Nombres réels

Abdellah Bechata

www.mathematiques.fr.st

1 Relation d'ordre et borne supérieure

1.1 Relation d'ordre

Définition 1
On appelle relation d'ordre sur un ensemble E une relation $\mathcal{R} \subset E \times E$ possédant les propriétés suivantes :

1. *Réflexivité : si $x \in E$, alors $x\mathcal{R}x$;*
2. *Transitivité : si $x, y, z \in E$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$;*
3. *Antisymétrie : si $x, y \in E$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x = y$.*

Si en outre, $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre et si $\forall x, y \in E$, on a soit $x\mathcal{R}y$, soit $y\mathcal{R}x$, on dit que la relation d'ordre est totale. On dit que tous les éléments de E sont comparables par $\mathcal{R}$.

Exemple 1
Les relations $\leqslant$ définies sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des relations d'ordre et elles sont totales.
La relation $\mid$ sur $\mathbb{N}^\times$ définie par $x \mid y$ si et seulement x divise y (i.e. $\dfrac{x}{y}$ est un entier) est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^\times$ mais elle n'est pas totale car 2 ne divisant pas 3, on n'a pas $2 \mid 3$ et 3 ne divisant pas 2, on n'a pas $3 \mid 2$.
Soit Ω un ensemble et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des ses parties (de ses sous-ensembles). On définit la relation $\subset$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par $A \subset B$ si A est inclus dans B. Il s'agit d'une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\Omega)$ mais elle n'est pas totale si Ω contient au moins deux éléments (si $a \in \Omega$, $b \in \Omega$ et $a \neq b$, alors $\{a\}$ et $\{b\}$ sont deux parties de Ω mais on n'a ni $\{a\} \subset \{b\}$, ni $\{b\} \subset \{a\}$).
La relation $<$ sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ n'est pas une relation d'ordre car, si x désigne un élément de l'un de ces ensembles, on n'a pas $x < x$ (elle n'est pas réflexive).

Exercice 1
Ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$. On définit une relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant pour $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$:

$$(a, b) \leqslant (a', b') \text{ si et seulement si } (a < a' \quad \text{ou} \quad (a = a' \quad \text{et} \quad b \leqslant b'))$$

Vérifier qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle totale ?

Solution 1
Soient $(a, b), (a', b'), (a'', b'')$ trois couples de $\mathbb{R}^2$.

- $(a, b) \leqslant (a, b)$ car $a = a$ et $b \leqslant b$.
- Si $(a, b) \leqslant (a', b')$ et $(a', b') \leqslant (a'', b'')$, alors on a nécessairement $a \leqslant a'$ et $a \leqslant a''$ et on est dans un des cas suivants :
  - si $a < a'$ ou $a' < a''$, alors $a < a''$ et $(a, b) \leqslant (a'', b'')$;
  - si $a = a'$ et $a' = a''$, alors on doit avoir $b \leqslant b'$ et $b' \leqslant b''$, donc $a = a''$ et $b \leqslant b''$, donc $(a, b) \leqslant (a'', b'')$.
- Si $(a, b) \leqslant (a', b')$ et $(a', b') \leqslant (a, b)$, alors on a $a \leqslant a'$ et $a' \leqslant a$, donc $a = a'$. On doit alors avoir $b \leqslant b'$ et $b' \leqslant b$, donc $b = b'$ et $(a, b) = (a', b')$.

Pour finir, il s'agit bien d'un ordre total :

- si $a < a'$ alors $(a, b) \leqslant (a', b')$,
- si $a > a'$, alors $(a', b') \leqslant (a, b)$,
- si $a = a'$ alors

- soit $b \leqslant b'$ et l'on a $(a,b) \leqslant (a',b')$
- soit $b > b'$et l'on a $(a',b') \geqslant (a,b)$

Exercice 2
Montrer que la relation $\leqslant$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(a,b) \leqslant (a',b') \text{ si et seulement si } (a \leqslant a' \quad \text{et} \quad b \leqslant b')$$

est une relation d'ordre. Est-ce une relation d'ordre totale ?

Solution 2
On a toujours $(a,b) \leqslant (a,b)$. De plus, si $(a,b) \leqslant (a',b')$ et $(a',b') \leqslant (a'',b'')$, alors $a \leqslant a''$ et $a \leqslant b''$, donc $(a,b) \leqslant (a'',b'')$. Finalement, si $(a,b) \leqslant (a',b')$ et $(a',b') \leqslant (a,b)$, alors $a \leqslant a'$ et $a' \leqslant a$, donc $a = a'$, et $b \leqslant b'$ et $b' \leqslant b$, donc $b = b'$.

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ respecte la règle des signes (la somme de deux positifs est positif et le produit de deux positifs est positif), ce qui entraine immédiatement sa compatibilité avec

- l'addition : quels que soient $x, y, t \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$, alors $x + t \leqslant y + t$.
- la multiplication par un réel positif : si $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$ et si $x \leqslant y$, alors $xt \leqslant yt$.

Plus généralement, on peut

- ajouter membre à membre des inégalités de même sens (si $x \leqslant y$ et $z \leqslant t$, alors $x + z \leqslant y + t$)
- multiplier membre à membre des inégalités de même sens à condition qu'il s'agisse d'inégalités entre réels positifs (si $0 \leqslant x \leqslant y$ et $0 \leqslant z \leqslant t$, alors $xz \leqslant yt$).

Remarque 1
Il n'y a pas de relation d'ordre d'ordre sur $\mathbb{C}$ qui respecte la règle des signes (donc qui soit compatible avec l'addition et la multiplication). Supposons qu'il existe une telle relation et qu'elle vérifie :

- pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \geqslant 0$ ou $-z \geqslant 0$;
- pour $z, z' \in \mathbb{C}$ avec $z \geqslant 0$ et $z' \geqslant 0$, alors $z + z' \geqslant 0$ et $zz' \geqslant 0$.
  En particulier, tout carré est positif (si $x \geqslant 0$ alors $x^2 = x \times x \geqslant 0$ et si $x \leqslant 0$ alors $x^2 = (-x) \times (-x) \geqslant 0$)

On considère le complexe i ($i^2 = -1$), alors $-1 = i^2 \geqslant 0$, ce qui entraine que $0 \geqslant 1$ (en additionnant par 1). Or, on a $1 = 1^2 = 1 \times 1 \geqslant 0$ donc $1 \leqslant 0$ et $0 \leqslant 1$ donc, par antisymétrie de $\leqslant$, on a $1 = 0$, ce qui est absurde.

1.2 Majorants, minorants, bornes supérieures et inférieures

Définition 2
Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre notée $\leqslant$ et soit A une partie de E. On appelle

- *minorant de A (dans E) tout $x \in E$ tel que $x \leqslant a$ pour tout $a \in A$*
- *majorant de A (dans E) tout $x \in E$ tel que $a \leqslant x$ pour tout $a \in A$.*

On dit que A est majoré (resp. minoré) dans E s'il admet un majorant (resp. un minorant) dans E.
On dit que A est borné dans E s'il est à la fois minoré et majoré dans E.

Exemple 2
Un ensemble peut avoir ou non des majorants ainsi que des minorants. Il peut également en avoir plusieurs. Ainsi :

- le sous-ensemble $\mathbb{N}$ de $\mathbb{Z}$ admet pour minorant chaque élément de $\mathbb{Z}_-$, mais pas de majorant;
- le sous-ensemble $\mathbb{N}^\times$ de $\mathbb{N}$ admet pour minorants 0 et 1 et ne possède pas de majorants dans $\mathbb{N}$;
- le sous-ensemble $[\![m, n]\!]$ de $\mathbb{N}$ admet pour minorants les éléments de $[\![0, m]\!]$ et pour majorants ceux de $\{k \in \mathbb{N} \mid k \geqslant n\}$.

Il est nécessaire de préciser l'ensemble dans lequel on cherche des majorants ou des minorants (sauf quand il est clair d'après le contexte) : l'ensemble $\mathbb{N}^\times$ n'admet que 0 et 1 comme minorants dans $\mathbb{N}$ mais tout entier naturel inférieur à 1 dans $\mathbb{Z}$.

Définition 3 (Bornes supérieure et inférieure)
Si A est un ensemble non vide et majoré de E, on appelle borne supérieure de A (dans E) un majorant M de A tel que, quel que soit le majorant M' de A, on ait $M \leqslant M'$. Autrement dit, M est un majorant de A et c'est le plus petit de tous les majorants de A.
Si A est un ensemble minoré de E, on appelle borne inférieure de A (dans E) un minorant m de A tel que, quel que soit le minorant m' de A, on ait $m' \leqslant m$. Autrement dit, m est un minorant de A et c'est le plus grand de tous les minorants.

Proposition 1 (Unicité des bornes supérieure et inférieure)
Soit A un ensemble non vide de E.
Si A est majoré, alors A possède au plus une borne supérieure.
Si A est minoré, alors A possède au plus une borne inférieure.

Preuve :
Soient M_1 et M_2 deux bornes supérieures de A. M_1 étant une borne supérieure de A et M_2 étant un majorant de A (puisqu'il s'agit d'une borne supérieure), on a $M_1 \leqslant M_2$. De même, M_2 étant une borne supérieure de A et M_1 étant un majorant de A (puisqu'il s'agit d'une borne supérieure), on a $M_2 \leqslant M_1$. Par antisymétrie, on a donc $M_1 = M_2$.
On procède de même pour les bornes inférieures. ■

Exemple 3
On muni $\mathbb{N}^\times$ de la relation d'ordre $|$ ($a \mid b$ si et seulement si a divise b, i.e. $\dfrac{b}{a}$ est un entier). Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{N}^\times$ constitué des multiples 2. Montrons que A admet une borne inférieure mais pas de borne supérieure dans $\mathbb{N}^\times$.
L'ensemble A est non vide car $2 \in A$. Pour tout $a \in A$, on a $2 \mid a$ (puisque a est un multiple de 2) donc 2 est un minorant de A. En outre, $2 \in A$ donc tout minorant m de A vérifie $m \mid 2$. Or les seuls entiers non nuls divisant 2 sont 1 et 2, ce qui entraine que $m = 1$ ou $m = 2$. Par conséquent, pour minorant m de A, on a $m \mid 2$, ce qui entraine que 2 est la borne inférieure de A et $\inf A = 2 \in A$.
Par contre, A n'est pas majoré, donc il ne possède pas de borne supérieure. Montrons le par l'absurde. Sinon, il existe $M \in \mathbb{N}^\times$ tel que $\forall a \in A, \quad a \mid M$. Puisque tout diviseur entier a d'un entier M est inférieur ou égal àM, on en déduit que A est majoré, pour la relation dans $\mathbb{N}^\times$, pour la relation $\leqslant$, par M. En particulier, $2 \in A$, on a $2 \leqslant M$. Or $2M$ est un multiple de 2 donc $2M \in A$ et puisque M est la borne supérieure de A, on en déduit que $2M \leqslant M \Leftrightarrow M \leqslant 0$, ce qui est absurde.

Définition 4
Si A admet une borne supérieure, on note cette borne supérieure $\sup A$. *Si* $\sup A \in A$, *on dit que A admet un maximum et l'on note alors* $\max A \overset{def}{=} \sup A$. *On dit que* $\max A$ *est le plus grand élément de A.*
Si A admet une borne inférieure, on note cette borne inférieure $\inf A$. *Si* $\inf A \in A$, *on dit que A admet un minimum et l'on note alors* $\min A \overset{def}{=} \inf A$. *On dit que* $\min A$ *est le plus petit élément de A.*

Remarque 2
Pour montrer que $M = \sup A$ (resp. $m = \min A$) il suffit de montrer que M est un majorant (resp. minorant) de A et que $a \in A$ (resp. $b \in A$).

Exemple 4
- le sous-ensemble $[\![m, n]\!]$ de $\mathbb{N}$ admet pour minimum m et pour maximum n;
- le sous-ensemble $\mathbb{N}^\times$ de $\mathbb{N}$ admet 1 pour minimum et n'admet pas de maximum;
- le sous-ensemble $\mathbb{R}_+^\times$ de $\mathbb{R}$ n'admet pas de minimum.

Théorème 1
1. *Tout sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$ admet un minimum et un maximum*
2. *Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum*
3. *Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$ admet un maximum*
4. *Tout sous-ensemble non vide et minoré (resp. majoré) de $\mathbb{Z}$ admet un minimum (resp. un maximum).*

Preuve :

1. On procède par récurrence sur le nombre n d'éléments de l'ensemble considéré.
   On pose l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$: « tout sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ contenu n éléments admet un minimum et un maximum »
   Initialisation $n = 1$: Un ensemble à un élément admet cet élément pour minimum et maximum !

Hérédité : Supposons $\mathcal{H}_n$ vrai et montrons $\mathcal{H}_{n+1}$. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ possédant $n+1$ éléments. Soit $a_0 \in A$, l'ensemble $A \backslash \{a_0\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ possédant n éléments donc il admet un maximum $\widetilde{a}$ et un minimum $\widetilde{b}$. Il est alors immédiat que $a = \max(a_0, \widetilde{a})$ et $b = \min(a_0, \widetilde{b})$ (pour tout $x \in A \backslash \{a_0\}, \quad b \leqslant \widetilde{b} \leqslant x \leqslant \widetilde{a} \leqslant a$ et $b \leqslant a_0 \leqslant a$ avec $a \in A$ et $b \in A$ par construction) ce qui démontre $\mathcal{H}_{n+1}$ et achève la récurrence.

2. Soit A un tel sous-ensemble et $a_0 \in A$. On note $B = A \cap [\![0, a_0]\!] = \{n \in A, \quad n \leqslant a_0\}$. L'ensemble B est non vide ($a_0 \in B$), il est contenu dans $\mathbb{N}$ (puisque $A \subset \mathbb{N}$) et il est fini (il est contenu dans $[\![0, a_0]\!]$) donc il admet un minimum a et ce minimum a est aussi le minimum de A. En effet, soit $x \in A$, si $x > a_0$ alors $x > a_0 \geqslant a$ et si $x \leqslant a_0$ alors $x \in B$ donc $x \geqslant a_0$ avec $a_0 \in A$).

3. Si A est non vide et majoré par un élément $M \in \mathbb{N}$ alors $A \subset [\![0, N]\!]$ donc A est un ensemble fini non ide, ce qui entraine qu'il admet un maximum.

4. Si A est non vide et minoré par $N \in \mathbb{Z}$ alors $\forall a \in A, \quad a \geqslant N \Leftrightarrow a - N \geqslant 0$. On pose $B = \{a - N, \quad a \in B\}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ donc il admet un minimum $b_0 \in B$ et $b_0 = a_0 - N$ pour un certain $a_0 \in A$. Pour tout $a \in A$, on a
$$a - N \geqslant b_0 \Leftrightarrow a \geqslant b_0 + N = a_0$$
donc a_0 est un minorant de A et $a_0 \in A$ donc $a_0 = \min B$.
Si A est non vide et majoré par $N \in \mathbb{Z}$ alors $\forall a \in A, \quad a \leqslant N \Leftrightarrow N - a \geqslant 0$. On pose $B = \{N - a, \quad a \in B\}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ donc il admet un minimum $b_0 \in B$ et $b_0 = N - a_0$ pour un certain $a_0 \in A$. Pour tout $a \in A$, on a
$$N - a \geqslant b_0 \Leftrightarrow a_0 = N - b_0 \geqslant a$$
donc a_0 est un majorant de A et $a_0 \in A$ donc $a_0 = \max B$.

■

Proposition 2
On muni $\mathbb{Q}$ de la relation d'ordre $\leqslant$.

1. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ admettant une borne inférieure dns $\mathbb{Q}$.*
Alors $m = \inf A$ si et seulement si ($\forall a \in A, \quad m \leqslant a$ et $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^\times$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $a_\varepsilon < m + \varepsilon$)

2. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ admettant une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.*
Alors $M = \sup A$ si et seulement si ($\forall a \in A, \quad a \leqslant M$ et $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^\times$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $a_\varepsilon > m - \varepsilon$)

Preuve :

1. Montrons l'implication directe. Si $m = \inf A$ alors $\forall a \in A, \quad m \leqslant a$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^\times$, $m + \varepsilon > m$ donc $m + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A (puisque m est le plus grand des minorants de A), ce qui entraine l'existence de $a_\varepsilon \in A$ tel que $a_\varepsilon > m + \varepsilon$ (le contraire de « pour tout $a \in A, \quad K \leqslant a$ » est « il existe $a \in A, \quad K > a$ »).
Montrons l'implication réciproque. Soit $m \in \mathbb{Q}$ tel que $\forall a \in A, \quad m \leqslant a$ et $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^\times$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $a_\varepsilon < m + \varepsilon$. La première condition signifie que m est un minorant de A donc, par définition de $\inf A$, on a $m \leqslant \inf A$. Supposons que $m < \inf A$. Posons $\varepsilon = \inf A - m \in \mathbb{Q}_+^\times$ donc il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $a_\varepsilon < m + \varepsilon = \inf A$, ce qui est contradictoire avec le fait que $\inf A$ est un minorant de A donc $m \geqslant \inf A$, ce qui entraine que $m = \inf A$.

2. Montrons l'implication directe. Si $M = \sup A$ alors $\forall a \in A, \quad a \leqslant M$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^\times$, $M - \varepsilon < M$ donc $M - \varepsilon$ n'est pas un minorant de A (puisque M est le plus petit des minorants de A), ce qui entraine l'existence de $a_\varepsilon \in A$ tel que $a_\varepsilon > M - \varepsilon$ (le contraire de « pour tout $a \in A, \quad a \leqslant K$ » est « il existe $a \in A, \quad a > K$ »).
Montrons l'implication réciproque. Soit $M \in \mathbb{Q}$ tel que $\forall a \in A, \quad M \leqslant a$ et $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^\times$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $a_\varepsilon > M - \varepsilon$. La première condition signifie que M est un majorant de A donc, par définition de $\sup A$, on a $\sup A \leqslant M$. Supposons que $\sup A < M$. Posons $\varepsilon = M - \sup A \in \mathbb{Q}_+^\times$ donc il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $a_\varepsilon > M - \varepsilon = \sup A$, ce qui est contradictoire avec le fait que $\sup A$ est un majorant de A donc $\sup A \geqslant M$, ce qui entraine que $M = \sup A$.

■

Le premier exemple suivant montre l'existence de sous-ensembles de $\mathbb{Q}$ qui sont majorés (resp. minorés) admettant une borne supérieure (resp. inférieure) dans $\mathbb{Q}$ sans pour autant posséder de maximum (resp. de minimum). Malheureusement (on devrait plutôt dire heureusement), le second exemple montre l'existence de sous-ensembles de $\mathbb{Q}$ qui sont majorés (resp. minorés) sans pour autant admettre une borne supérieure (resp. inférieure) dans $\mathbb{Q}$.

Exemple 5
L' ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q}, \quad 0 < x < 1\}$ est clairement minoré par 0 et majoré par 1. Montrons que $\inf A$ et $\sup A$ existent et valent respectivement 0 et 1 (en particulier, $\inf A = 0 \notin A$ et $\sup A = 1 \notin A$ donc A admet une borne inférieure et une borne supérieure mais il n'admet pas de plus petit élément, ni de plus grand élément).
Soit m un minorant de A dans $\mathbb{Q}$. Montrons que $m \leqslant 0$ en procédant par l'absurde. Si, $m > 0$, comme $\frac{1}{2} \in A$, on en déduit que $m \leqslant \frac{1}{2}$ (m est un minorant de A donc il minore tous les éléments de A) donc $0 < m < 1$. En se rappelant que $m \in \mathbb{Q}$, on obtient que $m \in A$. Or, on a $\frac{m}{2} \in \mathbb{Q}$ et $0 < \frac{m}{2} \leqslant \frac{1}{4} < 1$ donc $\frac{m}{2} \in A$ et, puisque m est un minorant de A, on en déduit que $m \leqslant \frac{m}{2} \Leftrightarrow m \leqslant 0$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $m > 0$. Par conséquent, on a nécessairement $m \leqslant 0$. Ainsi, tout minorant de A est $\leqslant 0$ et 0 est un minorant de A donc $0 = \sup A$.
Soit M un majorant de A dans $\mathbb{Q}$. Montrons que $M \geqslant 1$ en procédant par l'absurde. Si $M < 1$, comme $\frac{1}{2} \in A$, on en déduit que $M \geqslant \frac{1}{2}$ (M est un majorant de A donc il majore tous les éléments de A) donc $\frac{1}{2} \leqslant M < 1$. Puisque M est un rationnel < 1, justifions que le milieu $\frac{M+1}{2}$ du segment $[M, 1]$ (dans $\mathbb{Q}$) appartient aussi à A. Puisque $M \in \mathbb{Q}$, $\frac{M+1}{2} \in \mathbb{Q}$ et que

$$0 < \frac{\frac{1}{2}+1}{2} < \frac{M+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$$

on obtient que $\frac{M+1}{2} \in A$ et M étant un majorant de A, on a

$$\frac{M+1}{2} \leqslant M \Leftrightarrow M+1 \leqslant 2M \Leftrightarrow 1 \leqslant M$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $M < 1$. Par conséquent, on a $M \geqslant 1$. Ainsi tout majorant de A est $\geqslant 1$ et 1 est un majorant de A donc $\sup A = 1$.

Exemple 6
On considère l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q}, \quad x^2 < 2\}$. L'ensemble A est non vide car $0 \in A$. Il est majoré par 2 (sinon, il existe $x \in A$ tel que $x > 2$ donc $x^2 > 2^2 = 4$, ce qui est contradictoire avec $x^2 < 2$). Supposons qu'il admette une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ que l'on note M. Montrons successivement que l'on ne peut avoir ni $M^2 < 2$, ni $M^2 > 2$, ni $M^2 = 2$, ce qui entraine l'inexistence de la borne supérieure de A dans $\mathbb{Q}$, bien que A soit majoré ! Commençons par remarquer que $M \geqslant 1$ (car $1 \in A$) donc $M > 0$)

- Si $M^2 = 2$ alors, M appartenant à $\mathbb{Q}$, il existe a et b deux entiers naturels, $b \neq 0$, sans diviseur commun tel que $M = \frac{a}{b}$.

  $$M^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$$

  Ainsi, a^2 est un nombre pair donc a est également pair (sinon a est impair donc son carré est aussi impair). On peut alors écrire $a = 2a'$ avec $a' \in \mathbb{N}$, ce qui entraine que

  $$a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow (2a')^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 2(a')^2 = b^2$$

  On a également b^2 qui est pair donc b est pair, ce qui entraine que 2 est un diviseur commun à a et b, ce qui est impossible. Ainsi, l'hypotyhèse $M^2 = 2$ est impossible.

- Si $M^2 < 2$. Cherchons $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^\times$ tel que $(M+\varepsilon)^2 < 2 \Leftrightarrow M^2 + 2\varepsilon M + \varepsilon^2 < 2$. En remarquant que $\varepsilon^2 < \varepsilon$ lorsque $\varepsilon < 1$, on a

  $$M^2 + 2\varepsilon M + \varepsilon^2 < M^2 + 2\varepsilon M + \varepsilon = M^2 + \varepsilon(3M+1)$$

  Ainsi, il suffit de choisir ε tel

  $$M^2 + \varepsilon(3M+1) < 2 \underset{M \geqslant 0}{\Leftrightarrow} \varepsilon < \frac{2-M^2}{3M+1}.$$

  On choisit $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{2-M^2}{3M+1}\right) \in \mathbb{Q}_+^\times$ (car $M > 0$ et $2 - M^2 > 0$) et $\varepsilon_0 < 1$ (car $\min\left(1, \frac{2-M^2}{3M+1}\right) \leqslant 1$) et l'on a

  $$M^2 + 2\varepsilon_0 M + \varepsilon_0^2 < M^2 + \varepsilon_0(2M+1) < 2 \Rightarrow (M+\varepsilon_0)^2 < 2 \Rightarrow M + \varepsilon_0 \in A$$

  Puisque M est un majorant de A, on en déduit que $M + \varepsilon_0 \leqslant M \Leftrightarrow \varepsilon_0 \leqslant 0$, ce qui est contradictoire avec $\varepsilon_0 > 0$. Par conséquent, l'hypothèse $M^2 < 2$ est impossible.

- Si $M^2 > 2$. Cherchons $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^\times$ tel que $(M-\varepsilon)^2 > 2 \Leftrightarrow M^2 - 2\varepsilon M + \varepsilon^2 > 2$. En remarquant que $\varepsilon^2 > 0$, on a
$$M^2 - 2\varepsilon M + \varepsilon^2 > M^2 - 2\varepsilon M$$
Ainsi, il suffit de choisir ε tel
$$M^2 - 2\varepsilon M > 2 \underset{M \geqslant 0}{\Leftrightarrow} \varepsilon < \frac{M^2-2}{2M+1}.$$
On choisit $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\min\left(1, \frac{M^2-2}{2M+1}\right) \in \mathbb{Q}_+^\times$ (car $M > 0$ et $M^2 - 2 > 0$), $\varepsilon_0 < 1$ (utile pour la suite du raisonnement) et l'on a
$$(M-\varepsilon_0)^2 = M^2 - 2\varepsilon_0 M + \varepsilon_0^2 > M^2 - 2M\varepsilon_0 > 2 \Rightarrow (M-\varepsilon_0)^2 > 2$$
Montrons que $M - \varepsilon_0$ est un majorant de A. Pour commencer $\varepsilon_0 < 1$ et $M \geqslant 1$ donc $M - \varepsilon_0 > 0$. Soit $a \in A$ et $a \leqslant 0$ alors $a \leqslant M - \varepsilon_0$. Si $a > 0$, alors
$$\begin{array}{rcl} a^2 & < & 2 < (M-\varepsilon_0)^2 \Rightarrow a^2 < (M-\varepsilon_0)^2 \Leftrightarrow a^2 - (M-\varepsilon_0)^2 < 0 \Leftrightarrow [a + (M-\varepsilon_0)]\,[a - (M-\varepsilon_0)] < 0 \\ & \Leftrightarrow & a - (M-\varepsilon_0) < 0 \quad (M - \varepsilon_0 > 0 \text{ et } a > 0 \text{ donc } a + (M-\varepsilon_0) > 0) \Leftrightarrow a < M - \varepsilon_0 \end{array}$$
Ainsi, $(M-\varepsilon_0)$ est un majorant de A et M étant la borne supérieure de A, on a $M \leqslant M - \varepsilon_0 \Leftrightarrow \varepsilon_0 \leqslant 0$, ce qui est contradictoire avec $\varepsilon_0 > 0$. Par conséquent, l'hypothèse $M^2 > 2$ est impossible.

Par la même méthode, on montre que l'ensemble $B = \{x \in \mathbb{Q}_+, \quad x^2 > 2\}$ est minoré par 0 mais il n'admet pas de borne inférieure)

2 Les réels.

2.1 Nécessité, construction et unicité de $\mathbb{R}$.

L'inexistence de borne inférieure (resp. supérieure) à certains sous-ensembles minorés (resp. majorés) de $\mathbb{Q}$ est problématique pour l'intuition sensible que l'on a de la notion de limite (et donc de toute l'analyse que nous connaissons). En effet, si l'on dispose

- d'une suite $(u_n)_n$ croissante et majorée, intuitivement, on se dit que la suite tend vers la « plus grande valeur de la suite », i.e. vers la borne supérieure de $\{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$
- d'une fonction croissante sur $[a, b[$ et majorée, intuitivement, on se dit que la fonction f tend, lorsque x tend vers b, vers la « plus grande valeur de la fonction », i.e. vers la borne supérieure de $\{f(x), \quad x \in [a, b[\}$

Si de telles bornes supérieures (resp. inférieures) n'existent pas toujours pour des ensembles majorés (resp. minorés), l'idée intuitive de la notion de limite s'évanouit.
Cela amène à la recherche d'un sur-ensemble E de $\mathbb{Q}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

- E possède une structure de corps commutative (extension des notions d'addition, de soustraction; de multiplication et de division de $\mathbb{Q}$ telles que $a + b = b + a$ et $ab = ba$).
- E possède une structure d'ordre totale prolongeant la relation $\leqslant$ de $\mathbb{Q}$ et compatible à la règle des signes
- tout sous-ensemble non vide et majoré de E (resp. minoré) admet une borne supérieure (resp. inférieure) dans E.

De tels sur-ensembles existent, il y en a une infinité. Par contre, un seul de ses ensembles satisfait à l'idée naturelle que la suite $(nx)_n$ tend vers l'infini, autrement dit, si x et y sont deux éléments strictement positifs de E, il existe un entier n tel que $nx > y$.

Théorème 2 (Existence et unicité de $\mathbb{R}$)
Il existe un et un seul corps commutatif totalement ordonné tel que tout sous-ensemble non vide et majoré (resp. minoré) admet une borne supérieure (resp. inférieure) et (principe archimédien) tel que $\forall x, y > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.
Ce corps est noté $\mathbb{R}$. Il contient $\mathbb{Q}$, les lois d'addition, de soustraction, de multiplication et de division définies sur $\mathbb{Q}$ se prolonge à $\mathbb{R}$ et la relation d'ordre totale $\leqslant$ sur $\mathbb{Q}$ se prolonge à $\mathbb{R}$ et la règle des signe est préservée.

Preuve :
Admis. La construction de $\mathbb{R}$ a été effectuée durant la seconde moitié du 19-ième siècle à l'aide de méthodes différentes par Dedekind, par Meray et par Cantor. La construction étant acquise, la justification de l'unicité est alors relativement simple.
■

Exercice 3
Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (1+x)^n \geqslant 1+nx$.
En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^\times$ avec $x > 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n > y$.

Solution 3
On fixe $x \geqslant 0$. On procède par récurrence en posant l'hypothèse $(\mathcal{H}_n)$: $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.
Initialisation $n = 0$: $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$ donc $(1+x)^0 \geqslant 1 + 0 \times x$.
Hérédité : Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+x^2 \underset{x^2 \geqslant 0}{\geqslant} 1+(n+1)x$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et démontre la récurrence.
Si $0 \leqslant y < 1$ alors on choisit $n = 0$ car $x^0 = 1 > y$. Sinon, $y > 1$. Comme $x > 1$, on a $x - 1 > 0$ donc

$$x^n = (1 + (x-1)^n) \geqslant 1 + n(x-1).$$

En appliquant le principe archimédien à $x - 1 > 0$ et $y - 1 > 0$, on est assuré de l'existence d'un entier n_0 tel que

$$n_0(x-1) > y - 1 \Leftrightarrow 1 + n_0(x-1) > y \Rightarrow x^{n_0} \geqslant 1 + n_0(x-1) > y$$

Au fait, vous aviez franchement besoin de ln ? Moi non :-)

2.2 Bornes supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3 (Caractérisation des bornes supérieure et inférieure)
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre :

1. *A admet M pour borne supérieure;*
2. *A admet M pour majorant et, quel que soit $\varepsilon > 0$, $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A.*

De même, pour $m \in \mathbb{R}$, on a équivalence entre :

1. *A admet m pour borne inférieure;*
2. *A admet m pour minorant et, quel que soit $\varepsilon > 0$, $m + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A.*

Preuve :
Elle est la même que pour $\mathbb{Q}$. ■

Théorème 3
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure et tout partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Preuve :
Par définition de $\mathbb{R}$! ■

Méthode 1 (Démontrer une propriété mettant en jeu une borne supérieure)
Pour démontrer une égalité de la forme $M = \sup A$, on commence en général par démontrer que M est un majorant de A (en montrant que $a \leqslant M$ quel que soit $a \in A$). On montre ensuite que M est le plus petit majorant de A. Pour cela, on peut fixer arbitrairement $\varepsilon > 0$ et montrer que $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A (autrement dit, montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $M - \varepsilon < a$). Ceci revient à montrer qu'il existe dans A des réels aussi près que l'on veut de M.

Remarque 3
Une partie A de $\mathbb{R}$ ne possède pas nécessairement de borne supérieure (considérer par exemple $]0, +\infty[$ ou $\mathbb{N}$) ni de borne inférieure. Par contre, toute partie non vide et majorée possède une borne supérieure et tout partie non vide et minorée possède une borne inférieure (noter qu'un ensemble possédant une borne supérieure ne possède pas nécessairement de borne inférieure et réciproquement).

Exercice 4
Déterminer si les ensembles suivants constituent des parties majorées ou minorées de $\mathbb{R}$. Calculer, lorsque cela est possible, leurs bornes inférieures et supérieures respectives (on précisera lorsqu'il s'agit de minimum ou de maximum).

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \quad | \quad n \in \mathbb{N}^\times \right\}, \quad B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \quad | \quad n \in \mathbb{N}^\times \right\}, \quad C = \{2 + 3n \quad | \quad n \in \mathbb{N}\}, \quad D = \{2 + (-1)^n n \quad | \quad n \in \mathbb{N}\}$$

Solution 4

- A : Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$, on en déduit que A est majoré par 1 et minoré par 0. En outre, $1 \in A$ donc $1 = \sup A = \min A$. Montrons que $0 = \inf A$. On sait déjà que 0 est un minorant de A. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un entier n_ε tel que $n_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$ (principe archimédien) donc $\dfrac{1}{n_\varepsilon} < 0 + \varepsilon$, ce qui entraine que $0 + \varepsilon$ n'est jamais un minorant de A quel que soit $\varepsilon > 0$ donc $0 = \inf A$.

- B : si n est pair, on a $\dfrac{(-1)^n}{n} = \dfrac{1}{n} \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ (un entier pair non nul est nécessairement $\geqslant 2$) et si n est impair, $\dfrac{(-1)}{n} = -\dfrac{1}{n} \in [-1, 0]$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad -1 \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant 1$, ce qui entraine que B est majoré par $\dfrac{1}{2}$ et minoré par -1. En remarquant que $-1 = \dfrac{(-1)^1}{1} \in B$, on en déduit que $\inf B = -1 = \min B$. De même, en remarquant que $\dfrac{1}{2} = \dfrac{(-1)^2}{2} \in B$, on a $\sup B = \dfrac{1}{2} = \max B$.

- C : il est immédiat que C est minoré par 2 et $2 = 2 + 3 \times 0 \in C$ donc $\inf C = 2 = \min C$. Montrons que C n'est pas majoré. Sinon, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 + 3n \leqslant M$. En particulier, on a $M \geqslant 2 \in C$ donc $M > 0$. D'après le principe archimédien, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $3n_0 \geqslant M \Leftrightarrow 2 + 3n_0 \geqslant M + 2$, ce qui nous donne
$$M + 2 \leqslant 2 + 3n_0 \leqslant M \Leftrightarrow M + 2 \leqslant M \Leftrightarrow 2 \leqslant 0$$
on obtient une contradiction donc C n'est pas majoré.

- D : Montrons que D n'est ni majoré, ni minoré. On procède par l'absurde en supposant que D est majoré par M et minoré par m. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leqslant 2 + (-1)^n n \leqslant M$, ce qui entraine que, pour tout entier n pair, $2 + n \leqslant M$ et que pour tout entier n impair, $m \leqslant 2 - n$. En choisissant $n = 2$, on en déduit que $M \geqslant 2 + 2 = 4$ et en choisissant $n = 3$, on obtient que $m \leqslant 2 - 3 = -1$. D'après le principe archimédien appliqué à $M - 2 > 0$, il existe un entier n_1 tel que
$$2n_1 > M - 2 \Leftrightarrow 2 + (2n_1) > M$$
ce qui contredit l'existence de M (puisque $2n_1$ est un entier pair). Le même principe archimédien appliqué à $1 - m > 0$ montre qu'il existe un entier n_2 tel que
$$2n_2 > 1 - m \Leftrightarrow m > 1 - (2n_2) \Leftrightarrow m > 2 - (2n_2 + 1)$$
ce qui contredit l'existence de m (puisque $2n_2 + 1$ est un entier impair)

Exercice 5
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées telles que $A \subset B$. Montrer que $\sup A \leqslant \sup B$.

2.3 Partie entière

Proposition 4 (Existence et unicité de la partie entière)
Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n + 1$.

Preuve :
Supposons tout d'abord que n et n' conviennent. On a alors $n \leqslant x < n + 1$ et $n' \leqslant x < n' + 1$. Alors :
$$n \leqslant x < n + 1, \quad n' \leqslant x < n' + 1 \Leftrightarrow -n' - 1 < -x \leqslant -n'$$
En additionnant ces deux encadrements, on en déduit que
$$n - n' - 1 < 0 < n - n' + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} n - n' - 1 < 0 \\ 0 < n - n' + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n - n' < 1 \\ -1 < n - n' \end{cases}$$
L'entier $n - n'$ étant strictement compris entre -1 et 1, on en déduit qu'il est nul donc $n = n'$.
Montrons maintenant qu'un tel entier n existe.

- Si $x = 0$, on choisit $n = 0$.

- Si $x > 0$, le principe archimédien montre l'existence d'un entier n_0 tel que $n_0 \times 1 > x \Leftrightarrow n_0 > x$. On note $A = \{k \in \mathbb{N}, \quad x < k\}$. L'ensemble A est non vide car il contient n_0 et il est contenu dans $\mathbb{N}$ donc il admet un plus petit élément $N = \min A$. Puisque $N \in A$, on a $N > x$ et comme $N - 1 < N$, on en déduit que $N - 1 \notin A$ (N est le plus petit des éléments de A) donc $N - 1 \leqslant x$. On choisit alors $n = N - 1$ et l'on a bien $n \leqslant x < n + 1$.

- Si $x < 0$, alors $-x > 0$. Il existe alors un entier N tel que $N \leqslant -x < N+1 \Leftrightarrow -N-1 < x \leqslant -N$.
  Si $x = -N$, on choisit $n = -N$ et l'on a bien $n = x \leqslant x < n+1$. Si $x < -N$, alors $-N-1 < x < -N$ et l'on choisit $n = -N-1$. Pour cet entier n, on a $n \leqslant x < n+1$.

■

Définition 5 (Partie entière)
Soit $x \in \mathbb{R}$. L'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$ est appelé partie entière de x et noté $E(x)$. On la note parfois $[x]$. Le réels $\{x\} = x - E(x) \in [0, 1[$ est appelé partie fractionnaire de x.

Remarque 4
Il est fort utile de se rappeler que $E(x)$ est le plus grand entier inférieur à x et $E(x)+1$ est le plus petit entier strictement supérieur à x (par la construction que nous en avons donné).

Exercice 6
Calculer $E\left(\dfrac{7}{2}\right)$, $E(1)$, $E(-\pi)$ et $E\left(-\dfrac{3}{5}\right)$.

Méthode 2 (Démontrer une propriété mettant en jeu une partie entière)
Lorsqu'il est nécessaire de manipuler l'entier $E(x)$ pour un certain réel x, on le remplace par un entier k en supposant que $k \leqslant x < k+1$.

Exercice 7
Montrer que pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a $E(x) + E(y) \leqslant E(x+y) \leqslant E(x) + E(y) + 1$.
Montrer (au moyen d'un exemple) que l'inégalité peut être stricte.

Solution 5
On note $n = E(x)$ et $m = E(y)$. Par définition, on a $n \leqslant x < n+1$ et $m \leqslant y < m+1$. En additionnant ces deux encadrements, on a $n + m \leqslant x + y < n + m + 2$.
L'entier $n+m$ est inférieur à $x+y$ et comme $E(x+y)$ est le plus grand entier inférieur à $x+y$, on en déduit que

$$n + m \leqslant E(x+y) \Leftrightarrow E(x) + E(y) \leqslant E(x+y)$$

L'entier $n+m+2$ est strictement supérieur à $x+y$ et $E(x+y)+1$ est le plus petit entier strictement supérieur à $x+y$ donc

$$E(x+y) + 1 \leqslant n + m + 2 \Leftrightarrow E(x+y) \leqslant n + m + 1 \Leftrightarrow E(x+y) \leqslant E(x) + E(y) + 1$$

Exercice 8
Montrer que si $x \in \mathbb{Z}$, on a $E(x) + E(-x) = 0$ et si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $E(x) + E(-x) = -1$.

Solution 6
Si $x \in \mathbb{Z}$, $-x \in \mathbb{Z}$ et $E(x) + E(-x) = x + (-x) = 0$.
Si $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on note $n = E(x)$ et $m = E(-x)$. On a $n < x < n+1$ et $m < -x < m+1$ (les égalités ne pouvant avoir lieu puisque x et $-x$ ne sont pas des entiers relatifs. En additionnant les deux encadrements, on obtient

$$n + m < 0 < n + m + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} n + m < 0 \\ 0 < n + m + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + m < 0 \\ -2 < n + m \end{cases}$$

Par conséquent, $n+m$ est un entier strictement compris entre -2 et -1 donc $n + m = -1 \Leftrightarrow E(x) + E(-x) = -1$.

Proposition 5
On a les résultats suivants :

1. *Quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$, alors $E(x) \leqslant E(y)$ (mais on peut avoir $x < y$ et $E(x) = E(y)$);*
2. *Quels que soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $E(n+x) = n + E(x)$;*
3. *Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Z}$ si et seulement si $x = E(x)$.*

Preuve :

1. On pose $n = E(x)$ et $m = E(y)$. Par définition de n, on a $n \leqslant x$ et $x \leqslant y$ donc $n \leqslant y$. Puisque m est le plus grand entier inférieur à y, on en déduit que $n \leqslant m \Leftrightarrow E(x) \leqslant E(y)$. Par contre, si $x = 0$ et $y = \dfrac{1}{2}$, on a $x < y$ et $E(x) = E(y) = 0$;

2. Posons $k = E(x)$. Alors $k \leqslant x < k+1$ et $n+k \leqslant n+x < n+k+1$. Comme $n+k \in \mathbb{Z}$, on en déduit que
$$n+k = E(n+x) \Leftrightarrow n+E(x) = E(n+x)$$
3. Il est clair que si $E(x) = x$, alors $x \in \mathbb{Z}$. Supposons réciproquement que $x = n \in \mathbb{Z}$, alors $n = x \leqslant x < x+1 = n+1$, donc $n = E(x)$.

■

3 Distance dans $\mathbb{R}$, topologie

Nous allons définir une notion de distance entre deux nombres réels, qui nous permettra ensuite de parler de limites, d'approximation de densité. Cette distance est définie au moyen de la valeur absolue. La notion de densité d'une partie E de $\mathbb{R}$ permet de formaliser le fait que les réels x sont approximables par des éléments de E.

3.1 Valeur absolue et distance

Définition 6 (Valeur absolue)
On appelle valeur absolue d'un réel x le réel positif noté $|x|$ et défini par :
$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \geqslant 0 \\ x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} = \max(-x, x)$$

Proposition 6
Quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :
$$x \leqslant |x|, \quad -x \leqslant |x|, \quad |xy| = |x| \times |y|, \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$
(la dernière égalité n'étant valable que pour $y \neq 0$).

Proposition 7 (Inégalité triangulaire)
Pour $x, y \in \mathbb{R}$: $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

Preuve :
On a $|x+y| = \pm(x+y) = (\pm x) + (\pm y) \leqslant |x| + |y|$. ■

Remarque 5
Notons les deux équivalences suivantes, très simples mais extrêmement utiles :
$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow (x \leqslant a \text{ et } -x \leqslant a) \Leftrightarrow |x-a| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon \leqslant x \leqslant a+\varepsilon \Leftrightarrow x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$$

Corollaire 1
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $||x| - |y|| \leqslant |x-y|$.

Proposition 8
En remarquant que $x = (x-y)+y$ et $y = (y-x)+x$, on a
$$\begin{aligned} |x| &= |(x-y)+y| \leqslant |x-y| + |y| \Leftrightarrow |x| - |y| \leqslant |x-y| \\ |y| &= |(y-x)+x| \leqslant |y-x| + |x| \Leftrightarrow |y| - |x| \leqslant |y-x| = |x-y| \Leftrightarrow -(|x|-|y|) \leqslant |x-y| \end{aligned}$$
donc $||x| - |y|| = \pm(|x| - |y|) \leqslant |x-y|$.

Proposition 9
Montrer qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si la partie $B = \{|x| \mid x \in A\}$ est majorée.

On appelle distance entre deux réels x et y le réel positif $|x-y|$. Cette notion de distance intervient dans tous les processus de calcul de limites (et, en particulier, les processus d'approximation d'un réel). Cette notion de distance satisfait les propriétés suivantes, pour $x, y, z \in \mathbb{R}$:

1. $|x-y| = 0$ si et seulement si $x = y$;
2. $|y-x| = |x-y|$;
3. $|x-z| \leqslant |x-y| + |y-z|$ (inégalité triangulaire).

3.2 Parties convexes et intervalles

Nous allons donner une définition générale de la notion d'intervalle qui permet d'englober tous les types d'intervalles de $\mathbb{R}$ rencontrés lors de l'enseignement secondaire (et uniquement ceux-ci).

Exercice 9
Montrer que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}^\times$ ne sont pas des parties convexes de $\mathbb{R}$.

Définition 7 (Droite numérique achevée)
On appelle droite numérique achevée, notée $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ où $+\infty,+\infty$ désignent deux éléments n'appartenant pas à $\mathbb{R}$ fixés une fois pour toutes. On prolonge la relation d'ordre définie sur $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en convenant que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $-\infty < x < +\infty$.

Définition 8
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$,

- *si A est non majoré, on convient de noté* $\sup A = +\infty$
- *si A est non minoré, on convient de noter* $\inf A = -\infty$.

Cette définition permet d'affirmer alors que tout sous-ensemble non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet nécessaire une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ (d'où le nom de droite achevée).

Définition 9 (Partie convexe de $\mathbb{R}$)
On appelle partie convexe de $\mathbb{R}$ toute partie C de $\mathbb{R}$ telle que, quels que soient $x, y \in C$, si $t \in \mathbb{R}$ et $x \leqslant t \leqslant y$, alors $t \in C$.

Définition 10 (Intervalles de $\mathbb{R}$)
On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme suivante

- $\{x \in \mathbb{R} \quad | \quad a \leqslant x \leqslant b\}$ *que l'on note* $[a, b]$
- $\{x \in \mathbb{R} \quad | \quad a \leqslant x < b\}$ *que l'on note* $[a, b[$
- $\{x \in \mathbb{R} \quad | \quad a < x \leqslant b\}$ *que l'on note* $]a, b]$
- $\{x \in \mathbb{R} \quad | \quad a < x < b\}$ *que l'on note* $]a, b[$
- $\{x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant a\}$ *que l'on note* $[a, +\infty[$
- $\{x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant a\}$ *que l'on note* $]a, +\infty[$
- $\{x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant b\}$ *que l'on note* $]-\infty, b]$,
- $\{x \in \mathbb{R}, \quad x < b\}$ *que l'on note* $]-\infty, b[$
- $\mathbb{R}$ *que l'on note* $]-\infty, +\infty[$*;*
- $\emptyset$ *(qui peut aussi s'écrire* $]a, b[$ *avec* $b < a$*.*

Proposition 10 (Détermination des parties convexes de $\mathbb{R}$)
Une partie non vide C de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement C est un intervalle. Dans ce cas, si l'on note $a = \inf A$ et $b = \sup A$, C est de la forme suivante : $[a, b], \quad [a, b[, \quad]a, b], \quad]a, b[$.

Preuve :
Je laisse le soin au lecteur de vérifier que tous les intervalles sont des convexes de $\mathbb{R}$.
Réciproquement, soit C un convexe non vide de $\mathbb{R}$.

- Si C est minoré et majoré et non vide donc $\inf C$ et $\sup C$ existe. On les note respectivement a et b.
  - $\underline{a \text{ et } b \in C}$: Par définition de a et b, pour tout $c \in C$, $a \leqslant c \leqslant b$ donc $C \subset [a, b]$. D'autre part, pour tout x tel que $a < x < b$, et a, b appartiennent à C donc $x \in C$ (par convexité), ce qui entraine que $[a, b] \subset C$ et l'on a bien $C = [a, b]$.

– Si $a \in C$ et $b \notin C$: Par définition de a et b, pour tout $c \in C$, $a \leqslant c < b$ (puisque $b \notin C$) donc $C \subset [a, b[$. D'autre part, soit $x \in [a, b[$, en choisissant $\varepsilon = \dfrac{b-x}{2} > 0$, il existe $c_\varepsilon \in C$ tel que

$$c_\varepsilon > b - \varepsilon \Leftrightarrow c_\varepsilon > \frac{b+x}{2} \Rightarrow c_\varepsilon > x \quad \left(\frac{b+x}{2} - x = \frac{b-x}{2} > 0 \Rightarrow \frac{b+x}{2} > x\right)$$

Ainsi, on a $a \leqslant x \leqslant c_\varepsilon$ et a, c_ε appartiennent à C donc, par convexité, $x \in C$, ce qui entraine que $[a, b[\subset C$ et l'on a bien $C = [a, b[$.

– Si $a \notin C$ et $b \in C$: Par définition de a et b, pour tout $c \in C$, $a < c \leqslant b$ (puisque $a \notin C$) donc $C \subset]a, b]$. D'autre part, soit $x \in]a, b]$, en choisissant $\varepsilon = \dfrac{x-a}{2} > 0$, il existe $c_\varepsilon \in C$ tel que

$$c_\varepsilon < a - \varepsilon \Leftrightarrow c_\varepsilon < \frac{a+x}{2} \Rightarrow c_\varepsilon < x \quad \left(x - \frac{a+x}{2} = \frac{x-a}{2} > 0 \Rightarrow \frac{a+x}{2} > x\right)$$

Ainsi, on a $a < x \leqslant c_\varepsilon$ et a, c_ε appartiennent à C donc, par convexité, $x \in C$, ce qui entraine que $]a, b] \subset C$ et l'on a bien $C =]a, b]$.

– Si $a \notin C$ et $b \notin C$: Par définition de a et b, pour tout $c \in C$, $a < c < b$ (puisque $a, b \notin C$) donc $C \subset]a, b|$. D'autre part, soit $x \in]a, b[$, en choisissant $\varepsilon = \dfrac{x-a}{2} > 0$, il existe $c_\varepsilon \in C$ tel que

$$c_\varepsilon < a - \varepsilon \Leftrightarrow c_\varepsilon < \frac{a+x}{2} \Rightarrow c_\varepsilon < x \quad \left(x - \frac{a+x}{2} = \frac{x-a}{2} > 0 \Rightarrow \frac{a+x}{2} > x\right)$$

et en choisissant $\varepsilon = \dfrac{b-x}{2} > 0$, il existe $c'_\varepsilon \in C$ tel que

$$c'_\varepsilon > b - \varepsilon \Leftrightarrow c'_\varepsilon > \frac{b+x}{2} \Rightarrow c'_\varepsilon > x \quad \left(\frac{b+x}{2} - x = \frac{b-x}{2} > 0 \Rightarrow \frac{b+x}{2} > x\right)$$

Ainsi, on a $c_\varepsilon < x < c'_\varepsilon$ et $c_\varepsilon, c'_\varepsilon$ appartiennent à C donc, par convexité, $x \in C$, ce qui entraine que $]a, b[\subset C$ et l'on a bien $C =]a, b[$.

- Si C est minoré et non majoré, donc $\inf C$ existe et on le note a.

  – Si $a \in C$, par définition de a, on a $\forall c \in C$, $a \leqslant c$ donc $[a, +\infty[\subset C$. Soit $x \in [a, +\infty[$, puisque C n'est pas majoré, il existe $\beta \in C$ tel que $x < \beta$ (sinon C serait majoré par x) donc $a \leqslant x < \beta$. Puisque a et β appartiennent à C, on en déduit, par convexité, que $x \in C$ donc $[a, +\infty[\subset C$ et l'on a bien $C = [a, +\infty[$.

  – Si $a \notin C$, par définition de a, on a $\forall c \in C, \quad a < c$ donc $]a, +\infty[\subset C$. Soit $x \in]a, +\infty[$, en choisissant $\varepsilon = \dfrac{x-a}{2} > 0$, il existe $c_\varepsilon \in C$ tel que

  $$c_\varepsilon < a - \varepsilon \Leftrightarrow c_\varepsilon < \frac{a+x}{2} \Rightarrow c_\varepsilon < x \quad \left(x - \frac{a+x}{2} = \frac{x-a}{2} > 0 \Rightarrow \frac{a+x}{2} > x\right)$$

  En outre, puisque C n'est pas majoré, il existe $\beta \in C$ tel que $x < \beta$ (sinon C serait majoré par x) donc $c_\varepsilon < x < \beta$. Puisque c_ε et β appartiennent à C, on en déduit, par convexité, que $x \in C$ donc $]a, +\infty[\subset C$ et l'on a bien $C =]a, +\infty[$.

- Si C est majoré et non minoré, donc $\sup C$ existe et on le note b

  – Si $b \in C$, par définition de b, on a $\forall c \in C$, $c \leqslant a$ donc $]-\infty, b] \subset C$. Soit $x \in]-\infty, b]$, puisque C n'est pas minoré, il existe $\alpha \in C$ tel que $\alpha < x$ (sinon C serait minoré par x) donc $\alpha \leqslant x < b$. Puisque α et b appartiennent à C, on en déduit, par convexité, que $x \in C$ donc $]-\infty, b] \subset C$ et l'on a bien $C =]-\infty, b]$.

  – Si $b \notin C$, par définition de a, on a $\forall c \in C, \quad c < b$ donc $]-\infty, b[\subset C$. Soit $x \in]-\infty, b[$, en choisissant $\varepsilon = \dfrac{b-x}{2} > 0$, il existe $c_\varepsilon \in C$ tel que

  $$c'_\varepsilon > b - \varepsilon \Leftrightarrow c'_\varepsilon > \frac{b+x}{2} \Rightarrow c'_\varepsilon > x \quad \left(\frac{b+x}{2} - x = \frac{b-x}{2} > 0 \Rightarrow \frac{b+x}{2} > x\right)$$

  En outre, puisque C n'est pas minoré, il existe $\alpha \in C$ tel que $\alpha < x$ (sinon C serait minoré par x) donc $\alpha < x < c_\varepsilon$. Puisque c_ε et α appartiennent à C, on en déduit, par convexité, que $x \in C$ donc $]-\infty, b[\subset C$ et l'on a bien $C =]-\infty, b[$.

- Si C n'est ni majoré ni minoré, alors quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha \in C$ tel que $\alpha < x$ (sinon C serait minoré par x) et il existe $\beta \in C$ tel que $x < \beta$ (sinon C serait majoré par x). Par conséquent on a $\alpha < x < \beta$ avec $\alpha, \beta \in C$, donc $x \in C$ puisque C est convexe donc $\mathbb{R} \subset C$ et $C \subset \mathbb{R}$ (quand même !) donc $C = \mathbb{R}$.

■

3.3 Densité

Une partie de $\mathbb{R}$ est dite dense si les réels contenus dans cette partie permettent d'approcher de manière arbitrairement précise tous les réels. On pense bien entendu immédiatement à l'approximation des nombres réels par des rationnels, mais nous donnerons également d'autres exemples.

Définition 11 (Partie dense)
On dit qu'une partie E de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, quel que soit $x \in \mathbb{R}$ et quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $x' \in E$ tel que $|x - x'| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 6
Si on convient qu'un réel x est approximable dans une partie E de $\mathbb{R}$ si et seulement si quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $x' \in E$ tel que $|x - x'| \leqslant \varepsilon$, alors E est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout $x \in \mathbb{R}$ est approximable dans E.

Exemple 7
Pour approcher un réel x, on utilise souvent, plutôt que des nombres rationnel quelconques, des nombres décimaux. Ces nombres s'écrivent $\dfrac{p}{10^q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ et leur ensemble est noté $\mathbb{D}$, c'est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ et nous allons montrer que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{N}$, on note $x_q = \dfrac{E(10^q x)}{10^q}$. On a, par définition de la partie entière,

$$E(10^q x) \leqslant 10^q x < 10^q x + 1 \underset{\div 10^q}{\Leftrightarrow} x_q \leqslant x < x_q + \frac{1}{10^q} \Leftrightarrow 0 \leqslant x - x_q < \frac{1}{10^q} \Rightarrow |x - x_q| \leqslant \frac{1}{10^q}$$

Si on fixe maintenant $\varepsilon > 0$, il existe un entier $q \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{10^q} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow 10^q \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ (cf. premier exercice de la section 2) donc il existe un entier q tel que $|x - x_q| \leqslant \dfrac{1}{10^q} \leqslant \varepsilon$, ce qui démontrerque $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Le décimal x_q est l'approximation par défaut à 10^{-q} près de x et $x_q + \dfrac{1}{10^q}$ est son approximation décimal par excès à 10^{-q} près.

Proposition 11 (Caractérisation de la densité au moyen d'intervalles)
Soit E une partie de $\mathbb{R}$. On a équivalence entre :

1. *E est dense dans $\mathbb{R}$;*
2. *Tout intervalle non vide et non réduit à un point rencontre E.*
3. *Tout intervalle borné, ouvert et non vide rencontre E;*

Preuve :

- (1) $\Rightarrow$ (2) :Supposons tout d'abord E dense dans $\mathbb{R}$ et considérons un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Il contient au moins deux réels distincts a et b avec $a < b$. On considère le réel $\dfrac{a+b}{2}$ qui est le milieu de $[a, b] \subset I$ et on choisit $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$ (distance du milieu aux deux extrémités de $[a, b]$), il existe $x_\varepsilon \in E$ tel que

$$\left|\frac{a+b}{2} - x_\varepsilon\right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \left|x_\varepsilon - \frac{a+b}{2}\right| \leqslant \frac{b-a}{2} \Leftrightarrow -\frac{b-a}{2} \leqslant x_\varepsilon - \frac{a+b}{2} \leqslant \frac{b-a}{2} \Leftrightarrow a \leqslant x_\varepsilon \leqslant b$$

  Par conséquent, $x_\alpha \in [a, b] \subset I$ et $x_\varepsilon \in E$ donc $E \cap I \neq \emptyset$

- (2) $\Rightarrow$ (3) : Si $]a, b[$ est non vide et borné, alors $a + \dfrac{1}{3}(b - a)$ et $a + \dfrac{2}{3}(b - a)$ sont deux points distincts et $]a, b[$.

- (3) $\Rightarrow$ (1) : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. L'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ est ouvert, non vide et borné donc il rencontre E. Il existe par conséquent

$$x_\varepsilon \in E \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\Leftrightarrow |x - x_\varepsilon| \leqslant \varepsilon$$

  donc E est dense dans $\mathbb{R}$.

■

Proposition 12 (Densité des rationnels et des irrationnels)
Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Preuve :
Nous avons montré précédemment que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc tout réel est approximable par des décimaux, qui sont des rationnels donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Pour l'autre densité, soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, il existe $x_\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - x_\varepsilon| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, il existe un entier n tel que $\dfrac{\sqrt{2}}{n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{2\sqrt{2}}{\varepsilon}$ et l'on choisit $n(\varepsilon) = E\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\varepsilon}\right) + 1$. Posons $y_\varepsilon = x_\varepsilon + \dfrac{\sqrt{2}}{n(\varepsilon)}$. Pour commencer, $y_\varepsilon \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (sinon, $y_\varepsilon \in \mathbb{Q}$ et x_ε aussi donc $\sqrt{2} = n(\varepsilon)\,[y_\varepsilon - x_\varepsilon] \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde) et, par l'inégalité triangulaire, on a

$$|x - y_\varepsilon| = \left|x - x_\varepsilon - \frac{\sqrt{2}}{n(\varepsilon)}\right| \leqslant |x - x_\varepsilon| + \frac{\sqrt{2}}{n(\varepsilon)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ce qui démontre que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. ■

Remarque 7
Comme $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, on a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{D}$. Comme $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (il permet d'approximer tous les réels), on a *a fortiori* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{D}$ dense dans $\mathbb{R}$ (puisque tout élément de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est élément de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{D}$)

3.4 Trois exercices pour finir

Exercice 10
On considère la fonction f définie sur $[-2, 2]$ par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-2;2] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x^2 - x - 1 \end{array} \right.$$

Calculer $\sup\{f(x) \quad | \quad x \in [-2, 2]\}$.

Solution 7
Comme $f(x)$ est un polynôme en x, cette fonction est dérivable sur $[-2, 2]$ et on a, pour $x \in [-2, 2]$, $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$. D'après le cours de terminale, on sait que si f possède un extremum relatif en x appartenant à l'intervalle ouvert $]-2, 2[$, alors $f'(x) = 0$. Mais cette condition n'est pas nécessaire lorsque f possède un extremum relatif en -2 ou en 2. Par conséquent, le maximum de f sur $[-2, 2]$ se trouvera parmi $f(-2)$, $f(-2)$ ainsi que les valeurs de $f(x)$ pour $x \in]-2, 2[$ tel que $f'(x) = 0$. L'équation $f'(x) = 0$ a pour discriminant réduit $\delta = 1 + 3 = 4$ et pour solutions $x_1 = \dfrac{-1-2}{3} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-1+2}{3} = \dfrac{1}{3}$. Ces deux solutions appartiennent à $]-2, 2[$. Il ne reste donc plus qu'à déterminer le réel le plus grand parmi $f(-2), f(x_1), f(x_2), f(2)$:

$$f(-2) = -8 + 4 + 2 - 1 f(2) = 8 + 4 - 2 - 1 = 9, \quad f(x_1) = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$$

$$f(x_2) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 1 = \frac{1 + 3 - 9 - 27}{27} = \frac{-32}{27}$$

On en déduit que le maximum de f sur $[-2, 2]$ est atteint en 2 et vaut 9.

Exercice 11
On admet l'existence et les propriétés de la racine carré d'un réel positif.
Soit $a \in \mathbb{R}_+$, on considère l'ensemble $A = \{r \in \mathbb{Q} \quad | \quad r^2 < a\}$

1. Montrer que A admet une borne supérieure.
2. Justifier que $\forall \varepsilon > 0$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{a} - \varepsilon < r < \sqrt{a}$.
3. En déduire $\sup A$.

Solution 8
1. L''ensemble A est non vide (car il contient 0) et majoré dans $\mathbb{R}$ par $\sqrt{a}$ donc il admet une borne supérieure.
2. L'ensemble des rationnels étant dense dans $\mathbb{R}$, on peut affirmer que $\forall \varepsilon > 0$, l'intervalle $]\sqrt{a} - \varepsilon, \sqrt{a}]$ rencontre $\mathbb{Q}$ donc il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{a} - \varepsilon < r < \sqrt{a}$.
3. En choisissant $\varepsilon < \sqrt{a}$, on a $0 < \sqrt{a} - \varepsilon < r < \sqrt{a}$ donc on peut élever au carré, ce qui donne

$$\left(\sqrt{a} - \varepsilon\right)^2 < r^2 < a$$

donc $r \in A$. Ainsi, pour tout $\varepsilon \in]0, \sqrt{a}[$, il existe $r \in A$ tel que $\sqrt{a} - \varepsilon < r < \sqrt{a}$, ce qui entraine que $\sqrt{a} = \sup A$.

Remarque 8
Si $a \geqslant 1$, on peut justifier l'existence de la borne supérieure M_a de A (en remarquant que A est majoré par a). Ensuite, on montre que $(M_a)^2 = a$ en procédant comme pour la preuve de l'inexistence dans $\mathbb{Q}$ d'une borne supérieure de $A = \left\{x \in \mathbb{Q}_+, \quad x^2 < 2\right\}$ (c'est délicat, mais si $(M_a)^2 < a$, on trouve un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $(M_a + \varepsilon)^2 < a$ donc $M_a + \varepsilon \in A$, ce qui entraine que $M_a + \varepsilon \leqslant M_a$, ce qui est absurde, et si $(M_a)^2 > a$, on trouve un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $(M_a - \varepsilon)^2 > a$, ce qui montre que $M_a - \varepsilon$ est un majorant de A donc $M_a - \varepsilon \geqslant M_a$ ce qui est absurde). Ceci étant acquis, on a montré qu'il existe un réel $M_a \geqslant 0$ tel que $(M_a)^2 = a$. Il est facile alors de voir qu'il est unique ($x^2 = y^2 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0$ avec $x, y \geqslant 0$) et tous les propriétés de la racine carrée s'obtiennent alors sans difficulté.

Exercice 12
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $a \leqslant b$ quels que soient $a \in A$ et $b \in B$.
Montrer que A possède une borne supérieure, B une borne inférieure et que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.
Montrer que $\sup(A) = \inf(B)$ si et seulement si quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que $|y - x| < \varepsilon$.

Solution 9
Comme B est non vide, B possède au moins un élément y qui, vu l'hypothèse faite sur A et B, est un majorant de A. De même, A étant non vide, elle possède au moins un élément x qui est un minorant de B. Ainsi A et B sont des parties non vides de $\mathbb{R}$, respectivement majorée et minorée. A possède donc une borne supérieure et B une borne inférieure. y étant un mojorant de A, on aura, par définition de la borne supérieure, $\sup(A) \leqslant y$. Ceci étant vrai quel que soit $y \in B$, on en déduit que $\sup(A)$ est un minorant de B et, par conséquent, $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.
Supposons maintenant que $\sup(A) = \inf(B)$ et considérons $\varepsilon > 0$. Par définition des bornes supérieures et inférieures, on sait qu'il existe $x \in A$ et $y \in B$ tel que $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < x \leqslant \sup(A)$ et $\inf(B) \leqslant y < \inf(B) + \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors $y - x < \varepsilon$ et donc, tenant compte du fait que $x \leqslant y$, $|y - x| < \varepsilon$. Supposons maintenant que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que $|y - x| < \varepsilon$. Comme on a les inégalités $x \leqslant \sup(A) \leqslant \inf(B) \leqslant y$, on en déduit que $|\inf(B) - \sup(A)| < \varepsilon$ et ce, quel que soit $\varepsilon > 0$. Par conséquent, $\inf(B) = \sup(A)$.