessairement unique. Pour s'en convaincre, pour l'espace E_2 de l'exercice précédent, lors de la résolution de l'équation $x - y + z = 0$, si l'on avait choisi $z = y - x$, on aurait obtenue $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, 1)$ pour famille génératrice. Une question naturelle apparait : est-il possible de comparer deux ensembles $\text{Vect}(u_1, .., u_p)$ et $\text{Vect}(v_1, .., v_q)$? Si c'est à dire existe-t-il un moyen simple permet de savoir s'ils sont égaux ou, plus généralement, si l'un est contenu dans l'autre uniquement en comparant les vecteurs $u_1, .., u_p$ aux vecteurs $v_1, .., v_q$. La proposition suivante répond à cette interrogation.

Proposition 12
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u_1, .., u_p, v_1, .., v_q$ des vecteurs de E. Alors

1. $\text{Vect}(u_1, .., u_p) \subset \text{Vect}(v_1, .., v_q)$ *si et seulement* $(\forall k \in [\![1, p]\!],\ u_k \in \text{Vect}(v_1, .., v_q))$.
2. $\text{Vect}(u_1, .., u_p) = \text{Vect}(v_1, .., v_q)$ *si et seulement* $(\forall k \in [\![1, p]\!],\ u_k \in \text{Vect}(v_1, .., v_q)$ *et* $\forall k \in [\![1, q]\!],\ v_k \in \text{Vect}(u_1, .., u_p)$.
3. *Si* $u_{p+1} \in \text{Vect}(u_1, .., u_p)$ *alors* $\text{Vect}(u_1, .., u_{p+1}) = \text{Vect}(u_1, .., u_p)$.

Preuve :
Le point 2 est la conséquence immédiate du 1 et le point 3 est la conséquence immédiate du 2.
Pour le premier point, l'implication directe est immédiate puisque $\forall k \in [\![1, p]\!],\ u_k \in \text{Vect}(u_1, .., u_p) \subset \text{Vect}(v_1, .., v_q)$.
Pour l'implication réciproque. Supposons que $\forall k \in [\![1, p]\!],\ u_k \in \text{Vect}(v_1, .., v_q)$. Puisque $\text{Vect}(v_1, .., v_q)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, ., u_p$ et que $\text{Vect}(u_1, .., u_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel les contenant, on en déduit que $\text{Vect}(u_1, .., u_p) \subset \text{Vect}(v_1, .., v_q)$. ■

Remarque 6
Cette proposition permet de comparer deux espaces engendrés mais il permet également de diminuer le nombre de générateurs.

Exemple 5
Montrer les égalités suivantes :

1. $E = \mathbb{K}^2, \quad \text{Vect}((2, 2), (0, 1), (1, 2), (1, 0)) = \text{Vect}((1, 1), (1, -1))$
2. $E = \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}), \quad \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

Solution 5
On procède par double inclusion

1. On note $F = \text{Vect}((2, 2), (0, 1), (1, 2), (1, 0))$ et $G = \text{Vect}((1, 1), (1, -1))$.
   Montrons que $F \subset G$. Il est immédiat que

$$(2, 2) = 2(1, 1) \in G, \quad (0, 1) = \frac{1}{2}(1, 1) - \frac{1}{2}(1, -1) \in G, \quad (1, 0) = \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1) \in G$$

Pour le dernier vecteur, si l'on ne voit pas la combinaison « de tête », on procède par résolution de système

$$(1, 2) = a(1, 1) + b(1, -1) \Leftrightarrow (1, 2) = (a + b, a - b) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b=1 \\ a-b=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} a=\dfrac{3}{2} & (1)+(2) \\ b=-\dfrac{1}{2} & (1)-(2) \end{array}\right.$$

donc $(1, 2) = \frac{3}{2}(1, 1) - \frac{1}{2}(1, -1) \in G$, ce qui montre que $F \subset G$. Montrons l'inclusion réciproque $G \subset F$. Il est immédiat que

$$(1, 1) = (1, 0) + (0, 1) \in G, \quad (1, -1) = (1, 0) - (0, 1) \in G$$

donc $G \subset F$, ce qui montre que $F = G$.

2. On note $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$.
   Montrons que $F \subset G$. Il est immédiat que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \in G, \quad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \in G\\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \in G\end{aligned}$$

   donc $F \subset G$. Montrons l'inclusion réciproque $G \subset F$. Il est immédiat que

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \in G, \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \in G$$

   Pour le dernier vecteur, si l'on ne voit pas la combinaison « de tête », on procède par résolution de système

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} &= a\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b+c & a+2b+c\\ a+b+2c & -a-b-c\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+b+c=1\\ a+2b+c=0\\ a+b+2c=0\\ -a-b-c=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cc} a+b+c=1 & \\ a+2b+c=0 & (2)-(1)\\ a+b+2c=0 & (3)-(1)\\ -a-b-c=-1 & (4)+(1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=3\\ b=-1\\ c=-1\end{array}\right.\\ &\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} \in G\end{aligned}$$

   donc $G \subset F$, ce qui montre que $F = G$.

Exemple 6
On note $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (1, 1)$, $u_3 = (2, 1)$, $u_4 = (1, -1)$.
Déterminer une famille génératrice de $\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3, u_4)$ de cardinal minimal

Solution 6
On remarque que

$$u_1 + u_3 = 3u_2 \Leftrightarrow u_2 = \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_3 \in \mathrm{Vect}\,(u_1, u_3) \quad u_4 = u_3 - u_1 \in \mathrm{Vect}\,(u_1, u_3)$$

donc $\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3, u_4) = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_3)$. Par contre, $u_1 \notin \mathrm{Vect}(u_3)$ (u_1 n'est pas proportionnel à u_3) et $u_3 \notin \mathrm{Vect}(u_1)$ (u_3 n'est pas proportionnel à u_1) donc on ne peut plus simplifier. Par conséquent, u_1, u_3 est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3, u_4)$ de cardinal minimal.

Définition 8
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E.

- *On appelle espace engendré par A l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A et l'on note cet ensemble* $\mathrm{Vect}(A)$. *Autrement dit, si $(F_i)_{i\in I}$ désigne la famille des sous-espaces vectoriels de E contenant A, on a* $\mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{i\in I} F_i$.
- *On dit que A est une partie génératrice de E si et seulement si* $\mathrm{Vect}(A) = E$.

Remarque 7
Si $A = \{u_1, .., u_p\}$ alors $\mathrm{Vect}(\{u_1, ..., u_p\}) = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p)$. En effet, soit F_i un sous-espace vectoriel de E contenant A, il contient donc $u_1, .., u_p$. Or $\mathrm{Vect}(u_1, .., u_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, .., u_p$, ce qui entraine que $\mathrm{Vect}(u_1, .., u_p) \subset F_i$ et ce quel que soit i donc $\mathrm{Vect}(u_1, .., u_p) \subset \bigcap_{i\in I} F_i = \mathrm{Vect}(\{u_1, ..., u_p\})$. Réciproquement, puisque $\mathrm{Vect}(u_1, .., u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $A = \{u_1, .., u_p\}$, $\mathrm{Vect}(u_1, .., u_p)$ est l'un de ces $F_{i(0)}$ donc l'intersection $\mathrm{Vect}(\{u_1, ..., u_p\}) = \bigcap_{i\in I} F_i$ est contenue dans $F_{i(0)} = \mathrm{Vect}(u_1, .., u_p)$, ce qui entraine l'égalité ensembliste $\mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p) = \mathrm{Vect}(\{u_1, ..., u_p\})$.

Proposition 13 (Sous-espace vectoriel engendré par une partie)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E.
Alors $\mathrm{Vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.*

1.6 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Proposition 14 (Somme de deux sous-espaces vectoriels)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G des sous-espaces vectoriels de E. On note :

$$F + G = \{u_F + u_G \quad / \quad u_F \in F \text{ et } u_G \in G\}$$

Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant à la fois F et G.

Preuve :

1. - $F + G \subset E$. En effet, si $x \in F + G$ alors $x = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$. Puisque F et G sont contenus dans E, on a u_F et u_G qui appartiennent à E donc $x = u_F + u_G \in E$, ce qui montre l'inclusion $F + G \subset E$.
   - $F + G \neq \emptyset$ car $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F + G$ (F et G sont des sous-espaces vectoriels de E donc ils contiennent 0_E).
   - Soient $u, v \in F + G$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in F + G$. Il existe $u_F, v_F \in F$ et $u_G, v_G \in G$ tels que $u = u_F + u_G$ et $v = v_F + v_G$ donc

     $$\alpha \cdot u + \beta \cdot v = \alpha \cdot (u_F + u_G) + \beta \cdot (v_F + v_G) = (\alpha \cdot u_F + \beta \cdot v_F) + (\alpha \cdot u_G + \beta \cdot v_G)$$

     Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a $\alpha \cdot u_F + \beta \cdot v_F \in F$ et $\alpha \cdot u_G + \beta \cdot v_G \in G$ donc $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in F + G$.

   Par conséquent, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit H un sous-espace vectoriel de E contenant F et G. Soit $x \in F + G$, l existe $u_F \in F$ et $u_G \in G$ tel que $u = u_F + u_G$. Puisque $F \subset H$ et $G \subset H$, on en déduit que u_F et u_G appartiennent à H donc $x = u_F + u_G$ aussi, ce qui montre que $F + G \subset H$. Par conséquent, $F + G$ est bien le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant à la fois F et G.

■

Méthode 4 (Montrer que E=F+G)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Pour montrer que $E = F + G$, on procède de la façon suivante.

- *Remarquer que les inclusions $F \subset E$ et $G \subset E$ entraine que $F + G \subset E$.*
- *Montrer l'inclusion réciproque $E \subset F + G$ en procédant par analyse-synthèse.*
  - *Analyse : Considérer un élément u, quelconque dans E et supposer qu'il s'écrit $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$. Calculer alors l'expression de l'un des vecteurs u_F ou u_G en fonction de u et en déduire l'autre grâce à l'égalité $u = u_F + u_G$.*
  - *Synthèse : Considérer un élément u quelconque dans E et choisir pour u_F et u_G les expressions obtenues précédemment puis vérifier que l'on a bien $u = u_F + u_G$, $u_F \in G$ et $u_G \in G$ et conclure.*

Exemple 7
On pose :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \quad | \quad a + b + c + d = 0 \right\} \quad G = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad | \quad \alpha \in \mathbb{K}\}$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ et que, pour une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ quelconque, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $A - \alpha U \in F$. En déduire que $F + G = \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$.

Solution 7
<u>F est un espace vectoriel</u> :

- $F \subset \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $F \neq \emptyset$ car $0_{\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$ puisque $0 + 0 + 0 + 0 = 0$.

- Soient $M; N \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha M + \beta N \in F$. Par définition, on a : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a+b+c+d=0$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ avec $a'+b'+c'+d'=0$. On en déduit que $\alpha M + \beta N = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + d'\beta \end{pmatrix}$ avec

$$(\alpha a + \beta a') + (\alpha b + \beta b') + (\alpha c + \beta c') + (\alpha d + d'\beta) = \alpha\,(a+b+c+d) + \beta(a'+b'+c'+d') = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$$

ce qui entraine que $\alpha M + \beta N \in F$.

Par conséquent, F est un sous-espace de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ donc F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
G est un espace vectoriel :

- $G \subset \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $G \neq \emptyset$ car $0_{\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})} = 0 \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in F$.
- Soient $M; N \in G$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha M + \beta N \in F$. Par définition, on a : $M = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{K}$ et $N = a' \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a' \in \mathbb{K}$. On en déduit que $\alpha M + \beta N = (\alpha a + \beta a') \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

Par conséquent, G est un sous-espace de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ donc G est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$F + G = \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$: On procède par double inclusion.

- $F + G \subset \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$. Puisque F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$, on a bien $F + G \subset \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$.
- $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \subset F + G$. Soit $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$, montrons qu'il existe $M_F \in F$ et $M_G \in G$ tels que $M = M_F + M_G$.
Analyse : Supposons que l'égalité précédente soit vérifiée. On a : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $M_F = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ avec $a'+b'+c'+d'=0$ et $M_G = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui nous donne

$$M = M_F + M_G \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'+\alpha & b'+\alpha \\ c'+\alpha & d'+\alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a'+\alpha = a \\ b'+\alpha = b \\ c'+\alpha = c \\ d'+\alpha = d \end{cases}$$

En exprimant a', b', c', d' en fonction de a, b, c, d, α et en réinjectant dans l'égalité $a'+b'+c'+d'=0$, on en déduit que

$$(a-\alpha) + (b-\alpha) + (c-\alpha) + (d-\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{a+b+c+d}{4}$$

Par conséquent, on a

$$M_G = \frac{a+b+c+d}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_F = M - M_G = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3a-b-c-d & -a+3b-c-d \\ -a-b+3c-d & -a-b-c+3d \end{pmatrix}$$

Synthèse : Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$, on considère

$$M_G = \frac{a+b+c+d}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_F = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3a-b-c-d & -a+3b-c-d \\ -a-b+3c-d & -a-b-c+3d \end{pmatrix}.$$

– Il est immédiat que $M = M_F + M_G$ (par construction de M_F et M_G).
– $M_G = \frac{a+b+c+d}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
– $M_F \in F$ car $\left(\frac{3a-b-c-d}{4}\right) + \left(\frac{-a+3b-c-d}{4}\right) + \left(\frac{-a-b+3c-d}{4}\right) + \left(\frac{-a-b-c+3d}{4}\right) = 0$

ce qui démontre que $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \subset F + G$ donc $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) = F + G$.

Définition 9 (Sous-espaces supplémentaires, somme directe)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont supplémentaires dans E lorsque :

$$\forall u \in E. \quad \exists!(u_F, u_G) \in F \times G. \quad u = u_F + u_G.$$

Dans ce cas, on note $E = F \oplus G$. On dit aussi que les sous-espaces sont en somme directe ou encore que la somme $F + G$ est directe

Remarque 8
Lorsque $F \oplus G = E$, tout $u \in E$ peut donc s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. On a donc $F + G = E$. La notation $\oplus$ signifie qu'une telle décomposition non seulement existe mais qu'elle est unique. Par conséquent, si $E = F \oplus G$ alors $E = F + G$.

Remarque 9 (Z)
Ne pas confondre supplémentaires et complémentaires.

Théorème 1
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G des sous-espace vectoriels de E. On a équivalence entre :

1. *Les sous-espaces F et G sont supplémentaires;*
2. *$E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.*

Preuve :
Implication directe : Supposons que $E = F \oplus G$. Dans la remarque précédente, nous avons déjà constaté que $E = F + G$ et il reste donc à montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
On sait que $\{0_E\} \subset F \cap G$ puisque $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. Soit $u \in F \cap G$, il appartient à la fois à F et à G, ce qui nous permet d'écrire $u = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{u}_{\in G}$ et $u = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$. Comme l'écriture de u comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique, on a nécessairement $u = 0_E$, donc $F \cap G \subset \{0_E\}$, ce qui entraine l'égalité $F \cap G = \{0_E\}$
Implication réciproque : Supposons $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$. Par conséquent, tout élément de E peut s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G et il reste à montrer que cette écriture est unique. Soit $u \in E$ et supposons qu'il existe $u_F, v_F \in F$ et $u_G, v_G \in G$ tels que

$$\begin{cases} u = u_F + u_G \\ u = v_F + v_G \end{cases} \Rightarrow u_F + u_G = v_F + v_G \Leftrightarrow u_F - v_F = v_G - u_G$$

Puisque u_F, v_F (resp. u_G, v_G) appartiennent au sous-espace vectoriel F (resp. G), on en déduit que $u_F - u_G \in F$ (resp. $v_G - u_G \in G$). Ainsi les vecteurs $u_F - v_F$ et $v_G - u_F$ appartienent à F et à G (car $u_F - v_F = v_G - u_G \in G$ et $v_G - u_G = u_F - v_F \in F$) donc

$$\begin{cases} u_F - v_F = 0_E \\ v_G - u_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_F = v_F \\ u_G = v_G \end{cases}$$

ce qui démontre l'unicité de l'écriture donc $E = F \oplus G$. ■

Exemple 8
Soient $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \quad / \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x)\}$ et $G = \{f \in E \quad / \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x)\}$.
Montrer que $E = F \oplus G$.

Solution 8
F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

- F et G sont deux sous-ensembles du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = E$.
- Chacun est non vide puisqu'il contient la fonction $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ ($\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}(-x) = 0 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}(x) = -0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}(x)$)
- Soient $f, g \in F$ (resp. $f, g \in G$) et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, montrons que $\alpha f + \beta g \in F$ (resp. $\alpha f + \beta g \in G$)

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\alpha f + \beta g)(-x) &= \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x) \\ \text{(resp. } (\alpha f + \beta g)(-x) &= \alpha f(-x) + \beta g(-x) = -\alpha f(x) - \beta g(x) = -(\alpha f + \beta g)(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, F et G sont bien deux sous-espaces vectoriels de E.
$E = F \oplus G$:

- $F \cap G = \{0_E\}$. Il est immédiat que $\{0_E\} \subset F \cap G$ (car c'est un sous-espace vectoriel). Soit $f \in F \cap G$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x)$ ($f \in F$) et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x)$ ($f \in G$) donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$ donc $f = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} = E_E$, ce qui entraine que $F \cap G \subset \{0_E\}$ d'où $F \cap G = \{0_E\}$.

- $E = F + G$: Puisque F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on a $F + G \subset E$. Pour l'inclusion réciproque, procédons par analyse-synthèse :

  - **analyse** : Soit $f \in E$, supposns qu'il existe $f_F \in F$ et $f_G \in G$ tels que
  $$f = f_F + f_G \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f_F(x) + f_G(x)$$
  On en déduit que
  $$\begin{aligned} \forall x \quad &\in \quad \mathbb{R}, \quad f(-x) = f_F(-x) + f_G(-x) = f_F(x) - f_G(-x) \\ &\Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{c} f_F(x) + f_G(x) = f(x) \\ f_F(x) - f_G(-x) = f(-x) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} f_F(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} & (1)+(2) \\ f_G(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} & (1)-(2) \end{array} \right. \end{aligned}$$

  - **synthèse** : Soit $f \in E$, on note $f_F : x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $f_G : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
  Il est immédiat que $f = f_F + f_G$. Vérifions que $f_F \in F$ et $f_G \in G$
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_F(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = f_F(x) \qquad f_G(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -f_G(x)$$
  ce qui démontre que $f \in F + G$ donc $E \subset F + G$ ce qui entraine que $E = F + G$.
  Par conséquent, F et G sont bien en somme directe dans E.

Remarque 10
Si $f = \exp$, il est immédiat que $f_F = \mathrm{ch}$ et $f_G = \mathrm{sh}$ donc ch est la partie paire de exp et sh sa partie impaire.

Exemple 9
Soient $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \quad / \quad x + y = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,1))$. En admettant que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^2$, montrer qur $\mathbb{K}^2 = F \oplus G$.

Solution 9
$\underline{F \cap G = \{0_{\mathbb{K}^2}\}}$. Il est immédiat que $\{0_{\mathbb{K}^2}\} \subset F \cap G$ (car c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$).
Soit $X \in F \cap G$, alors $X = (x,y)$ avec $x + y = 0$ ($X \in F$) et il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $X = \alpha(1,1) = (\alpha,\alpha)$ (car $X \in G$). On en déduit que $\alpha + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \Rightarrow X = (0,0) = 0_{\mathbb{K}^2}$ d'où $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{K}^2}\}$ et, par double inclusion, on a $F \cap G = \{0_{\mathbb{K}^2}\}$.
$\underline{\mathbb{K}^2 = F + G}$: Puisque F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^2$, on a $F + G \subset \mathbb{K}^2$. Pour l'inclusion réciproque, procédons par analyse-synthèse :

- **analyse** : Soit $X = (x,y) \in \mathbb{K}^2$, supposns qu'il existe $X_F \in F$ et $X_G \in G$ tels que $X = X_F + X_G$. On a $X_F = (x',y')$ avec $x' + y' = 0$ et $X_G = \alpha(1,1)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{K}$, ce qui nous permet d'écrire
$$X = X_F + X_G \Leftrightarrow (x,y) = (x',y') + \alpha(1,1) = (x'+\alpha, y'+\alpha) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x' + \alpha = x \\ y' + \alpha = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x' = x - \alpha \\ y' = y' - \alpha \end{array} \right.$$
En utilisant l'égalité $x' + y' = 0$, on en déduit que $(x - \alpha) + (y - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{x+y}{2}$ donc
$$X_G = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \quad \text{et} \quad X_F = X - X_G = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$$

- **synthèse** : Soit $X = (x,y) \in \mathbb{K}^2$, on note $X_F = \left(\dfrac{x-y}{2}, \dfrac{y-x}{2}\right)$ et $X_G = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right)$.
Par construction de X_F et X_G, on a $X = X_F + X_G$. Vérifions que $X_F \in F$ et $X_G \in G$
$$X_G = \frac{x+y}{2}(1,1) \in \mathrm{Vect}((1,1)) = G \qquad \left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x+y}{2}\right) = 0 \Rightarrow X_F \in F$$
ce qui démontre que $X \in F + G$ donc $\mathbb{K}^2 \subset F + G$ ce qui entraine que $\mathbb{K}^2 = F + G$.
Par conséquent, F et G sont bien en somme directe dans $\mathbb{K}^2$.

2 Applications linéaires

2.1 L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$

Définition 10 (Applications linéaires)
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle application linéaire de E dans F toute application $f : E \mapsto F$ telle que, pour $u, v \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$f(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot f(u) + \beta \cdot f(v)$$

L'ensemble des application linéaires de E dans F sera noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$. On dit qu'une telle application est :

- *une forme linéaire si $F = \mathbb{K}$;*
- *au isomorphisme si elle est bijective;*
- *un endomorphisme lorsque $E = F$ et l'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$;*
- *un automorphisme si c'est à la fois un endomorphisme et un isomorphisme et l'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E,\mathbb{K})$, groupe linéaire de E.*

Exemple 10
Montrons que les applications suivantes sont linéaires :

$$(1)\quad f : \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, x+2y) \end{cases} \qquad (2)\quad g : \begin{cases} \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}^2 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (2a+d, c-3b) \end{cases}$$

$$(3)\quad T : \begin{cases} \mathbb{K}_3[x] & \to & \mathbb{K}_3[x] \\ P & \mapsto & x \mapsto xP'(x) \end{cases} \qquad (4)\quad U : \begin{cases} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & x \mapsto f(x+1) - f(x) \end{cases}$$

$$(5)\quad V : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{cases} \qquad (6)\quad W : \begin{cases} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ f & \mapsto & (f(n) + nf(2n))_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

Solution 10

1. Soient $X, Y \in \mathbb{K}^2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a $X = (x,y)$, $Y = (x', y')$ donc

$$\begin{aligned} f(\alpha X + \beta Y) &= f(\alpha(x,y) + \beta(x',y')) = f((\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \\ &= ((\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y'), (\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y'), (\alpha x + \beta x') + 2(\alpha y + \beta y')) \\ &= (\alpha(x+y) + \beta(x'+y'), \alpha(x-y) + \beta(x'-y'), \alpha(x+2y) + \beta(x'+2y')) \\ &= \alpha(x+y, x-y, x+2y) + \beta(x'+y', x'-y', x'+2y') = \alpha f(X) + \beta f(Y) \end{aligned}$$

2. Soient $M, N \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} g(\alpha M + \beta N) &= g\left(\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + d'\beta \end{pmatrix}\right) \\ &= (2(\alpha a + \beta a') + (\alpha d + d'\beta), (\alpha c + \beta c') - 3(\alpha b + \beta b')) \\ &= (\alpha(2a+d) + \beta(2a'+d'), \alpha(c-3b) + \beta(c'-3b')) \\ &= \alpha(2a+d, c-3b) + \beta(2a'+d', c'-3b') = \alpha g(M) + \beta g(N) \end{aligned}$$

3. Soient $P, Q \in \mathbb{K}_3[x]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} T(\alpha f + \beta g) &: x \mapsto x(\alpha P + \beta Q)'(x) = x(\alpha P'(x) + \beta Q'(x)) = \alpha x P'(x) + \beta x Q'(x) = \alpha(T(P))(x) + \beta(T(Q))(x) \\ &= (\alpha T(P) + \beta T(Q))(x) \Rightarrow T(\alpha P + \beta Q)) = \alpha T(P) + \beta T(Q) \end{aligned}$$

4. Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} U(\alpha f + \beta g) &: x \mapsto (\alpha f + \beta g)(x+1) - (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x+1) + \beta g(x+1) - \alpha f(x) - \beta g(x) \\ &= \alpha(f(x+1) - f(x)) + \beta(g(x+1) - g(x)) = \alpha(U(f))(x) + \beta(U(g))(x) \\ &= (\alpha U(f) + \beta U(g))(x) \Rightarrow U(\alpha f + \beta g)) = \alpha U(f) + \beta U(g) \end{aligned}$$

5. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} V(\alpha(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(v_n)_{n\in\mathbb{N}}) &= V((\alpha u_n + \beta v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \alpha(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} + \beta(v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \alpha V((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \beta V((v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \end{aligned}$$

6. Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} W(\alpha f + \beta g) &= ((\alpha f + \beta g)(n) + n(\alpha f + \beta g)(2n))_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha(f(n) + nf(2n)) + \beta(g(n) + ng(2n))_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \alpha(f(n) + nf(2n))_{n\in\mathbb{N}} + \beta(g(n) + ng(2n))_{n\in\mathbb{N}} = \alpha W(f) + \beta W(g). \end{aligned}$$

2.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 11
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel et $f : E \mapsto F$ une application linéaire. On appelle :

- *noyau de f l'ensemble noté* $\ker(f)$ *défini par* $\ker(f) = \{x \in E, \quad f(x) = 0_F\}$.
- *image de f l'ensemble noté* $\text{Im}(f)$ *défini par* $\text{Im}(f) = \{f(x), \quad x \in E\}$.

Proposition 15
Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ alors $f(0_E) = 0_F$.
En outre, $\ker(f)$ *est un sous-espace vectoriel de E et* $\text{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Preuve :
$f(0_E) = 0_F$: En effet, puisque $0_E = 0_E + 0_E$, on a par linéarité :$f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$. En additionnant par l'opposé de $f(0_E)$ dans F, on obtient

$$f(0_E) + (-f(0_E)) = f(0_E) + f(0_E) + (-f(0_E)) \Leftrightarrow 0_F = f(0_E) + 0_F \Leftrightarrow f(0_E) = 0_F.$$

$\ker(f)$:

- $\ker(f) \subset E$ (par définition de $\ker(f)$)
- $\ker(f) \neq \emptyset$ car $0_E \in \ker(f)$ puisque $f(0_E) = 0_F$.
- Soient $u, v \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in \ker(f) \Leftrightarrow f(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = 0_F$. Puisque $u, v \in \ker(f)$, on a $f(u) = f(v) = 0_F$, ce qui nous donne, par linéarité de f

$$f(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot f(u) + \beta \cdot f(v) = \alpha \cdot 0_F + \beta \cdot 0_F = 0_F$$

Par conséquent, $\ker(f)$ est bien un sous-espace vectoriel de E.
$\text{Im}(f)$:

- $\text{Im}(f) \subset F$ puisque, $\forall x \in E, \quad f(x) \in F$.
- $\text{Im}(f) \neq \emptyset$ car $0_F \in \ker(f)$ puisque $0_F = f(0_E) \in \text{Im}(f)$.
- Soient $u, v \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in \text{Im}(f)$ Puisque $u, v \in \text{Im}(f)$, il existe $u', v' \in E$ tels que $u = f(u')$ et $v = f(v')$. Par linéarité de f, on a

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot v = \alpha \cdot f(u') + \beta \cdot f(v') = f(\alpha \cdot u' + \beta \cdot v') \in \text{Im}(f)$$

Par conséquent, $\text{Im}(f)$ est bien un sous-espace vectoriel de E. ■

Proposition 16
Soient E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Si E admet une famille génératrice $(u_1, .., u_p)$, i.e. $E =$ $\text{Vect}(u_1, .., u_p)$ *alors* $\text{Im}(f)$ *admet pour famille génératrice $(f(u_1), .., f(u_p))$, i.e.* $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(u_1), .., f(u_p))$.

Preuve :
Soit $v \in \text{Im}(f)$, il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$. Puisque $E = \text{Vect}(u_1, ., u_p)$, il existe $\alpha_1, .., \alpha_p \in \mathbb{K}$ tels que $u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p$. Par linéarité de f, on en déduit que

$$v = f(u) = f(\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p) = \alpha_1 \cdot f(u_1) + \cdots + \alpha_p \cdot f(u_p) \in \text{Vect}(f(u_1), .., f(u_p))$$

ce qui entraine que $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(f(u_1), .., f(u_p))$. D'autre part, par définition, $f(u_1), .., f(u_p)$ appartiennent à $\text{Im}(f)$ qui est un sous-espace vectoriel de F et $\text{Vect}(f(u_1), .., f(u_p))$ est le plus petit sous-espace vectoriel de F les contenant donc $\text{Vect}(f(u_1), .., f(u_p)) \subset \text{Im}(f)$, ce qui démontre l'égalité attendue. ■

Méthode 5 (Calcul de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$)
Soit $f : E \mapsto F$ une application linéaire :

- *pour décrire $\ker(f)$, on peut résoudre l'équation $f(u) = 0$ et caractériser les vecteurs obtenus;*
- *pour décrire $\mathrm{Im}\, f$, si $E = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p)$ alors $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(u_1), ..., f(u_p))$.*

Remarque 11
Un espace vectoriel n'admet pas toujours une famille génératrice finie, ce qui est le cas de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ou de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ce qui nous empêche d'appliquer la méthode précédente. Dans ce cas, il faut caractériser les éléments de F qui possède un antécédent par f.

Exemple 11
Déterminer le noyau et l'image des applications suivantes (on admet qu'il s'agit bien d'applications linéaires

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) & \mapsto & \mathbb{K} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & a+d \end{array} \right. , \quad g : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{K}^3 & \mapsto & \mathbb{K}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, y+z, x+z) \end{array} \right. , \quad h : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{K}^2 & \mapsto & \mathbb{K}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, x+2y) \end{array} \right.$$

$$S : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \mapsto & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right. \quad T : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{K}_2[x] & \mapsto & \mathbb{K}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(-1)) \end{array} \right.$$

Solution 11
$\underline{\ker(f)}$: Soit $X \in \ker(f) \Leftrightarrow f(X) = 0_{\mathbb{K}}$. Puisque $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a

$$f(X) = 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow a + d = 0 \Leftrightarrow a = -d \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$\underline{\mathrm{Im}(f)}$: Puisque $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une famille génératrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\left(f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right), f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= \mathrm{Vect}(1, 0, 0, 1) = \mathrm{Vect}(1) = \mathbb{K} \end{aligned}$$

Puisque 1 est générateur de $\mathbb{K}$ ($\forall x \in \mathbb{K}, \quad x = x \times 1$)
$\underline{\ker(g)}$: Soit $X \in \ker(g) \Leftrightarrow g(X) = 0_{\mathbb{K}^2}$. Puisque $X = (x, y, z)$, on a

$$g(X) = 0_{\mathbb{K}^2} \Leftrightarrow (x+y, y+z) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \\ x+z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=-y \\ z=-y \\ (-y)+(-y)=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow X = (0,0,0)$$

donc $\ker(g) = \{0_{\mathbb{K}^3}\}$.
$\underline{\mathrm{Im}(g)}$: Puisque $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^3$, on a

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\left(g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1)\right) = \mathrm{Vect}((1,0,1), (1,1,0), (0,1,1))$$

$\underline{\ker(h)}$: Soit $X \in \ker(h) \Leftrightarrow h(X) = 0_{\mathbb{K}^3}$. Puisque $X = (x, y)$, on a

$$h(X) = 0_{\mathbb{K}^3} \Leftrightarrow (x+y, x-y, x+2y) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y=0 \\ x-y=0 \\ x+2y=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x=0 & (1)+(2) \\ y=0 & (1)-(2) \\ 0=0 & \end{array} \right. \Leftrightarrow X = (0,0)$$

donc $\ker(h) = \{0_{\mathbb{K}^2}\}$
$\underline{\mathrm{Im}(h)}$: Puisque $(1,0), (0,1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^2$, on a

$$\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}\left(h(1,0), h(0,1)\right) = \mathrm{Vect}((1,1,1), (1,-1,3))$$

ker(S) : On a

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} &\in \ker(S) \Leftrightarrow S((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} \Leftrightarrow (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1}=0\\ \underset{p=n+1}{\Leftrightarrow} \forall p &\in \mathbb{N}^{\times}, \quad u_p = 0 \Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0,0,...) = u_0(1,0,...) \in \mathrm{Vect}((1,0,....))\end{aligned}$$

donc $\ker(S) = \mathrm{Vect}((1,0,...))$.
Im(f) : Puisque $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ n'admet pas de famille génératrice finie, on doit déterminer directement Im(f). Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, cherchons à quelles conditions cette suite admet un antécédent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par S.

$$\begin{aligned}(v_n)_{n\in\mathbb{N}} &= S((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) \Leftrightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} \underset{p=n+1}{\Leftrightarrow} \forall p\in\mathbb{N}^{\times}, \quad u_p = v_{p-1}\\ &\Leftrightarrow \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, v_0, v_1, ..)\end{aligned}$$

En choisissant $u_0 = 0$, on obtient que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, v_0, v_1, ..)$ est bien un antécédent de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par S. Autrement dit, toute suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (ensemble d'arrivée) admet au moins un antécédent $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (ensemble de départ) par S donc $\mathrm{Im}(S) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
ker(T) : Soit $P \in \ker(T) \Leftrightarrow T(P) = 0_{\mathbb{K}^2}$. Puisque $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$, on a

$$\begin{aligned}T(P) &= 0_{\mathbb{K}^2} \Leftrightarrow (P(0), P(1), P(-1)) = (0,0,0) \Leftrightarrow (c, a+b+c, a-b+c) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 & \\ a=0 & (2)+(3) \\ a=0 & (2)-(3) \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \quad P : x\mapsto 0 \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{K}_2[x]}\end{aligned}$$

donc $\ker(T) = \{0_{\mathbb{R}_2[x]}\}$.
Im(T) : Puisque $x\mapsto 1, x\mapsto x, x\mapsto x^2$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$, on a

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Vect}(T(x\mapsto 1), T(x\mapsto x), T(x\mapsto x^2)) = \mathrm{Vect}((1,1,1),(0,1,-1),(0,1,1))$$

Rappel : Soient X et Y deux ensembles et $f : E \to F$. On dit que

- f est injective si et seulement $\forall x, x' \in E$, $f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x'$.
- f est surjective si et seulement si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ (non nécessairement unique) tel que $y = f(x)$. Autrement dit, tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet au moins un antécédent par f dans E.
- f est bijective si et seulement f est injective et surjective. Autrement dit, tout élément de l''ensemble d'arrivée F admet un antécédent (dans E) et un seul par f.
  Lorsque f est bijective, f^{-1} désigne son application réciproque définie par $\forall y \in F, \quad f^{-1}(y) =$ l'unique antécédent de y par f appartenant à E.

Théorème 2
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$. Alors

1. *f est injective si et seulement si* $\ker(f) = \{0_F\}$.
2. *f est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$.

Preuve :

1. Implication directe : Supposons que f injective. Soit $u \in \ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_F$ et puisque $f(0_E) = 0_F$, on en déduit que $f(u) = f(0_F)$. L'injectivité de f entraine que $u = 0_E$ donc $\ker(f) \subset \{0_E\}$ et, puisque $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, on a $\{0_E\} \subset \ker(f)$ d'où l'égalité $\ker(f) = \{0_E\}$.
   Implication réciproque : Supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$. Soient $u, v \in E$ tels que
   $$f(u) = f(v) \Leftrightarrow f(u) - f(v) = 0_F \underset{\text{linéarité}}{\Leftrightarrow} f(u-v) = 0_F \Leftrightarrow u - v \in \ker(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow u - v = 0_E \Leftrightarrow u = v$$
   donc f est bien injective.
2. Cette équivalence est évidente par définition de Im(f).

■

Méthode 6
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. *Pour montrer que f est injective, on justifie que son noyau $\ker(f)$ est égal à $\{0_E\}$.*

2. *Pour montrer que f est surjective,*

   - *si $E = \mathrm{Vect}(u_1, .., u_p)$ et si $F = \mathrm{Vect}(v_1, .., v_q)$, on calcule $\mathrm{Im}(f)$ par la formule $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(u_1), .., f(u_p))$. Il est immédiat que $\mathrm{Im}(f) \subset F$. Pour l'inclusion réciproque, il suffit de montrer que $\forall k \in [\![1, q]\!]$, $v_q \in \mathrm{Vect}(f(u_1), .., f(u_p))$. Dans ce cas, on obtient $\mathrm{Vect}(v_1, .., v_q) \subset \mathrm{Vect}(f(u_1), .., f(u_p))$ donc $F \subset \mathrm{Im}(f)$.*
   - *si l'un des deux espaces E ou F n'admet pas de famille génératrice finie, on montre que tout vecteur v de F admet au moins un antécédent u par f, i.e. que l'équation $v = f(u)$ (en u) admet au moins une solution dans E.*

3. *Pour montrer que f est bijective, on montre qu'elle est à la fois injective et surjective.*

4. *Lorsque f est bijective, pour calculer sa réciproque, on fixe $v \in F$ et on résout l'équation $v = f(u)$. La solution u obtenue est par définition $f^{-1}(v)$.*

Exemple 12
En reprenant les applications linéaires f, g, S et T de l'exemple précédent, déterminer celles qui sont injectives, celles qui sont surjectives, celles qui sont bijectives. Lorsqu'une telle application est bijective, calculer sa réciproque.

Solution 12

- Puisque $\ker(f) \neq \{0_{\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})}\}$, f n'est pas injective (donc non bijective) et puisque $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}$, f est surjective

- Puisque $\ker(g) = \{0_{\mathbb{K}^3}\}$, g est injective et $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$. Pour étudier la surjectivité de g, regardons si $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{K}^3$. Il est immédiat que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathbb{K}^3$ (par définition de $\mathrm{Im}(g)$). Pour l'inclusion réciproque, remarquons que $\mathbb{K}^3 = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ et l'on a

$$\begin{aligned}
(1,0,1)+(1,1,0)-(0,1,1) &= 2(1,0,0) \Leftrightarrow (1,0,0) = \frac{1}{2}(1,0,1)+\frac{1}{2}(1,1,0)-\frac{1}{2}(0,1,1) \in \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))\\
-(1,0,1)+(1,1,0)+(0,1,1) &= 2(0,1,0) \Leftrightarrow (0,1,0) = -\frac{1}{2}(1,0,1)+\frac{1}{2}(1,1,0)+\frac{1}{2}(0,1,1) \in \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))\\
(1,0,1)-(1,1,0)+(0,1,1) &= 2(0,0,1) \Leftrightarrow (0,0,1) = \frac{1}{2}(1,0,1)-\frac{1}{2}(1,1,0)+\frac{1}{2}(0,1,1) \in \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))
\end{aligned}$$

  donc $\mathbb{K}^3 \subset \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)) = \mathrm{Im}(g)$, ce qui démontre que $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{K}^3$ donc g est surjective. Par conséquent, g est bijective. Explicitons sa réciproque. Soit $Y = (x,y,z) \in \mathbb{K}^3$ (ensemble d'arrivée), déterminons $X = (a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ (ensemble de départ) tel que

$$\begin{aligned}
Y &= g(X) \Leftrightarrow (x,y,z) = (a+b, b+c, a+c) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = x \\ b+c = y \\ a+c = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = \dfrac{x+y+z}{2} & (1)+(2)+(3) \\ a = y-(b+c) = \dfrac{-x+y-z}{2} \\ b = z-(a+c) = \dfrac{-x-y+z}{2} \\ c = x-(a+b) = \dfrac{x-y-z}{2} \end{cases}\\
&\Leftrightarrow X = \left(\frac{-x+y-z}{2}, \frac{-x-y+z}{2}, \frac{x-y-z}{2}\right) \Rightarrow g^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{-x+y-z}{2}, \frac{-x-y+z}{2}, \frac{x-y-z}{2}\right)
\end{aligned}$$

- Puisque $\ker(h) = \{0_{\mathbb{K}^2}\}$, h est injective et $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,-1,2))$. L'application h n'est pas surjective car $(1,0,0) \notin \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,-1,2))$. Justifions cela par l'absude. Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$(1,0,0) = a(1,1,1)+b(1,-1,2) \Leftrightarrow (1,0,0) = (a+b, a-b, a+2b) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 1 \\ a-b = 0 \\ a+2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} & (1)+(2) \\ b = \dfrac{1}{2} & (1)-(2) \\ \dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

  ce qui est absurde donc $\mathrm{Im}(h) \neq \mathbb{K}^3$.

- $\underline{\ker(h)}$: Soit $X \in \ker(h) \Leftrightarrow h(X) = 0_{\mathbb{K}^3}$. Puisque $X = (x,y)$, on a

$$h(X) = 0_{\mathbb{K}^3} \Leftrightarrow (x+y, x-y, x+2y) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ x-y = 0 \\ x+2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (1)+(2) \\ y = 0 & (1)-(2) \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = (0,0)$$

donc $\ker(h) = \{0_{\mathbb{K}^2}\}$
$\underline{\mathrm{Im}(h)}$: Puisque $(1,0),(0,1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^2$, on a

$$\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}\,(h(1,0), h(0,1)) = \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,-1,2))$$

- Puisque $\ker(S) \neq \{0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}\}$, on en déduit que S n'est pas injective (donc non bijective) et $\mathrm{Im}(S) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ donc S est surjective.

- Puisque $\ker(T) = \{0_{\mathbb{R}_2[x]}\}$, on en déduit que T est injective et $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Vect}((1,1,1),(0,1,-1),(0,1,1))$. Pour étudier la surjectivité de g, regardons si $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}^3$. Il est immédiat que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{K}^3$ (par définition de $\mathrm{Im}(f)$). Pour l'inclusion réciproque, remarquons que $\mathbb{K}^3 = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ et l'on a

$$\begin{array}{rcl} (1,0,0) & = & (1,1,1)-(0,1,1) \in \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \\ (0,1,-1)+(0,1,1) & = & 2(0,1,0) \Leftrightarrow (0,1,0) = \dfrac{1}{2}(0,1,-1)+\dfrac{1}{2}(0,1,1) \in \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \\ -(0,1,-1)+(0,1,1) & = & 2(0,0,1) \Leftrightarrow (0,0,1) = -\dfrac{1}{2}(0,1,-1)+\dfrac{1}{2}(0,1,1) \in \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \end{array}$$

donc $\mathbb{K}^3 \subset \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)) = \mathrm{Im}(T)$, ce qui démontre que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}^3$ donc f est surjective. Par conséquent, g est bijective. Explicitons sa réciproque. Soit $Y = (x,y,z) \in \mathbb{K}^3$ (ensemble d'arrivée), déterminons $P : t \mapsto at^2+bt+c \in \mathbb{K}_2[x]$ tel que

$$\begin{array}{rcl} Y & = & T(P) \Leftrightarrow (x,y,z) = (c, a+b+c, a-b+c) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} c = x \\ a+b+c = y \\ a-b+c = z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} c = x & \\ a = \dfrac{y}{2} - x & (2)+(3) \\ b = \dfrac{y-z}{2} & (2)-(3) \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & P : t \mapsto xt^2 + \dfrac{y-z}{2}t + \dfrac{y}{2} - x \Rightarrow f^{-1}(x,y,z) : t \mapsto xt^2 + \dfrac{y-z}{2}t + \dfrac{y}{2} - x \end{array}$$

Exemple 13
Montrer que $T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & x \mapsto f(1-x) \end{array} \right.$ est un automorphisme de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et expliciter T^2.

Solution 13
Commençons par montrer que T est linéaire. Soient $f,g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{array}{rcl} T(\alpha f+\beta g) & : & x \mapsto (\alpha f+\beta g)(1-x) = \alpha f(1-x)+\beta g(1-x) = \alpha(T(f))(x)+\beta(T(g))(x) \\ & = & (\alpha T(f)+\beta T(g))(x) \Rightarrow T(\alpha f+\beta g) = \alpha T(f)+\beta T(g) \end{array}$$

Montrons l'injectivité de T

$$f \in \ker(T) \Leftrightarrow T(f) = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(1-x) = 0 \underset{t=1-x}{\Leftrightarrow} \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = 0 \Leftrightarrow f = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

donc $\ker(T) = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$ ce qui montre l'injectivité de T.
Montrons la surjectivité de T. Soit $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, cherchons $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $g = T(f)$

$$g = T(f) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(1-x) \underset{t=1-x}{\Leftrightarrow} \forall t \in \mathbb{R}, \quad g(1-t) = f(t)$$

Par conséquent, la fonction $f : t \mapsto g(1-t)$ est un antécédent de g par T (et c'est même le seul) donc tout élément $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (ensemble d'arrivée) admet au moins un antécédent par T donc $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Puisque pour tout $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la fonction $f : t \mapsto g(1-t)$ est l'antécédent de g par T, on a $T^{-1}(g) : t \mapsto g(1-t) = T(g)$ donc $T^{-1} = T$.

2.3 Structure de $\mathcal{L}(E,F)$

Proposition 17
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve :

- $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) \subset \mathcal{F}(E,F)$ qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (puisque F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel)

- $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) \neq \emptyset$ car $0_{\mathcal{F}(E,F)} : x \mapsto 0_F \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$

- Soient $f,g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha\times f+\beta\times g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$. Soient $u,v\in E$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}(\alpha\times f+\beta\times g)(\lambda\cdot u+\mu\cdot v) &= \alpha\cdot f(\lambda\cdot u+\mu\cdot v)+\beta\cdot g(\lambda\cdot u+\mu\cdot v) = \alpha\cdot(\lambda\cdot f(u)+\mu\cdot f(v))+\beta\cdot(\lambda\cdot g(u)+\mu\cdot g(v))\\ &= \alpha\cdot(\lambda\cdot f(u))+\alpha\cdot(\mu\cdot f(v))+\beta\cdot(\lambda\cdot g(u))+\beta\cdot(\mu\cdot g(v))\\ &= (\alpha\times\lambda)\cdot f(u)+(\alpha\times\mu)\cdot f(v)+(\beta\times\lambda)\cdot g(u)+(\beta\times\mu)\cdot g(v)\\ &= \lambda\cdot(\alpha\cdot f(u)+\beta\cdot g(u))+\mu\cdot(\alpha\cdot f(v)+\beta\cdot g(v))\\ &= \lambda\cdot((\alpha\times f+\beta\times g)(u))+\mu\cdot((\alpha\times f+\beta\times g)(v))\end{aligned}$$

Par conséquent $\alpha\times f+\beta\times g\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ donc $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$, ce qui entraine que c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

■

Proposition 18
Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F,G)$. Alors $g\circ f\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,G)$.

Preuve :
Soient $u,v\in E$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}(g\circ f)(\alpha\cdot u+\beta\cdot v) &= g(f(\alpha\cdot u+\beta\cdot v)) \underset{\text{linéarité de } f}{=} g(\alpha\cdot f(u)+\beta\cdot f(v)) \underset{\text{linéarité de } g}{=} \alpha\cdot g(f(u))+\beta\cdot g(f(v))\\ &= \alpha\cdot(g\circ f)(u)+\beta\cdot(g\circ f)(v)\end{aligned}$$

ce qui montre que $g\circ f\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,G)$. ■

Notation 2
Lorsque $f\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, on note $f^0=\mathrm{Id}_E$ (où $\mathrm{Id}_E : x\mapsto x$) et $\forall n\in\mathbb{N}^\times$, $\quad f^n = \underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n \text{ fois}}$..

Il est alors immédiat que $\forall n,m\in\mathbb{N}$, $\quad f^n\circ f^m = f^m\circ f^n = f^{n+m}$ et $(f^n)^m=(f^m)^n=f^{nm}$

Proposition 19 (Groupe linéaire)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Si f et g appartiennent à $GL_{\mathbb{K}}(E)$ alors $f\circ g$ et f^{-1} appartiennent également à $GL_{\mathbb{K}}(E)$.

Remarque 12
On constate que

- la loi $\circ$ est une loi de composition interne sur $GL_{\mathbb{K}}(E)$ (si $f,g\in GL_{\mathbb{K}}(E)$ alors $f\circ g\in GL_{\mathbb{K}}(E)$),
- $GL_{\mathbb{K}}(E)$ est non vide car il contient Id_E,
- Id_E est l'élément de $GL_{\mathbb{K}}(E)$ pour la loi $\circ$. En effet, $\forall f\in GL_{\mathbb{K}}(E)$, on a

$$\forall u\in E,\quad (f\circ\mathrm{Id}_E)(u)=f(\mathrm{Id}_E(u))=f(u)=\mathrm{Id}_E(f(u))=(\mathrm{Id}_E\circ f)(u)\Rightarrow f\circ\mathrm{Id}_E=\mathrm{Id}_E\circ f$$

- tout élément f de $GL_{\mathbb{K}}(E)$ admet un inverse dans $GL_{\mathbb{K}}(E)$ pour cette loi $\circ$ (en l'occurence f^{-1}).

On résume ceci en disant que $GL_{\mathbb{K}}(E)$ est un groupe pour la loi $\circ$, qui n'est pas commutative en général.

Preuve :
Soient $f,g\in GL_{\mathbb{K}}(E)$. Puisque f et g sont des bijections de E sur E, on en déduit que $f\circ g$ est également une bijection de E sur E. En outre, comme f et g appartiennent à $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, la proposition précédente montre que $f\circ g$ appartient à $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, ce qui montre que $f\circ g\in GL_{\mathbb{K}}(E)$.
L'application f étant bijection, elle admet une réciproque f^{-1} qui est également une bijection de E sur E. Il suffit maintenant de montrer que f^{-1} est linéaire. Soient $u,v\in E$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$. Puisque f est bijective de E sur E, il existe $u',v'\in E$ tels que $u=f(u')\Leftrightarrow u'=f^{-1}(u)$ et $v=f(v')\Leftrightarrow v'=f^{-1}(v)$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}.f^{-1}(\alpha\cdot u+\beta\cdot v) &= f^{-1}(\alpha\cdot f(u')+\beta\cdot f(v')) \underset{\text{linéarité de } f}{=} f^{-1}(f(\alpha\cdot u'+\beta\cdot v'))=(f^{-1}\circ f)(\alpha\cdot u'+\beta\cdot v')\\ &= \mathrm{Id}_E(\alpha\cdot u'+\beta\cdot v')=\alpha\cdot u'+\beta\cdot v'=\alpha\cdot f^{-1}(u)+\beta\cdot f^{-1}(v)\end{aligned}$$

■

Proposition 20
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $\forall f,g,h \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$(\alpha \times f + \beta \times g) \circ h = \alpha \times (f \circ h) + \beta \times (g \circ h) \qquad f \circ (\alpha \times g + \beta \times h) = \alpha \times (f \circ g) + \beta \times (f \circ h)$$

Preuve :
La première propriété n'est pas spécifique aux endomorphismes puisqu'elle résulte de la définition de la composition des applications (et du fait que l'ensemble d'arrivée est tout de même muni d'une addition !) tandis que la seconde est spécifique aux endomorphismes

$$\begin{aligned}
\forall u &\in E, \quad [(\alpha \times f + \beta \times g) \circ h](u) = (\alpha \times f + \beta \times g)(h(u)) = \alpha \cdot f(h(u)) + \beta \cdot g(h(u)) = \alpha \cdot (f \circ h)(u) + \beta \cdot (g \circ h)(u) \\
&\Rightarrow (\alpha \times f + \beta \times g) \circ h = \alpha \times (f \circ h) + \beta \times (g \circ h) \\
\forall u &\in E, \quad [f \circ (\alpha \times g + \beta \times h)](u) = f((\alpha \times g + \beta \times h)(u)) = f(\alpha \cdot g(u) + \beta \cdot h(u)) \underset{\text{linéarité de } f}{=} \alpha \cdot f(g(u)) + \beta \cdot f(h(u)) \\
&= \alpha \cdot (f \circ g)(u) + \beta \cdot (f \circ h)(u) \Rightarrow f \circ (\alpha \times g + \beta \times h) = \alpha \times (f \circ g) + \beta \times (f \circ h)
\end{aligned}$$

■

Remarque 13
Par conséquent, $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ muni des lois d'addition des endomorphismes, de la composition $\circ$ des endomorphismes et de la multiplication $\times$ des endomorphismes par un scalaire est une $\mathbb{K}$-algèbre, i.e. que

- $(E, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
- $\circ$ est une loi de composition interne associative possédant un élément neutre (si $f, g, h \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, $f \circ g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ et $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$) et $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f$)
- ces différentes lois vérifiant les égalités de la proposition précédente.

Ainsi, les calculs dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ sont en tout point semblable aux calculs sur les réels ou sur les complexes à la différence fondamentale suivante :

- la loi $\circ$ n'est pas commutative, i.e. $f \circ g \neq g \circ f$ en général, ce qui entrainera une attention particulière à l'ordre des multiplications
- tout élément de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ non nul (i.e. différent de $0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}$) n'admet pas nécessairement un inverse pour la composition $\circ$ (analogue du produit usuel).
  En effet, un endomorphisme f est inversible dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ si et seulement il est bijectif ! Par conséquent, on évitera d'"écrire $\dfrac{1}{f}$ à tout bout de champ, même lorsque f est inversible, i.e. bijectif. car la notation $\dfrac{f}{g}$ est problématique dans une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative (i.e. lorsque $\circ$ n'est pas commutative) . Dans les nombres réels ou complexes, on a par définition $\dfrac{a}{b} = a \times \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{b} \times a$, $\dfrac{1}{b}$ désignant l'inverse de b. Si l'on adopte cette notation, on a $f \circ g^{-1} \neq g^{-1} \circ f$ en général donc on ne possède pas de bonne définition de $\dfrac{f}{g}$.

Exemple 14
1. Développer $(f+g)^2$. Trouver alors les conditions sur f et g pour que l'on ait $(f+g)^2 = f^2 + 2f \circ g + g^2$
2. Soient $f, g, h \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Lorsque f est bijective, résoudre les deux équations suivantes en g.

$$f \circ g = h \quad g \circ f = h \quad f \circ g \circ f^{-1} = h$$

Solution 14
1. On utilise la définition du carré d'un endomorphisme

$$\begin{aligned}
(f+g)^2 &= (f+g) \circ (f+g) = f \circ f + f \circ g + g \circ f + g \circ g = f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2 \\
(f+g)^2 &= f^2 + 2f \circ g + g^2 \Leftrightarrow f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2 = f^2 + 2f \circ g + g^2 \Leftrightarrow f \circ g = g \circ f
\end{aligned}$$

2. Dans le premier cas, on utilise la composition à gauche par f, dans le second la composition à droite par f et dans le troisième ... les deux :-)

$$\begin{aligned}
f \circ g &= h \Leftrightarrow f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ h \Leftrightarrow (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ h \Leftrightarrow \mathrm{Id}_E \circ g = f^{-1} \circ h \Leftrightarrow g = f^{-1} \circ h \\
g \circ f &= h \Leftrightarrow (g \circ f) \circ f^{-1} = h \circ f^{-1} \Leftrightarrow g \circ (f \circ f^{-1}) = h \circ f^{-1} \Leftrightarrow g \circ \mathrm{Id}_E = h \circ f^{-1} \Leftrightarrow g = h \circ f^{-1} \\
f \circ g \circ f^{-1} &= h \Leftrightarrow f^{-1} \circ (f \circ g \circ f^{-1}) \circ f = f^{-1} \circ h \circ f \Leftrightarrow (f^{-1} \circ f) \circ g \circ (f^{-1} \circ f) = f^{-1} \circ h \circ f \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Id}_E \circ g \circ \mathrm{Id}_E = f^{-1} \circ h \circ f \Leftrightarrow g = f^{-1} \circ h \circ f
\end{aligned}$$

3 Projecteurs et symétries

3.1 Projecteurs

Définition 12
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces supplémentaires de E, i.e. $E = F \oplus G$. Pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$.
L'application $p_{F//G} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u = u_F + u_G & \mapsto & u_F \end{array} \right.$ s'appelle le projecteur de E sur F parallèlement à G.

Proposition 21
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces supplémentaires de E.
L'application $p_{F//G}$ est un endomorphisme de E qui vérifie en outre

$$(p_{F//G})^2 = p_{F//G}, \quad F = \operatorname{Im}(p_{F//G}) = \{u \in E, \quad / \quad p_{F//G}(u) = u\}, \quad \ker(p_{F//G}) = G.$$

Preuve :
Soient $u, v \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Par définition, il existe $u_F, v_F \in F$ et $u_G, v_G \in G$ tels que

$$u = u_F + u_G \quad v = v_F + v_G$$

avec, par définition de $p_{F//G}$, $u_F = p_{F//G}(u)$ et $v_F = p_{F//G}(v)$. On en déduit que

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot v = \alpha \cdot (u_F + u_G) + \beta \cdot (v_F + v_G) = \underbrace{(\alpha \cdot u_F + \beta \cdot v_F)}_{\in F} + \underbrace{(\alpha \cdot u_G + \beta \cdot v_G)}_{\in G}$$

La décomposition de $\alpha \cdot u + \beta \cdot v$ en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G étant unique, on obtient

$$p_{F//G}(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot u_F + \beta \cdot v_F = \alpha \cdot p_{F//G}(u) + \beta \cdot p_{F//G}(v)$$

ce qui prouve la linéarité de $p_{F//G}$.
Pour tout élément u de E, il existe un unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. Par conséquent, on a

$$\begin{array}{rcl} \forall u & \in & E, \quad (p_{F//G})^2(u) = p_{F//G}(p_{F//G}(u)) = p_{F//G}(u_F) = u_F \text{ (car } u_F = \underbrace{u_F}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \text{) } = p_{F//G}(u) \Rightarrow (p_{F//G})^2 = p_{F//G} \\ p_{F//G}(u) & = & u \Leftrightarrow u_F = u_F + u_G \Leftrightarrow u_G = 0 \Leftrightarrow u = u_F \in F \Rightarrow F = \{u \in E, \quad / \quad p_{F//G}(u) = u\} \\ p_{F//G}(u) & = & u_F \in F \Rightarrow \operatorname{Im}(p_{F//G}) \subset F \text{ et } \forall u \in F, \quad u = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \Rightarrow \underbrace{p_{F//G}(u)}_{\in \operatorname{Im}(p_{F//G})} = u \Rightarrow F \in \operatorname{Im}(p_{F//G}) \Rightarrow F = \operatorname{Im}(p_{F//G}) \\ p_{F//G}(u) & = & 0_E \Leftrightarrow u_F = 0_E \Leftrightarrow u = u_G \in G \Rightarrow \ker(p_{F//G}) = G \end{array}$$

■

Exemple 15
Montrer que les ensembles $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \quad / \quad x + y + z = 0\}$ et $G = \operatorname{Vect}((1, 1, 1))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^3$ puis déterminer les projecteurs $p_{F//G}$ et $p_{G//F}$.

Solution 15
Il est immédiat que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ et je laisse le soin au lecteur de vérifier que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.
Montrons que F et G sont bien supplémentaires. Soit $X = (x, y, z) \in F \cap G$. On a $x + y + z = 0$ car $X \in F$ et il existe un certain $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $X = \alpha(1, 1, 1) = (\alpha, \alpha, \alpha)$ car $X \in G$ donc

$$\alpha + \alpha + \alpha = 0 \Leftrightarrow 3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow X = (0, 0, 0) = 0_{\mathbb{K}^3}$$

Montrons que $\mathbb{K}^3 = F + G$. On procède classiquement par analyse-synthèse
Analyse : Soit $X \in \mathbb{K}^3$, $X_F \in F$ et X_G tels que $X = X_F + X_G$. On a $X = (x, y, z)$, $X_F = (a, b, c)$ avec $a + b + c = 0$ et $X_G = (\alpha, \alpha, \alpha)$ donc

$$X = X_F + X_G \Leftrightarrow (x, y, z) = (a, b, c) + (\alpha, \alpha, \alpha) \Leftrightarrow (x, y, z) = (a + \alpha, b + \alpha, c + \alpha) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + \alpha = x \\ b + \alpha = y \\ c + \alpha = z \end{array} \right.$$

Puisque $a+b+c=0$, en addition les trois égalités précédentes, on obtient

$$\begin{aligned}\underbrace{a+b+c}_{=0}+3\alpha &= x+y+z \Leftrightarrow \alpha=\frac{x+y+z}{3} \Rightarrow X_G=\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)\\ X_F &= X-X_G=\left(\frac{2x-y-z}{3},\frac{-x+2y-z}{3},\frac{-x-y+2z}{3}\right)\end{aligned}$$

Synthèse : Soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{K}^3$, on pose

$$X_F=\left(\frac{2x-y-z}{3},\frac{-x+2y-z}{3},\frac{-x-y+2z}{3}\right) \quad \text{et} \quad X_G=\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)$$

Il est immédiat que $X=X_F+X_G$ (par construction de X_F et X_G) et que $X_G\in G$. Quant à X_F, on a

$$\left(\frac{2x-y-z}{3}\right)+\left(\frac{-x+2y-z}{3}\right)+\left(\frac{-x-y+2z}{3}\right)=0$$

donc $X_F\in F$, ce qui démontre que $E=F+G$.
Par conséquent, on a pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$p_{F//G}(x,y,z)=\left(\frac{2x-y-z}{3},\frac{-x+2y-z}{3},\frac{-x-y+2z}{3}\right) \qquad p_{G//F}(x,y,z)=\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)$$

Exemple 16
Déterminer le projecteur p de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sur $F=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad / \quad f(0)=0\}$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(x\mapsto 1)$.

Solution 16
Je laisse le soin au lecteur de vérifier que F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Montrons que F et $\mathrm{Vect}(x\mapsto 1)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Soit $f\in F\cap\mathrm{Vect}(x\mapsto 1)$, on a $f(0)=0$ car $f\in F$ et il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $f:x\mapsto\alpha.1=\alpha$ donc $f(0)=\alpha$. Ainsi, $\alpha=0$ et $f:x\mapsto 0=0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ donc $F\cap\mathrm{Vect}(x\mapsto 1)\subset\{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$. En outre, puisque $F\cap\mathrm{Vect}(x\mapsto 1)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a $\{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}\subset F\cap\mathrm{Vect}(x\mapsto 1)$ donc $F\cap\mathrm{Vect}(x\mapsto 1)=\{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$.
Justifions que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})=F\cap\mathrm{Vect}(x\mapsto 1)$ en procédant par analyse-synthèse. On pose $G=\mathrm{Vect}(x\mapsto 1)$.
Analyse : Soient $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f_F\in F$ et $f_G\in\mathrm{Vect}(x\mapsto 1)$ tels que $f=f_F+f_G$. On a $f_F(0)=0$ (puisque $f_F\in F$) et $f_G:x\mapsto\alpha$ pour un certain $\alpha\in\mathbb{R}$. Par conséquent, on a $f(0)=f_F(0)+f_G(0)\Leftrightarrow f(0)=\alpha$, ce qui entraine que $f_G:x\mapsto f(0)$ et $f_F=f-f_G:x\mapsto f(x)-f(0)$.
Synthèse : Soit $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $f_F:x\mapsto f(x)-f(0)$ et $f_G:x\mapsto f(0)$. Il est immédiat que $f=f_F+f_G$, $f_G=f(0)(x\mapsto 1)$ et $f_F(0)=f(0)-f(0)=0$ donc $f_F\in F$ donc $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})=F+G$.
On en déduit que $\forall f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\quad p_{F//G}(f)=f_F:x\mapsto f(x)-f(0)$.

Proposition 22 (Caractérisation des projecteurs)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
f est un projecteur de E si et seulement si $f^2=f$. Dans ce cas, on a f est le projecteur $p_{\mathrm{Im}(f)//\ker(f)}$ de E sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$.

Preuve :
L'implication directe a déjà été montrée dans la proposition précédente.
Montrons l'implication réciproque. Soit $f\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ telle que $f^2=f$.
Commençons par montrer que $E=\mathrm{Im}(f)\oplus\ker(f)$. Soit $u\in\mathrm{Im}(f)\cap\ker(f)$. Il existe $u'\in E$ tel que $u=f(u')$ (puisque $u\in\mathrm{Im}(f)$) et $f(u)=0_E$ (puisque $u\in\ker(f)$). On en déduit que

$$f(f(u'))=0_E\Leftrightarrow f^2(u')=0_E\Leftrightarrow f(u')=0_E\Leftrightarrow u=0_E$$

Vérifions que $E=\mathrm{Im}(f)+\ker(f)$.
Analyse : Soient $u\in E$, $u_F\in\mathrm{Im}(f)$ et $u_G\in\ker(f)$ tels que $u=u_F+u_G$. Puisque $u_F\in\mathrm{Im}(f)$, il existe $u'\in E$ tel que $u_F=f(u')$ et $f(u_G)=0_E$ car $u_G\in\ker(f)$. En composant par f l'égalité $u=u_F+u_G$, on en déduit, en utilisant l'égalité $f^2=f$, que

$$f(u)=f(u_F)+f(u_G)\Leftrightarrow f(u)=f^2(u')+0_E\Leftrightarrow f(u)=f^2(u')=f(u')=u_F$$

Par conséquent, $u_F=f(u)$ et $u_G=u-u_F=u-f(u)$.
Synthèse : Soit $u\in E$, on pose $u_F=f(u)$ et $u_G=u-f(u)$. Il est immédiat que $u=u_F+u_G$ et que $u_F=f(u)\in\mathrm{Im}(f)$. En outre, on a

$$f(u_G)=f(u-f(u))\underset{\text{linéarité de }f}{=}f(u)-f(f(u))=f(u)-f^2(u)=f(u)-f(u)=0_E\Rightarrow u_G\in\ker(f).$$

Il est alors immédiat que $\forall u\in E$, on a $p_{\mathrm{Im}(f)//\ker(f)}(u)=u_F=f(u)$ donc $p_{\mathrm{Im}(f)//\ker(f)}=f$ ce qui démontre la proposition.
■

Méthode 7

- *Si $E = F \oplus G$, pour calculer le projecteur $p_{F//G}$ de E sur F parallèlement à G, on cherche, pour chaque $u \in E$, l'unqiue couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. Dans ce cas, on a $p_{F//G} : u = u_F + u_G \mapsto u_F$.*
- *Pour vérifier que $f : E \mapsto E$ est un projecteur, on montre que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ puis on justifie que $f^2 = f$. Dans ce cas, f est le projecteur de E sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$.*

Exemple 17
Montrer que $T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \right.$ est un projecteur puis le caractériser.

Solution 17
Montrons que $T \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}))$. Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{array}{rcl} T(\alpha f + \beta g) & : & x \mapsto \dfrac{(\alpha f + \beta g)(x) + (\alpha f + \beta g)(-x)}{2} = \dfrac{\alpha f(x) + \beta g(x) + \alpha f(-x) + \beta g(-x)}{2} \\ & = & \alpha \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \beta \dfrac{f(-x)+g(-x)}{2} = \alpha (T(f))(x) + \beta (T(g))(x) = (\alpha T(f) + \beta T(g))(x) \\ & \Rightarrow & T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g) \end{array}$$

Vérifions que $T^2 = T$.

$$\begin{array}{rcl} \forall f & \in & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad T^2(f) = T(T(f)) = T(x \mapsto \underbrace{\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}}_{=g(x)}) : x \mapsto \dfrac{g(x)+g(-x)}{2} = \dfrac{\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(-x)+f(x)}{2}}{2} \\ = & & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = T(f)(x) \Rightarrow \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad T^2(f) = T(f) \Rightarrow T^2 = T \end{array}$$

Par conséquent T est un projecteur.

$$\begin{array}{rcl} f & \in & \mathrm{Im}(T) \Leftrightarrow T(f) = f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = f(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x) \\ f & \in & \ker(T) \Leftrightarrow T(f) = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x) \end{array}$$

Ainsi, T est le projecteur de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sur le sous-espace vectoriel des fonctions paires parallèlement au sous-espace des fonctions impaires.

Exemple 18
Montrer que l'application suivante est un projecteur puis le caractériser :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \mapsto & \mathbb{K}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x, y, -x-y) \end{array} \right.$$

Solution 18
Montrons que f est linéaire. Soient $X = (x,y,z)$, $X' = (x',y',z') \in \mathbb{K}^3$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha X + \beta X') & = & f(\alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z')) = f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \\ & = & (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', -(\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y')) = \alpha(x,y,-x-y) + \beta(x',y',-x'-y') \\ & = & \alpha f(X) + \beta f(X') \end{array}$$

Calculons f^2

$$\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{K}^3, \quad f^2(X) = f(f(X)) = f(x,y,-x-y) = (x,y,-x-y) = f(X) \Rightarrow f^2 = f$$

donc f est bien un projecteur

$$\begin{array}{rcl} X & = & (x,y,z) \in \ker(f) \Leftrightarrow f(X) = 0_{\mathbb{K}^3} \Leftrightarrow (x,y,-x-y) = (0,0,0) \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow X = (0,0,z) = z(0,0,1) \\ & \Leftrightarrow & X \in \mathrm{Vect}(0,0,1) \Rightarrow \ker(f) = \mathrm{Vect}(0,0,1) \\ X & = & (x,y,z) \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow f(x,y,z) = (x,y,z) \Leftrightarrow (x,y,-x-y) = (x,y,z) \Leftrightarrow z = -x-y \Leftrightarrow X = (x,y,-x-y) \\ & = & x(1,0,-1) + y(0,1,-1) \in \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1)) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1)) \end{array}$$

Par conséquent, f est le projecteur de $\mathbb{K}^3$ sur $\mathrm{Vect}(0,0,1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$.

Exemple 19
Montrer que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \dfrac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{a+d}{2} \end{pmatrix} \end{array} \right.$ est un projecteur et le caractériser

Solution 19
Montrons que f est linéaire. Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} f(\alpha M + \beta N) &= f\left(\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \alpha a + \alpha a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{(\alpha a + \alpha a') + (\alpha d + \beta d')}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{(\alpha a + \alpha a') + (\alpha d + \beta d')}{2} \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} \dfrac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{a+d}{2} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \dfrac{a'+d'}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{a'+d'}{2} \end{pmatrix} = \alpha f(M) + \beta f(N) \end{aligned}$$

Calculons f^2

$$\begin{aligned} \forall M &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}), \quad f^2(M) = f(f(M)) = f\left(\begin{pmatrix} \dfrac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{a+d}{2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\dfrac{a+d}{2} + \dfrac{a+d}{2}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\dfrac{a+d}{2} + \dfrac{a+d}{2}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{a+d}{2} \end{pmatrix} = f(M) \Rightarrow f^2 = f \end{aligned}$$

donc f est bien un projecteur

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow f(M) = 0_{\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{a+d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow d = -a \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &\Rightarrow \ker(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ M &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{a+d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 0 \\ c = 0 \\ a = d \end{array} \right. \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow M \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent, f est le projecteur de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

3.2 Symétries

Définition 13
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces supplémentaires de E, i.e. $E = F \oplus G$. Pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$.
L'application $s_{F//G} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u = u_F + u_G & \mapsto & u_F - u_G \end{array} \right.$ s'appelle la symétrie E par rapport à F parallèlement à G.

Lemme 1
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces supplémentaires de E, i.e. $E = F \oplus G$.
Si $p_{F//G}$ désigne la projection de E sur F parallèlement à G et $s_{F//G}$ la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G

alors

$$s_{F//G} = 2p_{F//G} - \mathrm{Id}_E \Leftrightarrow p_{F//G} = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + s_{E//F})$$

Preuve :
Pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. On a

$$p_{F//G}(u) = u_F \quad s_{F//G}(u) = u_F - u_G = 2u_F - (u_F + u_G) = 2p_{F//G}(u) - u$$

donc $s_{F//G} = 2p_{F//G} - \mathrm{Id}_E \Leftrightarrow p_{F//G} = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + s_{E//F})$. ∎

Proposition 23
L'application $s_{F//G}$ est un endomorphisme de E qui vérifie en outre

$$(s_{F//G})^2 = \mathrm{Id}_E, \quad F = \ker(s_{F//G} - \mathrm{Id}_E) = \{u \in E, \quad / \quad s_{F//G}(u) = u\}, \quad G = \ker(s_{F//G} + \mathrm{Id}_E) = \{u \in E, \quad / \quad s_{F//G}(u) = -u\}.$$

Preuve :
Puisque $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que $s_{F//G} = 2p_{F//G} - \mathrm{Id}_E$ est une combinaison linéaire de deux endomorphismes de E, on peut affirmer que $s_{F//G}$ est également un endomorphisme de E. En utilisant les propriétés de $p_{F//G}$, on obtient

$$\begin{array}{rcl}
(s_{F//G})^2 & = & (2p_{F//G} - \mathrm{Id}_E)^2 = \big(2p_{F//G} - \mathrm{Id}_E\big) \circ \big(2p_{F//G} - \mathrm{Id}_E\big) = 4(p_{F//G})^2 - 2p_{F//G} \circ \mathrm{Id}_E - 2\,\mathrm{Id}_E \circ p_{F//G} + (\mathrm{Id}_E)^2 \\
 & = & 4p_{F//G} - 2p_{F//G} - 2p_{F//G} + \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \\
u & \in & F \Leftrightarrow p_{F//G}(u) = u \Leftrightarrow 2p_{F//G}(u) = 2u \Leftrightarrow 2p_{F//G}(u) - u = u \Leftrightarrow s_{F//G}(u) = u \Leftrightarrow u \in \ker(s_{F//G} - \mathrm{Id}_E) \\
 & \Rightarrow & F = \ker(s_{F//G} - \mathrm{Id}_E) = \{u \in E, \quad / \quad s_{F//G}(u) = u\} \\
u & \in & G \Leftrightarrow p_{F//G}(u) = 0_E \Leftrightarrow 2p_{F//G}(u) = 0_E \Leftrightarrow 2p_{F//G}(u) - u = -u \Leftrightarrow s_{F//G}(u) = -u \Leftrightarrow u \in \ker(s_{F//G} + \mathrm{Id}_E) \\
 & \Rightarrow & G = \ker(s_{F//G} + \mathrm{Id}_E) = \{u \in E, \quad / \quad s_{F//G}(u) = -u\}
\end{array}$$

∎

Proposition 24 (Caractérisation des symétries)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
f est une symétrie si et seulement $f^2 = \mathrm{Id}_E$. Dans ce cas, on a f est la symétrie $s_{\ker(f-\mathrm{Id}_E)//\ker(f+\mathrm{Id}_E)}$ de E par rapport à $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

Preuve :
L'implication directe a été traitée dans la proposition précédente.
Pour l'implication réciproque, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = \mathrm{Id}_E$. Montrons que $p = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + f)$ est un projecteur

$$p^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{Id}_E + f)^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{Id}_E + f) \circ (\mathrm{Id}_E + f) = \frac{1}{4}\left[(\mathrm{Id}_E)^2 + \mathrm{Id}_E \circ f + f \circ \mathrm{Id}_E + f^2\right] = \frac{1}{4}\left[\mathrm{Id}_E + f + f + \mathrm{Id}_E\right] = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + f) = p$$

D'après la caractérisation des projecteurs, $p = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + f)$ est le projecteur $p_{\mathrm{Im}(p)//\ker(p)}$ de E sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$ donc

$$\frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + f) = p_{\mathrm{Im}(p)//\ker(p)} \Leftrightarrow f = 2p_{\mathrm{Im}(p)//\ker(p)} - \mathrm{Id}_E = s_{\mathrm{Im}(p)//\ker(p)}$$

ce qui montre que f est une symétrie. En outre, on a

$$\begin{array}{rcl}
u & \in & \mathrm{Im}(p) \Leftrightarrow p(u) = u \Leftrightarrow 2p(u) - u = u \Leftrightarrow f(u) = u \Leftrightarrow u \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \Rightarrow \mathrm{Im}(p) = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \\
u & \in & \ker(p) \Leftrightarrow p(u) = 0_E \Leftrightarrow 2p(u) - u = -u \Leftrightarrow f(u) = -u \Leftrightarrow u \in \ker(f + \mathrm{Id}_E) \Rightarrow \ker(p) = \ker(f + \mathrm{Id}_E)
\end{array}$$

ce qui entraine que $f = s_{\ker(f-\mathrm{Id}_E)//\ker(f+\mathrm{Id}_E)}$ est la symétrie de E par rapport à $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.
∎

Méthode 8

- *Si $E = F \oplus G$, pour calculer la symétrie $s_{F//G}$ de E par rapport à F parallèlement à G, on cherche, pour chaque $u \in E$, l'unqiue couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. Dans ce cas, on a $s_{F//G} : u = u_F + u_G \mapsto u_F - u_G$.*

- *Pour vérifier que $f : E \mapsto E$ est un projecteur, on montre que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ puis on justifie que $f^2 = \mathrm{Id}_E$. Dans ce cas, f est la symétrie de E par rapport à $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.*

Exemple 20
Déterminer la symétrie de $\mathbb{K}^3$ par rapport à $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \quad / \quad x + z = 0\}$ parallèlement à $G = \mathrm{Vect}((1, 1, 0))$ (on admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$)

Solution 20
Montrons que F et G sont bien supplémentaires. Soit $X=(x,y,z)\in F\cap G$. On a $x+z=0$ car $X\in F$ et il existe un certain $\alpha\in\mathbb{K}$ tel que $X=\alpha(1,1,0)=(\alpha,\alpha,0)$ car $X\in G$ donc

$$\alpha+0=0\Leftrightarrow\alpha=0\Leftrightarrow X=(0,0,0)=0_{\mathbb{K}^3}$$

Montrons que $\mathbb{K}^3=F+G$. On procède classiquement par analyse-synthèse
Analyse : Soit $X\in\mathbb{K}^3$, $X_F\in F$ et X_G tels que $X=X_F+X_G$. On a $X=(x,y,z)$, $X_F=(a,b,c)$ avec $a+c=0$ et $X_G=(\alpha,\alpha,0)$ donc

$$X=X_F+X_G\Leftrightarrow(x,y,z)=(a,b,c)+(\alpha,\alpha,0)\Leftrightarrow(x,y,z)=(a+\alpha,b+\alpha,c)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}a+\alpha=x\\b+\alpha=y\\c=z\end{array}\right.$$

Puisque $a+c=0$, en addition la première et la troisième égalités précédentes, on obtient

$$\begin{array}{rcl}\underbrace{a+c}_{=0}+\alpha&=&x+z\Leftrightarrow\alpha=x+z\Rightarrow X_G=(x+z,x+z,0)\\X_F&=&X-X_G=(-z,-x+y-z,z)\end{array}$$

Synthèse : Soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{K}^3$, on pose

$$X_F=(-z,-x+y-z,z)\quad\text{et}\quad X_G=(x+z,x+z,0)$$

Il est immédiat que $X=X_F+X_G$ (par construction de X_F et X_G) et que $X_G\in G$. Quant à X_F, on a $(-z)+(z)=0$ donc $X_F\in F$, ce qui démontre que $E=F+G$.
Par conséquent, on a pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$s_{F//G}(x,y,z)=(-z,-x+y-z,z)-(x+z,x+z,0)=(-x-2z;-2x+y-2z,z)$$

Exemple 21
Vérifier que $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{C}&\to&\mathbb{C}\\z&\mapsto&\overline{z}\end{array}\right.$ est une symétrie du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ puis la caractériser.

Solution 21
Montrons que $f\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Soient $z,z'\in\mathbb{C}$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, on a

$$f(\alpha z+\beta z')=\overline{\alpha z+\beta z'}=\overline{\alpha z}+\overline{\beta z'}\underset{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}{=}\alpha\overline{z}+\beta\overline{z'}=\alpha f(z)+\beta f(z')$$

Calculons f^2.

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad f^2(z)=f(f(z))=f(\overline{z})=\overline{\overline{z}}=z\Rightarrow f^2=\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$$

ce qui montre que f est bien une symétrie.

$$\begin{array}{rcl}z&\in&\ker(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{C}})\Leftrightarrow f(z)=z\Leftrightarrow\overline{z}=z\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\\z&\in&\ker(f+\mathrm{Id}_{\mathbb{C}})\Leftrightarrow f(z)=-z\Leftrightarrow\overline{z}=-z\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}\end{array}$$

donc f est la symétrie de $\mathbb{C}$ par rapport à $\mathbb{R}$ et parallèlement à $i\mathbb{R}$.

Exemple 22
Montrer que $T:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_2[x]&\to&\mathbb{R}_2[x]\\P&\mapsto&x\mapsto P(1-x)\end{array}\right.$ est une symétrie puis la caractériser.

Solution 22
Montrons que $T\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$. Soient $P,Q\in\mathbb{R}_2[x]$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{array}{rl}T(\alpha P+\beta Q)&:\ x\mapsto(\alpha P+\beta Q)(1-x)=\alpha P(1-x)+\beta Q(1-x)=\alpha(T(P))(x)+\beta(T(Q))(x)=(\alpha T(P)+\beta T(Q))(x)\\\Rightarrow&T(\alpha P+\beta Q)=\alpha T(P)+\beta T(Q)\end{array}$$

Vérifions que $T^2=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[x]}$.

$$\begin{array}{rl}\forall P\in\mathbb{R}_2[x],&T^2(P)=T(T(P))=T(x\mapsto\underbrace{P(1-x)}_{=Q(x)}):x\mapsto Q(1-x)=P(1-(1-x))=P(x)\\\Rightarrow&\forall P\in\mathbb{R}_2[x],\quad T^2(P)=P\Rightarrow T^2=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[x]}\end{array}$$

Par conséquent T est une symétrie.

$$\begin{aligned}
P \quad &: \quad x \mapsto ax^2+bx+c \in \ker(T-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[x]}) \Leftrightarrow T(P)=P \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad P(1-x)=P(x)\\
&\Leftrightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R},\quad a(1-x)^2+b(1-x)+c=ax^2+bx+c \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad ax^2-x\,(2a+b)+a+b+c=ax^2+bx+c\\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} a=a\\ -2a-b=b\\ a+b+c=c\end{array}\right. \Leftrightarrow b=-a \Leftrightarrow P: x\mapsto ax^2-ax+c=a(x^2-x)+c\in \mathrm{Vect}(x\mapsto x^2-x, x\mapsto 1)\\
&\Rightarrow \quad \ker(T-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[x]})=\mathrm{Vect}(x\mapsto x^2-x, x\mapsto 1)\\
P \quad &: \quad x \mapsto ax^2+bx+c \in \ker(T+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[x]}) \Leftrightarrow T(P)=-P \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad P(1-x)=-P(x)\\
&\Leftrightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R},\quad a(1-x)^2+b(1-x)+c=-ax^2-bx-c \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad ax^2-x\,(2a+b)+a+b+c=-ax^2-bx-c\\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} a=-a\\ -2a-b=-b\\ a+b+c=-c\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=0\\ b=-2c\end{array}\right. \Leftrightarrow P: x\mapsto -2cx+c=c(-2x+1)\in \mathrm{Vect}(x\mapsto x^2-x) \Rightarrow \ker(T+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[x]})=\mathrm{Vect}(x \mapsto
\end{aligned}$$

Ainsi, T est la symétrie de $\mathbb{R}_2[x]$ par rapport à$\mathrm{Vect}(x\mapsto x^2-x, x\mapsto 1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(x\mapsto 2x-1)$.

Exemple 23
Justifier que l'application $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}^3 & \mapsto & \mathbb{K}^3\\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y+2z,-z)\end{array}\right.$ est une symétrie puis caractérisez la.

Solution 23
Je laisse au lecteur le soin de vérifier que $f\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^3)$. Montrons que $f^2=\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3}$.

$$\forall X=(x,y,z)\in\mathbb{K}^3,\quad f^2(X)=f(f(X))=f(x,y+2z,-z)=(x,(y+2z)+2(-z),-(-z))=(x,y,z)=X\Rightarrow f^2=\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3}$$

donc f est une symétrie.

$$\begin{aligned}
X=(x,y,z)\in\ker(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3}) &\Leftrightarrow f(X)=X \Leftrightarrow (x,y+2z,-z)=(x,y,z) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=x\\ y+2z=y\\ -z=z\end{array}\right. \Leftrightarrow z=0\\
&\Leftrightarrow X=(x,y,0)=x(1,0,0)+y(0,1,0)\in\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))\Rightarrow \ker(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3})=\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))\\
X=(x,y,z)\in\ker(f+\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3}) &\Leftrightarrow f(X)=-X \Leftrightarrow (x,y+2z,-z)=(-x,-y,-z) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=-x\\ y+2z=-y\\ -z=-z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=0\\ z=-y\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow X=(0,y,-y)=y(0,1,-1)\in\mathrm{Vect}((0,1,-1))\Rightarrow \ker(f+\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3})=\mathrm{Vect}((0,1,-1))
\end{aligned}$$

d'où f est la symétrie de $\mathbb{K}^3$ par rapport à $\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((0,1,-1))$.