Courbes paramétrées

Abdellah Bechata

www.mathematiques.fr.st

Dans la suite, I désignera toujours un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point (*i.e.* contenant au moins deux points). Une courbe paramétrée f est simplement une application de I dans le plan $\mathcal{P}$ qui, à tout $t \in I$ (que l'on peut physiquement interpréter comme le temps) fait correspondre un point $f(t)$ du plan. Nous supposerons une fois pour toutes $\mathcal{P}$ orienté et muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Ainsi, tout point M du plan pourra être décrit au moyen de ses coordonnées (x, y) dans ce repère et nous noterons $M = (x, y)$. En particulier, nous écrirons $f(t) = (x(t), y(t))$ où x et y sont deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ appelées composantes de f (et nous considérerons f non plus comme une fonction à valeurs dans le plan $\mathcal{P}$ mais comme une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$). Lorsque l'on manipule des points et des vecteurs à l'aide de leurs coordonnées uniquement, on prend le risque de les confondre. Nous conviendrons donc de la notation suivante : si $A = (x, y)$, la notation A désigne le point (de coordonnées (x, y)) et la notation $\overrightarrow{A}$ désigne le vecteur de mêmes coordonnées. En particulier, $\overrightarrow{f}(t)$ désignera le vecteur de coordonnées $(x(t), y(t))$. Nous allons commencer par définir quelques outils (continuité, dérivabilité, etc.) pour étudier les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ puis nous les utiliserons pour l'étude des courbes paramétrées.

1 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Nous allons étendre ici les notions de limite, continuité et dérivabilité (vues en classe de terminale dans le cadre des fonctions à valeurs réelles) aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Pour simplifier les définitions, convenons d'appeler point adhérent à I un élément de I ou l'une de ses extrémités. En particulier, si I n'est pas minoré (respectivement majoré) nous considérerons $-\infty$ (respectivement $+\infty$) comme un point adhérent à I. Pour édudier la limite éventuelle en a d'une fonction de I dans $\mathbb{R}$, il faut que a soit adhérent à I. Par contre, pour étudier la continuité (ainsi que la dérivabilité) de cette même fonction en a, il faut que a appartienne à I.

1.1 Limites, continuité et dérivabilité

Définition 1
Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}^2$ de composantes (x, y) a pour limite $l = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ en a (adhérent à I) si et seulement si la fonction x a pour limite x_0 en a et la fonction y a pour limite y_0 en a. Cette limite, lorsqu'elle existe, est notée $\lim_{t \mapsto a} f(t)$ ou $\lim_a f$. On note aussi $f(t) \underset{t \to a}{\to} l$ ou $f \to l$. On dit que $f : I \mapsto \mathbb{R}^2$ est continue en $a \in I$ si $\lim\limits_{t \mapsto a} f(t) = f(a)$ et on dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point $a \in I$.

Proposition 1 (Limites et distance)
Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}^2$ de composantes (x, y), a adhérent à I et $l = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. La fonction f a pour limite l en a si et seulement si la fonction à valeurs réelles :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} \end{array} \right.$$

tend vers 0 lorsque t tend vers a.

Preuve :
Il est clair que, si $x(t) - x_0$ et $y(t) - y_0$ tendent vers 0 lorsque t tend vers a, la fonction d fait de même. Réciproquement, supposons que d tende vers 0 en a, on écrit alors :

$$|x(t) - x_0| \leqslant \|f(t) - l\|, \quad |y(t) - y_0| \leqslant \|f(t) - l\|$$

et ceci montre que $x(t) - x_0$ et $y(t) - y_0$ tendent vers 0 quand t tend vers a. ■

Remarque 1
La proposition précédente traduit le fait que la définition de limite pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est conforme à l'intuition : $f(t)$ tend vers l lorsque t tend vers a si et seulement si la distance du point $f(t)$ au point l tend vers 0 lorsque t tend vers a. De plus, vu la définition de la limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ en un point, on en déduit immédiatement que :

- f est continue en a si et seulement si x et y le sont;
- f est continue sur I si et seulement si x et y sont continues sur I.

Exercice 1
Déterminer si la fonction f définie par $f(t) = (x(t), y(t))$ possède une limite en 0 dans chacun des cas suivants :

$$\begin{cases} x(t) = t & y(t) = \dfrac{1}{t} \\ x(t) = \dfrac{\cos t}{t} & y(t) = \dfrac{\sin t}{t} \\ x(t) = \dfrac{\tan t}{t} & y(t) = \dfrac{\sin t}{t} \end{cases}$$

Solution 1
Notons que les fonctions obtenues sont toujours définies au voisinage de 0. Dans les deux premiers cas, l'une des deux composantes diverge en 0 et f n'a donc pas de limite en 0. Dans le dernier cas, les deux composantes convergent vers 1 et $f(t)$ admet donc $(1, 1)$ pour limite en 0.

1.2 Dérivabilité

Définition 2
On dit que $f : I \mapsto \mathbb{R}^2$ admet pour dérivée $l = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ en $a \in I$ si et seulement si x admet pour dérivée x_0 en a et y admet pour dérivée y_0 en b et on note alors $f'(a) = (x'(a), y'(a))$. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$. La fonction :

$$\begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & f'(t) \end{cases}$$

est alors appelée dérivée de f et notée f'.

Définition 3
Soit k un entier naturel. On dit que $f : I \mapsto \mathbb{R}^2$ est de classe C^k sur I si et seulement si x et y sont k fois dérivables sur I et que $x^{(k)}$ et $y^{(k)}$ sont continues sur I.
On dit que f est de classe C^∞ sur I si et seulement elle est C^k sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$

Proposition 2 (Dérivée et taux d'accroissement)
Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $a \in I$. On note x et y les composantes de f. On a équivalence entre :

1. *f est dérivable en a;*
2. *La fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$:*
$$\tau : \begin{cases} I \backslash \{a\} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a} \end{cases}$$
possède une limite lorsque t tend vers a (et cette limite est alors égale à $f'(a)$).

Preuve :
Les composantes de la fonction g s'écrivent :

$$x_1 : \begin{cases} I \backslash \{a\} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \dfrac{x(t) - x(a)}{t - a} \end{cases}, \quad y_1 : \begin{cases} I \backslash \{a\} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \dfrac{y(t) - y(a)}{t - a} \end{cases}$$

On voit alors que x et y sont dérivables au point a si et seulement si les composantes de g possèdent une limite finie en a donc si et seulement si g possède une limite en a. Il est par ailleurs clair que cette limite sera le point $(x'(a), y'(a))$. ■

Remarque 2
Si f, de composantes (x, y), est dérivable, alors f' a pour composantes (x', y'). Si f est dérivable en un point a de I, elle est bien sûr continue en ce point. Si la dérivée f' de f est elle-même dérivable, sa dérivée notée f'' est appelée dérivée seconde de f. On peut itérer ce procédé en définissant, lorsqu'elles existent, les dérivée de f à l'ordre 3, 4,etc. On les note $f^{(3)}$ (ou f'''), $f^{(4)}$,etc.

Exercice 2
On pose pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Montrer que f est dérivable et calculer $\overrightarrow{f}'(t)$. Quelle est la dérivée par rapport à θ de $\overrightarrow{u}(\theta)$.

Solution 2
On a $\overrightarrow{f}'(t) = (-\sin t, \cos t)$. La dérivée de $\overrightarrow{u}(\theta)$ est $\overrightarrow{v}(\theta)$.

Exercice 3
1. Soit une fonction $a : I \to \mathbb{R}$. On considère la fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\forall t \in I, \quad f(t) = (t, a(t))$.
   Décrire l'allure de l'ensemble des points $f(t)$ pour t parcourant I.
2. On suppose que a réalise une bijection de I sur J. On considère alors la fonction g à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\forall t \in I, \quad g(t) = (a(t), t)$.
   Décrire l'allure de l'ensemble des points $g(t)$ pour t parcourant I.

Solution 3
1. Les points obtenus sont ceux de la courbe représentative de la fonction a.
2. Si l'on pose $x = a(t)$ et $y = t$, on a $x = a(y) \Leftrightarrow a^{-1}(x) = y$, autrement dit, les points obtenus sont ceux de la courbe représentative de la fonction a^{-1}.

1.3 Dérivée de quelques fonctions

Théorème 1 (Dérivée des fonctions vectorielles usuelles)
Soient f et g des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}^2$ et soit ϕ une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$, alors :

- *les fonctions $t \mapsto \overrightarrow{f}(t) + \overrightarrow{g}(t)$ et $t \mapsto \phi(t)\overrightarrow{f}(t)$, de I dans $\mathbb{R}^2$, sont dérivables et leur dérivée est donnée par :*
$$(\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g})'(t) = \overrightarrow{f}'(t) + \overrightarrow{g}'(t), \quad (\phi\overrightarrow{f})'(t) = \phi'(t)\overrightarrow{f}(t) + \phi(t)\overrightarrow{f}'(t)$$
- *les fonctions $t \mapsto < \overrightarrow{f}(t) \mid \overrightarrow{g}(t) >$ et $t \mapsto \det(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}(t))$, de I dans $\mathbb{R}$, sont dérivables et leur dérivée est donnée par :*
$$< \overrightarrow{f} \mid \overrightarrow{g} >' (t) = < \overrightarrow{f}'(t) \mid \overrightarrow{g}(t) > + < \overrightarrow{f}(t) \mid \overrightarrow{g}'(t) >$$
$$\det(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})'(t) = \det(\overrightarrow{f}'(t), \overrightarrow{g}(t)) + \det(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}'(t))$$

Preuve :
Notons x_1 et y_1 (respectivement x_2 et y_2) les composantes de f (respectivement g). On a, pour $t \in I$:
$$< f(t) \mid g(t) >= x_1(t)x_2(t) + y_1(t), y_2(t), \quad \det(f(t), g(t)) = x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t)$$
Comme x_1, y_1, x_2, y_2 sont de classes $\mathcal{C}^k$ sur I, les fonctions $\det(f, g)$ et $< f \mid g >$ sont également de classe $\mathcal{C}^k$ (obtenues par sommes et produits). Ensuite, on écrit :
$$< f \mid g >'= x_1'x_2 + x_1x_2' + y_1'y_2 + y_1y_2' = (x_1'x_2 + y_1'y_2) + (x_1x_2' + y_1y_2') =< f' \mid g > + < f \mid g' >$$
$$(\det(f, g))' = x_1'y_2 + x_1y_2' - x_2'y_1 - x_2y_1' = (x_1'y_2 - x_2y_1') + (x_1y_2' - x_2'y_1) = \det(f', g) + \det(f, g')$$
d'où le résultat. ■

Corollaire 1 (Dérivée de la norme)
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}^2$ dérivable. La fonction $t \mapsto \left\|\overrightarrow{f}(t)\right\|^2$, de I dans $\mathbb{R}$, est alors dérivable et sa dérivée est donnée par :
$$\left(\left\|\overrightarrow{f}\right\|^2\right)'(t) = 2 < \overrightarrow{f}'(t) \mid \overrightarrow{f}(t) >$$

Remarque 3
On déduit de ce corollaire les deux résultats suivants :

- le vecteur dérivé $\overrightarrow{f}'(t)$ d'une application f de I dans $\mathbb{R}^2$, dérivable et de norme constante, est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{f}(t)$ (ce résultat est très utile en physique);
- si $f : I \mapsto \mathbb{R}^2$ est dérivable et ne s'annule pas sur I, alors l'application $t \mapsto \|f(t)\|$, de I dans $\mathbb{R}$, est dérivable et sa dérivée est donnée par :
$$\left\|\overrightarrow{f}\right\|'(t) = \frac{< \overrightarrow{f}'(t) \mid \overrightarrow{f}(t) >}{\left\|\overrightarrow{f}(t)\right\|}$$

Remarque 4
Dans la suite, les fonctions que nous manipulerons seront souvent de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 1$ ou $\mathcal{C}^\infty$. Pour $k \in \mathbb{N}$, une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ si et seulement si elle est dérivable au moins k fois et sa dérivée k-ième est continue (les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ sont donc les fonctions continues). Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ quel que soit k. Les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 1$ sont souvent plus agréables à manipuler que les fonctions simplement k fois dérivables.

2 Etude complète d'une courbe paramétrée

Définition 4
On appelle courbe paramétrée (ou arc paramétré) tout couple (I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, et f est une fonction de I dans $\mathbb{R}^2$. On dit que la courbe (I, f) est de classe $\mathcal{C}^k$ lorsque f est de classe $\mathcal{C}^k$ (nous nous intéresserons principalement à des courbes de classe au moins $\mathcal{C}^1$) et on appelle support de la courbe paramétrée l'ensemble

$$f(I) = \{(x(t), y(t)) \quad / \quad t \in I\}.$$

Remarque 5 (Z)
Plusieurs courbes paramétrées différentes peuvent avoir le même support (de plus, certaines peuvent être extrêmement irrégulières et d'autres plus régulières). Ceci traduit simplement le fait qu'il y a plusieurs manières de parcourir le même trajet.

Méthode 1 (Plan d'étude d'une courbe paramétrée)
Considérons une courbe paramétrée (I, f) de composantes (x, y). Le plan d'étude d'une telle courbe est le suivant :

1. *Déterminer le domaine de définition D de f (le plus souvent, cet ensemble D ne sera pas fourni par l'énoncé, en pratique il s'agira soit d'une intervalle, soit d'une réunion de plusieurs intervalles) et réduire ensuite D au moyen de symétries afin d'obtenir le domaine d'étude D';*
2. *Etudier les variations de x et y sur D', ainsi que les limites particulières;*
3. *Déterminer les tangentes particulières;*
4. *Etudier les branches infinies;*
5. *Déterminer (éventuellement) les points multiples de la courbe;*
6. *Réaliser le tracé qui doit faire apparaitre tous les éléments mis en évidence au cours de l'étude précédente.*

On suppose dans la suite donnée une fonction f définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de composantes x et y. On suppose que D est une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

2.1 Réduction du domaine de définition

Remarque 6 (Z)
Nous allons voir différentes manières de réduire le domaine de définition de la courbe paramétrée à étudier. Cependant, bien qu'elles soient présentées séparément, on ne se privera pas, lors d'une étude concrète, à faire appel à plusieurs de ces techniques de manière à réduire le plus possible le domaine d'étude. De plus, la liste qui suit n'est pas exhaustive.

Le premier point à considérer est l'existence d'une période commune aux fonctions x et y. Une telle période commune est un réel $T > 0$ tel que, quel que soit $t \in D$, on ait :

$$t - T \in D, \quad t + T \in D, \quad x(t + T) = x(t), \quad y(t + T) = y(t)$$

Lorsqu'un tel T existe, on peut se contenter d'étudier la courbe sur l'intersection du domaine de définition D avec un intervalle de longueur T, par exemple $[0, T]$ ou $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ (on choisit plus souvent cette dernière forme, symétrique par rapport à 0, pour pouvoir faire ensuite une étude de parité).
On peut ensuite regarder les symétries obtenues par parité. Il faut pour cela que le domaine D soit symétrique par rapport à 0, autrement dit que quel que soit $t \in D$, on ait $-t \in D$. Dans ce cas :

- si $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, alors $f(-t) = f(t)$ et on peut limiter l'étude à $D \cap \mathbb{R}_+$;
- si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, alors $f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport l'axe des ordonnées.
  On peut alors limiter l'étude de f à $D \cap \mathbb{R}_+$, tracer son support sur $D \cap \mathbb{R}_+$ puis le compléter par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées;
- si $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, alors $f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport l'axe des abscisses.
  On peut alors limiter l'étude de f à $D \cap \mathbb{R}_+$, tracer son support sur $D \cap \mathbb{R}_+$ puis le compléter par symétrie par rapport à l'axe abscisses;
- si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, alors $f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'origine du repère.
  On peut alors limiter l'étude de f à $D \cap \mathbb{R}_+$, tracer son support sur $D \cap \mathbb{R}_+$ puis le compléter par symétrie par rapport à l'oigine du repère;

- si $x(-t) = y(t)$ et $y(-t) = x(t)$, alors $f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à la première bissectrice.
  On peut alors limiter l'étude de f à $D \cap \mathbb{R}_+$, tracer son support sur $D \cap \mathbb{R}_+$ puis le compléter par symétrie par rapport à la première bissectrice.

Lorsque le domaine considéré est un intervalle fermé et borné (a, b), ((a, b) signifiant soit $[a, b]$, soit $[a, b[$, soit $]a, b]$, soit $]a, b[$) on regarde souvent ce qui se passe lorsque t est changé en $t' = a + b - t$ (ceci signifie que t' est le symétrique de t par rapport au milieu de l'intervalle $[a, b]$. Dans ce cas :

- si $x(t') = x(t)$ et $y(t') = y(t)$, alors $f(t') = f(t)$ et on peut limiter l'étude à $\left(a, \dfrac{a+b}{2}\right)$;
- si $x(t') = -x(t)$ et $y(t') = y(t)$, alors $f(t')$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées donc on peut limiter l'étude à $\left(a, \dfrac{a+b}{2}\right)$, tracer son support sur cet intervalle puis le compléter par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées;
- si $x(t') = x(t)$ et $y(t') = -y(t)$, alors $f(t')$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe des abscisses donc on peut limiter l'étude à $\left(a, \dfrac{a+b}{2}\right)$, tracer son support sur cet intervalle puis le compléter par symétrie par rapport à l'axe des abscisses;
- si $x(t') = -x(t)$ et $y(t') = -y(t)$, alors $f(t')$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'origine donc on peut limiter l'étude à $\left(a, \dfrac{a+b}{2}\right)$, tracer son support sur cet intervalle puis le compléter par symétrie par rapport à l'origine du repère;
- si $x(t') = y(t)$ et $y(t') = x(t)$, alors $f(t')$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à la première bissectrice donc on peut limiter l'étude à $\left(a, \dfrac{a+b}{2}\right)$, tracer son support sur cet intervalle puis le compléter par symétrie par rapport à la première bissectrice.

Méthode 2 (Réduction du domaine de définition)

1. *Utiliser la périodicité commune éventuelle des fonctions x et y;*
2. *Utiliser la parité des fonctions x et y;*
3. *Si on obtient un intervalle fermé et borné, la symétrie par rapport au milieu de cet intervalle peut parfois permettre de diviser l'intervalle d'étude par 2.*

Exemple 1
Considérons la courbe paramétrée de composantes :

$$x : t \mapsto \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y : t \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$$

Son domaine de définition est $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0 et, pour $t \in \mathbb{R}$, on a $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. On peut donc limiter l'étude à $\mathbb{R}_+$ et compléter ensuite par symétrie par rapport à l'axe des abscisses (le support de cette courbe est le cercle unité privé du point $(-1, 0)$).

Exemple 2
Soit la courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}$ de composantes :

$$x : t \mapsto \sin(2t), \quad y : t \mapsto \cos(3t)$$

On a $x(t + 2\pi) = x(t)$ et $y(t + 2\pi) = y(t)$, donc les fonctions x et y admettent 2π comme période commune. On peut donc limiter l'étude à un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$. Cet intervalle est symétrique par rapport à 0 et pour $t \in [-\pi, \pi]$, on a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$. On peut donc limiter l'étude de la courbe à $[0, \pi]$ et compléter ensuite par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. On observe ensuite que, pour $t \in [0, \pi]$, on a $x(\pi - t) = \sin(2\pi - 2t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = \cos(\pi - 3t) = -y(t)$. On peut par conséquent limiter l'étude à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puis compléter ensuite par symétrie par rapport à O puis par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 4
Déterminer le domaine de définition et l'intervalle d'étude de la courbe parmétrée de composantes :

$$x : t \mapsto \sin(2t)\cos^2 t, \quad y : t \mapsto \cos(2t)\sin^2 t$$

Solution 4
Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ (domaine de définition) et admettent π comme période commune. On peut par conséquent limiter l'étude à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Cet intervalle est symétrique par rapport à 0 pour pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, ce qui entraine que $f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe des ordonnée. On peut donc limiter l'étude à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et compléter ensuite par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 5
Déterminer le domaine de définition et l'intervalle d'étude de la courbe paramétrée de composantes :

$$x : t \mapsto \cos^3 t, \quad y : t \mapsto \sin^3 t$$

Solution 5
Les fonctions x et y sont clairement définies sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions sin et cos étant 2π-périodiques, x et y le sont aussi et on peut donc limiter l'étude à un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$.
Come la fonction cos est paire et sin est impaire, on a $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ quel que soit t, ce qui entraine que $f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe des abscisses. On peut donc limiter l'étude aux paramètres positifs puis compléter par symétrie par rapport à l'axe des abscisses. On se restreint donc au domaine $[0, \pi]$.
Par ailleurs, on a pour $t \in [0, \pi]$, $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$, ce qui entraine que $f(\pi - t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées. On peut donc restreindre l'étude à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis compléter par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
Enfin, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y(t)$ et $y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x(t)$, ce qui entraine que $f\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à la première bissectrice. On peut donc encore limiter l'étude à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ puis compléter par symétrie par rapport à la première bissectrice.
Au final, on effectue l'étude de f sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on trace son support sur cet intervalle puis on complète par symétrie par rapport aux axes des ordonnées et des abscisses ainsi que par rapport à la première bissectrice.

2.2 Variations et limites de x et y

Il s'agit ici de faire un tableau de variations simultanées pour x et y sur le domaine d'étude (en général, x et y seront dérivables). On fera apparaitre les limites de x et y aux bornes du domaine et les paramètres t pour lesquels $x'(t) = 0$ ou $y'(t) = 0$. En particulier, lorsque $x'(t) = y'(t) = 0$, le point de paramètre t sera dit stationnaire (ou singulier). Dans le cas contraire (le plus fréquent) on parlera de point régulier. L'intérêt de cette distinction sera clarifée lors de la recherche des tangentes.

2.3 Tangentes

En toute généralité, une tangente à une courbe paramétrée se doit d'être la position limite des sécantes à cette courbe.

Définition 5 (Tangente à une courbe paramétrée)
Soient (I, f) une courbe paramétrée et $t_0 \in I$ et supposons que $f(t) \neq f(t_0)$ pour t suffisamment proche de t_0 (cette condition sera toujours satisfaite en pratique, même en présence de points multiples, et nous la supposerons toujours implicitement vraie). On dit que la courbe paramétrée admet une tangente au point de paramètre t_0 si pour tout $t \neq t_0$, il est possible de trouver $\overrightarrow{u}(t)$ vecteur directeur de la droite passant par $f(t_0)$ et $f(t)$ et possédant une limite non nulle $\overrightarrow{u}_0$ lorsque t tend vers t_0. Dans ce cas, cette limite est un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ et la tangente à la courbe au point de paramètre t_0 est la droite passant par $f(t_0)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}$.

Remarque 7
1. On parle souvent de tangente à la courbe paramétrée au point $f(t_0)$, ce qui peut ne pas être correct dans le cas où la courbe possède des points multiples (*i.e.* lorsqu'il existe $t_1, t_2 \in I$ tels que $t_1 \neq t_2$ et $f(t_1) = f(t_2)$);
2. Notons qu'il y a toujours plusieurs manières de choisir le vecteur $\overrightarrow{u}(t)$ et que certaines peuvent ne pas conduire à une limite non nulle lorsque t tend vers t_0. Par exemple, si $\overrightarrow{u}(t)$ tend vers $\overrightarrow{u}_0$ non nul lorsque t tend vers t_0, alors $(t - t_0)\overrightarrow{u}(t)$ est colinéaire à t (donc convient également) mais tend vers $\overrightarrow{0}$ lorsque t tend vers t_0;
3. On peut très facilement, à partir de cette définition et en utilisant les notions de limites à gauche et à droite, définir les demi-tangentes à gauche et à droite à une courbe paramétrée.

Théorème 2 (Tangente et dérivées)
Soient (I, f) une courbe paramétrée et $t_0 \in I$, alors :

1. *Si f est dérivable en t_0 et $\overrightarrow{f}'(t_0)$ est non nul, alors la courbe admet au point de paramètre t_0 une tangente dirigée par $\overrightarrow{f}'(t_0)$;*
2. *Plus généralement, si f est de classe $\mathcal{C}^k$, le premier vecteur non nul parmi :*

$$\overrightarrow{f}'(t_0), \quad \overrightarrow{f}''(t_0), \quad \overrightarrow{f}'''(t_0), ..., \overrightarrow{f}^{(k)}(t_0)$$

dirige la tangente à la courbe en t_0.

Preuve :

1. Pour $t \neq t_0$, on pose $\overrightarrow{u}(t) = \dfrac{\overrightarrow{f(t_0)f(t)}}{(t-t_0)}$. Alors le vecteur $\overrightarrow{u}(t)$ est colinéaire à $\overrightarrow{f(t_0)f(t)}$ et est par conséquent un vecteur directeur de la droite passant par $f(t_0)$ et $f(t)$. De plus, lorsque t tend vers t_0, $\overrightarrow{u}(t)$ tend vers $\overrightarrow{f}'(t_0)$ qui est par hypothèse non nul. Ainsi, la courbe possède une tangente au point de paramètre t_0 et cette tangente est dirigée par $\overrightarrow{f}'(t_0)$;
2. Ce point est, provisoirement, admis. Nous y reviendrons après avoir vu les développements limités.

■

Définition 6 (Points réguliers et stationnaires (ou singuliers))
Soit (I, f) une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ et $t_0 \in I$. On dit que le point de paramètre t_0 de la courbe paramétrée est :

- *régulier si $f'(t_0) \neq 0$;*
- *singulier (ou stationnaire) si $f'(t_0) = 0$.*

On dit que la courbe paramétrée est régulière si tous ses points sont réguliers.

Remarque 8
On dit souvent que le point $f(t_0)$ est régulier ou singulier au lieu de parler du point de paramètre t_0. Cette terminologie est, là encore, ambigüe mais utilisée. Physiquement, un point stationnaire correspond à un point à vitesse nulle, ou point d'arrêt.

Méthode 3 (Déterminer la tangente en chaque point de la courbe)

1. *Déterminer les point singuliers de la courbe (en pratique, il n'y en aura qu'un nombre fini) et par conséquent les points réguliers;*
2. *En en point régulier, la tangente est dirigée par le premier vecteur dérivée;*
3. *Pour déterminer la tangente en un point singulier, il suffit de dériver jusqu'à obtenir un vecteur non nul (ce qui sera, en pratique, toujours possible).*

Exemple 3
Considérons la courbe paramétrée de composantes :

$$x : t \mapsto t^2 + 1, \quad y : t \mapsto t^3 + t + 1$$

Ces fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus x est impaire et y est paire et on peut par conséquent limiter l'étude à $\mathbb{R}_+$ (et compléter ensuite par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées). Pour $t \geqslant 0$, on a :

$$x'(t) = 2t, \quad y'(t) = 3t^2 + 1$$

Par conséquent, x' et y' ne s'annulent jamais en même temps et la courbe ne présente que des points réguliers avec, en particulier, une tangente verticale au point de paramètre 0. On en déduit le tableau de variations :

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	1	$+$	

Exemple 4
Considérons maintenant la courbe paramétrée de composantes :

$$x : t \mapsto 3t - t^3, \quad y : t \mapsto 2t^2 - t^4$$

Ces deux fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus x est impaire et y est paire de sorte que l'on peut limiter l'étude à $\mathbb{R}_+$ en complétant ensuite par symétrie par rapport à l'axe de ordonnées. Pour $t \geqslant 0$, on a :

$$x'(t) = 3 - 3t^2, \quad y'(t) = 4t - 4t^3$$

On a alors $x'(t) = 0$ si et seulement si $t \in \{1\}$ et $y'(t) = 0$ si et seulement si $t \in \{0, -1, 1\}$ (le cas $t = -1$ est exclu puisque l'étude est limitée à $\mathbb{R}_+$). On en déduit que le point de paramètre 1 est stationnaire. Les autres points sont réguliers et on observe en particulier une tangente horizontale au point de paramètre 0. Dérivons x' et y' :

$$x''(t) = -6t, \quad y''(t) = 4 - 12t^2$$

On a alors $x''(1) = -6$ et $y''(1) = -8$, de sorte que la courbe présente, au point de paramètre 1, un tangente dirigée par le vecteur $(3, 4)$.

Exercice 6
Déterminer les tangentes aux points de la courbe de composantes : $x : t \mapsto \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y : t \mapsto \dfrac{2t}{1+t^2}$

Solution 6
Les fonctions x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$x'(t) = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \quad y'(t) = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}$$

On a alors $x'(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$ et $y'(t) = 0$ si et seulement si $t = \pm 1$. Par conséquent, la courbe ne possède que des points réguliers.

Exercice 7
Déterminer les tangentes aux points de la courbe définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ de composantes :

$$x : t \mapsto \frac{(t-1)^2}{t}, \quad y : t \mapsto \frac{(t-1)^2}{t^2}$$

Solution 7
Les fonctions x et y sont dérivables et on a :

$$x'(t) = \frac{t^2-1}{t^2}, \quad y'(t) = 2\frac{t-1}{t^3}$$

Par conséquent $x'(t) = y'(t) = 0$ si et seulement si $t = 1$. On dérive une seconde fois :

$$x''(t) = \frac{2}{t^3}, \quad y''(t) = 2\frac{3t^2 - 2t^3}{t^6}$$

On a alors $x''(t) = y''(t) = 2$ et la tangente au point de paramètre 1 est dirigée par le vecteur $(1, 1)$.

Exercice 8 (1)
Déterminer les tangentes aux points de la courbe de composantes :

$$x : t \mapsto \cos^3 t, \quad y : t \mapsto \sin^3 t$$

Solution 8
Les fonctions x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$x'(t) = -3\sin t\cos^2 t, \quad y'(t) = 3\cos t\sin^2 t$$

Par conséquent, on a $x'(t) = y'(t) = 0$ si et seulement si $\cos t = 0$ ou $\sin t = 0$ et ces deux cas s'excluent mutuellement. Dérivons une seconde fois :

$$x''(t) = -3(\cos^3 t - \sin^2 t\cos t), \quad y''(t) = 3(\sin^3 t + \cos^2 t\sin t) = 3\sin t$$

Par conséquent, si $\cos t = 0$ alors $y''(t) \neq 0$ et la tangente au point stationnaire de paramètre t est dirigée par le vecteur $(x''(t), y''(t))$. Si maintenant $\sin t = 0$, alors $x''(t) = -3\cos^3 t \neq 0$ et la tangente au point stationnaire de paramètre t est dirigée par le vecteur $(x''(t), y''(t))$ (tangente horizontale car $y''(t) = 0$).

2.4 Branches infinies

Les variations des fonctions composantes font également apparaitre se que l'on appelle les branches infinies de la courbe paramétrée. On dit qu'une courbe paramétrée f présente une branche infinie lorsque t tend vers t_0 (point adhérent mais hors de son ensemble de définition) si et seulement si $\lim_{t\mapsto t_0}\left\|\overrightarrow{f}(t)\right\| = +\infty$. Nous chercherons si ces branches infinies possèdent des asymptotes, tout en restreignant notre étude à l'un des deux cas suivants :

1. L'une des fontions composantes tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ tandis que l'autre possède une limite finie;
2. Les deux fonctions composantes tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Notons qu'il est tout à fait possible qu'une courbe présente une branche infinie sans pour autant entrer dans une de ces deux catégories.

Exercice 9
Montrer que la courbe de composantes :

$$x : t \mapsto t\cos(t), \quad y : t \mapsto t\sin t$$

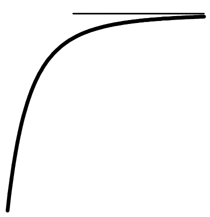
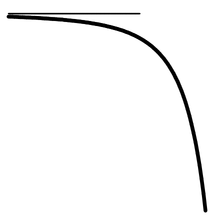
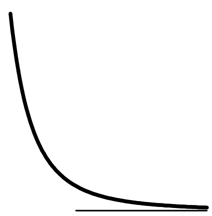
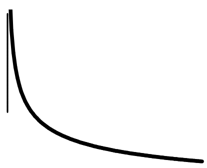
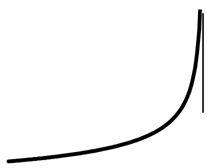
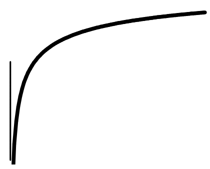
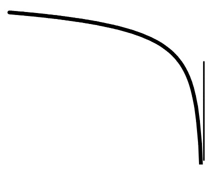
possède une branche infinie quand t tend vers $\pm\infty$ sans pour autant rentrer dans l'un des cas énoncés ci-dessus.

Solution 9
Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left\|\overrightarrow{f}(t)\right\|^2 = t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t = t^2$$

et cette quantité tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $\pm\infty$. Notons cependant que les fonctions x et y n'ont pas de limite en $\pm\infty$.

Si l'une des deux composantes possède une limite finie tandis que l'autre tend vers $\pm\infty$, on obtient directement une asymptote horizontale ou verticale. Si y possède une limite finie y_0 en t_0, c'est une asymptote horizontale d'équation $y = y_0$ et si c'est x qui présente une limite finie x_0, alors c'est une asymptote verticale d'équation $x = x_0$. Le tableau suivant explique comment distinguer la position par rapport à l'asymptote (ce qui, en pratique, est souvent possible) :

$\lim_{t\mapsto t_0} x(t) = +\infty$ $\lim_{t\mapsto t_0} y(t) = y_0^-$ 	$\lim_{t\mapsto t_0} x(t) = -\infty$ $\lim_{t\mapsto t_0} y(t) = y_0^-$ 	$\lim_{t\mapsto t_0} x(t) = +\infty$ $\lim_{t\mapsto t_0} y(t) = y_0^+$ 	$\lim_{t\mapsto t_0} x(t) = -\infty$ $\lim_{t\mapsto t-0} y(t) = y_0^+$
$\lim_{t\mapsto t_0} x(t) = x_0^+$ $\lim_{t\mapsto t_0} y(t) = +\infty$ 	$\lim_{t\mapsto t_0} x(t) = x_0^-$ $\lim_{t\mapsto t_0} y(t) = +\infty$ 	$\lim_{t\mapsto t_0} x(t) = x_0^+$ $\lim_{t\mapsto t_0} y(t) = -\infty$ 	$\lim_{t\mapsto t_0} x(t) = x_0^-$ $\lim_{t\mapsto t_0} y(t) = -\infty$ 

Exemple 5
Etudions les branches infinies de la courbe paramétrée définie par ses composantes :

$$x : t \mapsto \frac{1}{t-1}, \quad y : t \mapsto t^3 + 3t$$

Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. On a :

$$\begin{array}{rcl}\lim_{t\mapsto -\infty} x(t) &=& 0^-, \quad \lim_{t\mapsto 1^-} x(t) = -\infty, \quad \lim_{t\mapsto 1^+} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\mapsto +\infty} x(t) = 0^+ \\ \lim_{t\mapsto -\infty} y(t) &=& -\infty, \quad \lim_{t\mapsto 1^-} y(t) = 4^-, \quad \lim_{t\mapsto 1^+} y(t) = 4^+, \quad \lim_{t\mapsto +\infty} y(t) = +\infty\end{array}$$

Venons-en maintenant au second cas auquel nous allons nous intéresser. Il s'agit du cas où x et y tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque t tend vers a. On cherche dans ce cas si la courbe présente une asymptote, éventuellement oblique, autrement dit on cherche trois réels a, b, γ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et :

$$\lim_{t \mapsto t_0} ax(t) + by(t) + \gamma = 0$$

On dit alors que la droite d'équation $ax+by+\gamma = 0$ est asymptote à la courbe lorsque t tend vers a. Notons que comme x et y tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$, cette asymptote ne peut être ni parallèle à l'axe des abscisses ni parallèle à l'axe des ordonnées. On peut donc chercher l'équation de la droite sous la forme $y = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}^\times$ et $b \in \mathbb{R}$.
Pour obtenir a, on calcule (sous réserve que cette limite existe)

$$a = \lim_{t \mapsto t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$$

Alors :

- si $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, la courbe n'admet pas d'asymptote lorsque t tend vers a mais une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées;
- si $a = 0$, la courbe n'admet pas d'asymptote lorsque t tend vers a mais une branche parabolique de direction l'axe des abscisses;
- si $a \in \mathbb{R}^\times$, on calcule (là encore, sous réserve que cette limite existe) :

  $$b = \lim_{t \mapsto t_0} y(t) - ax(t)$$

  Alors :

  - si $b = +\infty$ ou $b = -\infty$, la courbe admet une branche parabolique de pente a;
  - si $b \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe lorsque t tend vers a (et on peut étudier la position de la courbe par rapport à son asymptote en étudiant le signe de $y(t) - ax(t) - b$ pour t voisin de a).

Dans les cas qui ne sont pas pris en compte par ce qui précède, il n'y a pas d'asymptote à la courbe lorsque t tend vers a.

Méthode 4 (Étudier une branche infinie en t_0)

1. *Si x ou y présente une limite finie, c'est une asymptote verticale ou horizontale;*
2. *Sinon, on calcule (sous réserve d'existence) :*

   $$a = \lim_{t \mapsto t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$$

   (a) *Si $a = \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées;*
   (b) *Si $a = 0$, on a une branche parabolique de direction l'axe des abscisses;*
   (c) *Si $a \in \mathbb{R}^\times$, on calcule (sous réserve d'existence) :*

   $$b = \lim_{t \mapsto t_0} (y(t) - ax(t))$$

   - *Si $b = \pm\infty$, on a une branche parabolique de pente a;*
   - *Sinon on a une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.*

Exemple 6
Etudions la branche infinie pour t tendant vers 1 de la courbe paramétrée définie par :

$$x : t \mapsto \frac{t}{t^4 - 1}, \quad y : t \mapsto \frac{t^2}{t^4 - 1}$$

On a :

$$\lim_{t \mapsto 1} |x(t)| = +\infty, \quad \lim_{t \mapsto 1} |y(t)| = +\infty$$

Par ailleurs :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^2}{t}$$

et cette quantité tend vers 1 lorsque t tend vers 1. Ensuite :

$$y(t)-x(t)=\frac{t^2-t}{t^4-1}=\frac{t(t-1)}{(t^2+1)(t^2-1)}=\frac{t(t-1)}{(t^2+1)(t+1)(t-1)}=\frac{t}{(t+1)(t^2+1)}$$

et cette quantité tend vers $\frac{1}{4}$ lorsque t tend vers 1. On en déduit que la droite d'équation $y=x+\frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe lorsque t tend vers 1. Finalement :

$$y(t)-x(t)-\frac{1}{4}==\frac{4t-(t+1)(t^2+1)}{4(t+1)(t^2+1)}=\frac{4t-t^3-t-t^2-1}{4(t+1)(t^2+1)}=-\frac{(t-1)(t^2+2t-1)}{4(t+1)(t^2+1)}$$

On en déduit que $y(t)-x(t)-\frac{1}{4}$ est positif pour $t<1$ et négatif pour $t>1$. On en déduit que la courbe est au dessus de son asymptote pour $t<1$ et en dessous pour $t>1$.

Exercice 10
Etudier les branches infinies de la courbe paramétrée de composantes :

$$x:t\mapsto\frac{t}{1+t^3},\quad y:t\mapsto\frac{t^2}{1+t^3}$$

Solution 10
Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et tendent clairement vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$. Par ailleurs, on a :

$$\lim_{t\mapsto-1^-}x(t)=+\infty,\quad \lim_{t\mapsto-1^+}x(t)=+\infty,\quad \lim_{t\mapsto-1^-}y(t)=-\infty,\quad \lim_{t\mapsto-1^+}y(t)=-\infty$$

La courbe présente donc une branche infinie, lorsque t tend vers -1. Les fonctions x et y tendent toutes deux vers $+\infty$ ou $-\infty$ en 1. Par ailleurs :

$$\frac{y(t)}{x(t)}=t$$

et cette quantité tend vers $\alpha=-1$ lorsque t tend vers -1. Ensuite :

$$y(t)-\alpha x(t)=y(t)+x(t)=\frac{t+t^2}{1+t^3}=\frac{t(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)}=\frac{t}{t^2-t+1}$$

et cette quantité tend vers $\frac{-1}{3}$ lorsque t tend vers -1. On en déduit que, lorsque t tend vers -1, la courbe est asymptote à la droite d'équation $y+x=-\frac{1}{3}$. De plus :

$$y(t)+x(t)+\frac{1}{3}=\frac{t}{t^2-t+1}+\frac{1}{3}=\frac{3t+t^2-t+1}{3(t^2-t+1)}=\frac{(t+1)^2}{3(t^2-t+1)}$$

Le numérateur est toujours positif et le dénominateur est un polynôme sans racine réelles, il est donc de signe constant (positif). Par conséquent, la courbe est toujours située au dessus de son asymptote.

2.5 Points multiples

Le tracé peut mettre en évidence l'existence de points doubles ou, plus généralement, multiples dont on cherchera alors les coordonnées. Un point M de coordonnées (x_0,y_0) est appelé point multiple d'une courbe paramétrée de composantes x et y si et seulement si il existe t,t' tels que $x(t)=x(t')=x_0$, $y(t)=y(t')=y_0$ et $t\neq t'$. L'ordre d'un tel point est le nombre (en général fini) de valeurs du paramètre qui permettent de l'obtenir. Lorsque des points multiples ont été mis en évidence, on cherche également les tangentes en ces points.

Exemple 7
On considère la courbe paramétrée dont les composantes sont :

$$x:t\mapsto t+1+\frac{1}{t-1},\quad y:t\mapsto t^2+1+\frac{1}{t}$$

Pour déterminer les points doubles de cette courbe, on cherche à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{ccc} t+1+\frac{1}{t-1} & = & u+1+\frac{1}{u-1}\\ t^2+1+\frac{1}{t} & = & u^2+1+\frac{1}{u}\\ t & \neq & u\end{array}\right.$$

Alors, sous l'hypothèse $t \neq u$:

$$\begin{aligned}
t+1+\frac{1}{t-1} = u+1+\frac{1}{u-1} &\Leftrightarrow \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)-\left(u+1+\frac{1}{u-1}\right)=0 \Leftrightarrow (t-u)+\frac{1}{t-1}-\frac{u}{u-1}=0\\
&\Leftrightarrow (t-u)+\frac{(u-1)-(t-1)}{(t-1)(u-1)}=0 \Leftrightarrow (t-u)+\frac{u-t}{(t-1)(u-1)}=0 \Leftrightarrow (t-u)\left(1-\frac{1}{(t-1)(u-1)}\right)=0\\
&\Leftrightarrow 1-\frac{1}{(t-1)(u-1)}=0 \Leftrightarrow (t-1)(u-1)=1 \Leftrightarrow ut-(u+t)+1=1 \Leftrightarrow ut=u+t \qquad (*)
\end{aligned}$$

Occuppons-nous maintenant de la seconde équation :

$$\begin{aligned}
t^2+1+\frac{1}{t} &= u^2+1+\frac{1}{u} \Leftrightarrow \left(t^2+1+\frac{1}{t})-(u^2+1+\frac{1}{u}\right)=0 \Leftrightarrow t^2-u^2+\frac{1}{t}-\frac{1}{u}=0 \Leftrightarrow (t+u)(t-u)+\frac{u-t}{ut}=0\\
&\Leftrightarrow (t-u)\left((t+u)-\frac{1}{ut}\right)=0 \Leftrightarrow t+u=\frac{1}{ut} \Leftrightarrow ut(t+u)=1 \qquad (**)
\end{aligned}$$

En injectant l'égalité $(*)$ dans $(**)$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{c}(ut)^2=1\\(t+u)^2=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}ut=\varepsilon_1\in\{-1,1\}\\t+u=\varepsilon_2\in\{-1,1\}\end{array}\right. \qquad (***)$$

(il n'y a aucune raison que $\varepsilon_1=\varepsilon_2$). Ainsi, u et t sont solutions de

$$X^2-\varepsilon_2 X+\varepsilon_1=0 \quad (E)$$

Le discriminant du trinôme vaut $\Delta=(-\varepsilon_2)^2-4\varepsilon_1=1-4\varepsilon_1$ qui est strictement positif lorsque $\varepsilon_1=-1$ et strictement négatif lorsque $\varepsilon_1=1$ donc l'équation (E) n'admet des solutions réelles seulement lorsque $\varepsilon_1=-1$, donc $ut=-1$, qui sont $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Par conséquent, soit

$$\left\{\begin{array}{l}t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\\u=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l}t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\u=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Pour ces deux solutions, on a bient $ut=-1$. Il est aisé de vérifier que les u et t que nous venons d'obtenir, on a bien $f(t)=f(u)$. On calcule maintenant les coordonnées du point double (en utilisant la relation $t^2+t-1=0$, qui implique $t(t+1)=1$) :

$$\begin{aligned}
x(t) &= t+1+\frac{1}{t-1}=t+1+\frac{1}{t-1}=\frac{(t+1)(t-1)+1}{t-1}=\frac{t^2}{t-1}=\frac{1-t}{t-1}=-1\\
y(t) &= t^2+1+\frac{1}{t}=t^2+1+t+1=3
\end{aligned}$$

Exercice 11
Etudier les points multiples de la courbe paramétrée de composantes :

$$x : t \mapsto \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y : t \mapsto t\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Solution 11
Les points multiples de cette courbe s'obtiennent à partir des solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1-u^2}{1+u^2}\\ t\frac{1-t^2}{1+t^2}=u\frac{1-u^2}{1+u^2}\\ t\neq u\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}(1-t^2)(1+u^2)=(1-u^2)(1+t^2)\\ t(1-t^2)(1+u^2)-u(1-u^2)(1+t^2)\\ t\neq u\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}u^2=t^2\\ t(1-t^2)(1+t^2)=u(1-t^2)(1+t^2)\\ t\neq u\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}u=-t\\ 2t(1-t^2)(1+t^2)=0\\ t\neq u\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}u=-t\\ 1-t^2=0 \text{ ou } t=0\\ t\neq u\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}u=-t\\ t=\pm 1\\ t\neq u\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}t=1 \text{ et } u=-1\\ \text{ou}\\ t=-1 \text{ et } u=1\end{array}\right.$$

Il y a donc un unique point multiple (double), de coordonnées $(0,0)$.

2.6 Un exemple complet

Exemple 8
On considère la courbe paramétrée f définie par ses composantes :

$$x : t \mapsto \frac{1}{1-t^2}, \quad y : t \mapsto \frac{t^3}{1-t^2}$$

Ces deux fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. Pour t différent de -1 et 1, on a :

$$x(-t) = x(t), \quad y(t) = -y(t)$$

On peut donc se contenter de faire l'étude sur $\mathbb{R}_+\backslash\{1\}$ et compléter ensuite par symétrie par rapport à l'axe des abscisses. On a ensuite :

$$x'(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2}, \quad y'(t) = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}$$

On obtient, après calcul des limites et des valeurs particulières, le tableau de variations suivant :

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	0
$x(t)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$1/2$	$\nearrow$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$-3\sqrt{3}/2$	$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On a $x'(t) = y'(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$, donc le seul point stationnaire est le point de paramètre 0 (notons par ailleurs la tangente horizontale au point de paramètre $\sqrt{3}$). On dérive donc une seconde fois :

$$x''(t) = \frac{2(1-2t^2+t^4) - 2t(-4t+4t^3)}{(1-t^2)^4}$$
$$y''(t) = \frac{(6t-4t^3)(1-2t^2+t^4) - (3t^2-t^4)(-4t+4t^3)}{(1-t^2)^4}$$

Il est inutile de simplifier puisque l'on cherche simplement à évaluer ces quantités en $t = 0$, on trouve $x''(0) = 2$ et $y''(0) = 0$. Par conséquent la courbe admet au point de paramètre 0 une tangente horizontale. On remarque ensuite que la courbe (ou, plus exactement la partie étudiée) présente trois branches infinies, deux lorsque t tend vers 1 et la troisième lorsque t tend vers $+\infty$. En $+\infty$, l'axe des ordonnées est asymptote. Pour faire l'étude au point de paramètre 1, on a :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = t^3$$

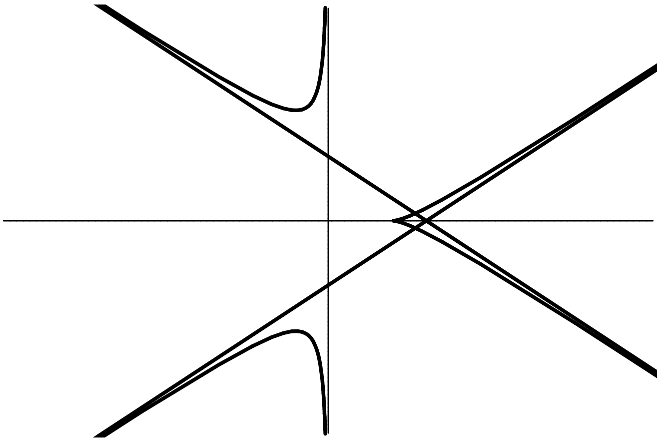
et cette quantité tend vers 1 lorsque t tend vers 1. On écrit ensuite :

$$y(t) - x(t) = \frac{t^3-1}{1-t^2} = -\frac{t^2+t+1}{t+1}$$

et cette quantité tend vers $-\dfrac{3}{2}$ lorsque t tend vers 1. On en déduit que la droite d'équation $y = x - \dfrac{3}{2}$ est asymptote à la courbe lorsque t tend vers 1. Ensuite :

$$y(t) - x(t) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{t^2+t+1}{t+1} = \frac{-2t^2+t+1}{2(t+1)}$$

Le numérateur a pour racines $-\dfrac{1}{2}$ et 1, il est donc strictement positif pour $t < 1$ et strictement négatif pour $t > 1$. On en déduit que lorsque t tend vers 1^-, la courbe est au dessus de son asymptote et au dessous lorsque t tend vers 1^+. On obtient donc le tracé suivant :



Exercice 12
Etudier la courbe paramétrée de composantes :

$$x : t \mapsto \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y : t \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$$

Solution 12
On a déjà montré que l'étude peut être faite sur $\mathbb{R}_+$ en complétant ensuite par symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Les fonctions x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$x'(t) = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}, \quad y'(t) = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}$$

On a alors $x'(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$ et $y'(t) = 0$ si et seulement si $t = \pm 1$. Par conséquent, la courbe ne possède que des points réguliers. Le tableau de variations est le suivant :

t	0		1		$+\infty$
$x'(t)$	0	$-$		$-$	
$x(t)$	1	$\searrow$		$\searrow$	-1
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	

On a donc une tangente verticale au point de paramètre 0 et une tangente horizontale au point de paramètre 1. Il n'y a pas de branche infinie mais une la courbe admet le point $(-1, 0)$ comme limite lorsque t tend vers $+\infty$. Comme cela a déjà été démontré dans le cours de géométrie, le support de cette courbe est le cercle unité privé du point $(-1, 0)$.

Exercice 13
Etudier la courbe paramétrée de composantes :

$$x : t \mapsto \cos^3 t, \quad y : t \mapsto \sin^3 t$$

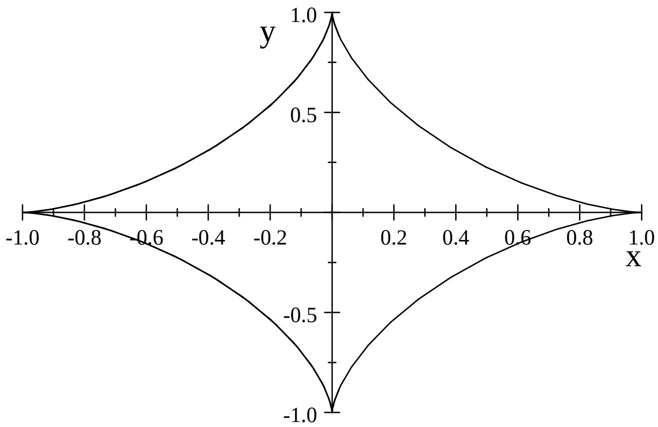
Solution 13
On a déjà montré que l'étude de cette courbe peut être limité à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, en complétant ensuite par symétrie par rapport à la première bissectrice puis par rapport à l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. Les fonctions x et y sont dérivables et on a :

$$x'(t) = -3\sin t\cos^2 t, \quad y'(t) = 3\cos t\sin^2 t$$

Le seul point stationnaire dans le domaine d'étude est le point de paramètre 0 et en ce point, nous avons montré que la courbe présente une tangente horizontale. On a le tableau de variations suivant :

t	0		$\pi/4$
$x'(t)$	0	$-$	$-3\sqrt{2}/4$
$x(t)$	1	$\searrow$	$\sqrt{2}/4$
$y(t)$	0	$\searrow$	$\sqrt{2}/4$
$y'(t)$	0		$3\sqrt{2}/4$

Notons que la tangente au point de paramètre $\dfrac{\pi}{4}$ est orthogonale à la première bissectrice (comme ce point est lui-même situé sur la première bissectrice, il est logique que la tangente soit symétrique par rapport à la prmière bissectrice, donc soit confondue, soit orthogonale).



3 Etude d'une courbe en coordonnées polaires

Définition 7
Une fonction $\rho : D \mapsto \mathbb{R}$ permet de définir une courbe paramétrée en posant pour $\theta \in D$, $f(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$ (autrement dit, $f(\theta)$ est le point de coordonnées polaires $(\rho(\theta), \theta)$, ou encore $\overrightarrow{f}(\theta) = \rho(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$). Une courbe paramétrée construite de cette manière est appelée courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$.

Remarque 9
Pour étudier une courbe d'équation pollaire $r = \rho(\theta)$, il est toujours possible d'étudier plutôt la courbe paramétrée de composantes $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$ et $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$. Cependant, les courbes en polaires ont certaines particularités qui rendent leur étude directe plus simple. On reviendra cependant aux coordonnées polaires pour étudier des aspects particuliers (les branches infinies notamment).

Méthode 5 (Plan d'étude d'une courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$)

1. *Déterminer le domaine de définition D de ρ puis le réduire aux moyen de symétries afin d'obtenir le domaine d'étude D';*
2. *Etudier les variations de ρ sur D' (en pratique, la donnée du signe de ρ et des valeurs pour lesquelles ρ s'annule est souvent suffisante) ainsi que les limites;*
3. *Déterminer les tangentes particulières;*
4. *Etudier les branches infinies;*
5. *Déterminer (éventuellement) les points multiples de la courbe;*
6. *Réaliser le tracé, faisant apparaitre tous les éléments mis en évidence au cours de l'étude précédente.*

Dans la suite, ρ désigne une fonction définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et f désigne la courbe paramétrée d'équation polaire $r = \rho(\theta)$.

3.1 Réduction du domaine de définition

Si la fonction ρ est 2π-périodique, alors pour $\theta \in D$, les points $f(\theta)$ et $f(\theta + 2\pi)$ sont confondus et la courbe est entièrement décrite sur l'intersection de D avec un intervalle de longueur 2π, par exemple $D \cap [0, 2\pi]$ ou $D \cap [-\pi, \pi]$ (on préfère souvent cette dernière écriture car elle permet ensuite d'étudier les simplifications dues à la parité de ρ). Si ρ est π-périodique, alors pour $\theta \in D$, les point $f(\theta)$ et $f(\theta + \pi)$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère. On peut donc étudier la courbe sur $D \cap [0, \pi]$ ou $D \cap [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et compléter ensuite au moyen d'une symétrie par rapport à l'origine du repère.

Remarque 10 (Z)
Il faut prendre garde au fait que, en général, si la fonction ρ est T-périodique, cela n'implique pas que la fonction f le soit. En effet, on pourra seulement en déduire que, pour $\theta \in D$:

$$\overrightarrow{f}(\theta) = \rho(\theta)\overrightarrow{u}(\theta), \quad \overrightarrow{f}(\theta + T) = \rho(\theta)\overrightarrow{u}(\theta + T)$$

Par conséquent, la courbe est invariante par rotations de centre l'origine du repère et d'angle T.

Si la fonction ρ est paire, les point $f(\theta)$ et $f(-\theta)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses et on peut donc étudier la courbe sur $D \cap \mathbb{R}_+$ en complétant ensuite par symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Si la fonction ρ est impaire, les points $f(\theta)$ et $f(-\theta)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées et on peut donc étudier la courbe sur $D \cap \mathbb{R}_+$ en complétant ensuite par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Méthode 6 (Réduction du domaine de définition)

1. *Utiliser la périodicité éventuelle de ρ;*
2. *Utiliser la parité de ρ;*
3. *Si on obtient pour domaine d'étude un intervalle de la forme $[0, \alpha]$, regarder si le point de paramètre $\alpha - \theta$ peut être déduit du point de paramètre θ.*

Exemple 9
Considérons la courbe paramétrée définie par l'équation polaire $r = \rho(\theta)$ avec $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$ (cardioïde). Alors la courbe est complètement décrite sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$, car la fonction ρ est définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Comme ρ est de plus paire, on peut limiter l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$ et compléter par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Exercice 14
Déterminer le domaine de définition et l'intervalle d'étude de la courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$ avec $\rho(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

Solution 14
La fonction ρ est définie sur $\mathbb{R}^\times$ et ne présente pas de périodicités. Par contre, cette fonction est impaire et on peut donc limiter l'étude à l'intervalle $\mathbb{R}_+^\times$ en complétant ensuite par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 15
Déterminer le domaine de définition et l'intervalle d'étude de la courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$ avec $\rho(\theta) = \sin(\frac{\theta}{2})$ (folium de Dürer). Een plus des considérations habituelles, on pourra ragarder comment le point $f(2\pi - \theta)$ se déduit du point $f(\theta)$.

Solution 15
La fonction ρ est définie sur $\mathbb{R}$ et 4π-périodique, on peut donc limiter l'étude à l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. De plus, ρ est impaire, on peut donc limiter l'étude à l'intervalle $[0, 2\pi]$ en complétant ensuite par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Finalement, $\rho(2\pi - \theta) = \sin\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Les points $f(\theta)$ et $f(2\pi - \theta)$ sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses et on peut donc limiter l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$ en complétant ensuite par symétrie par rapport à cet axe.

3.2 Variations, signe et limites de la fonction ρ

On fera apparaitre dans un tableau le signe de la fonction ρ sur le domaine d'étude ainsi que les points où cette fonction s'annule et les limites aux bornes du domaine. Il peut être utile de déterminer les variations de ρ, en tout cas les valeurs extrémales.

3.3 Tangentes

Théorème 3 (Tangente en un point à une courbe en polaires)
Soit f une courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$ avec ρ déinie sur I et $\theta \in I$.

1. *Si ρ est dérivable en θ, alors :*
$$\overrightarrow{f}'(\theta) = \rho'(\theta)\overrightarrow{u}(\theta) + \rho(\theta)\overrightarrow{v}(\theta)$$
2. *En particulier, si $\rho(\theta) \neq 0$ (i.e. si $f(\theta)$ n'est pas situé à l'origine), le point de paramètre θ est régulier;*
3. *Si $\rho(\theta) = 0$ (i.e. si $f(\theta)$ est situé à l'origine), alors la courbe admet au point de paramètre θ une tangente dirigée par $\overrightarrow{u}(\theta)$ et ce, que le point de paramètre θ soit régulier ou pas.*

Preuve :

1. On sait que $\overrightarrow{f}(\theta) = \rho(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$. On utilise alors les théorèmes de dérivation, en rappelant que $\overrightarrow{u}'(\theta) = \overrightarrow{v}(\theta)$;
2. Comme $(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$ est une base du plan, le vecteur $\overrightarrow{f}'(\theta)$ est nul si et seulement si ses coordonnées dans cette bases, qui sont $\rho'(\theta)$ et $\rho(\theta)$, sont toutes deux nulles. Par conséquent, si $\rho(\theta) \neq 0$, on a $\overrightarrow{f}(\theta) \neq \overrightarrow{0}$ et le point de paramètre θ est régulier;
3. Supposons maintenant $\rho(\theta) = 0$. Alors, quel que soit t, la droite passant par $f(\theta)$ et $f(t)$ est dirigée par $\overrightarrow{f}(t)$, autrement dit par $\overrightarrow{u}(t)$. Le vecteur $\overrightarrow{u}(t)$ est ainsi un vecteur directeur de la droite passant par $f(\theta)$ et $f(t)$ et ce vecteur a pour limite $\overrightarrow{u}(\theta)$ lorsque t tend vers θ. On en déduit que la courbe admet une tangente au point de paramètre θ, cette tangente étant dirigée par $\overrightarrow{u}(\theta)$.

■

Méthode 7 (Tangente à une courbe en polaires)
Une courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$ avec ρ dérivable possède une tangente en tout point. En particulier :

- *si $\rho(\theta) = 0$, la tangente au point de paramètre θ est dirigée par $\overrightarrow{u}(\theta)$;*
- *si $\rho'(\theta) = 0$, la tangente au point de paramètre θ est dirigée par $\overrightarrow{v}(\theta)$.*

On déterminera toujours les tangentes correspondant à ces deux cas particuliers (ce qui revient à déterminer les points d'annulation de ρ et ρ').

Exemple 10
Considérons la courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$ avec $\rho(\theta) = \cos\theta$. Comme $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$, on a $f(\theta + \pi) = f(\theta)$ et on peut faire l'étude sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Comme la fonction ρ est de plus paire, on peut faire l'étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ en complétant ensuite par symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\rho(\theta) = 0$ si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2}$ et la courbe possède donc une tangente verticale au point de paramètre $\frac{\pi}{2}$ (situé à l'origine). Par ailleurs $\rho'(\theta) = -\sin\theta$ et $\rho'(\theta) = 0$ si et seulement si $\theta = 0$ (sur $[0, \frac{\pi}{2}]$). Le courbe possède donc également une tangente verticale au point de paramètre 0. En fait, en utilisant les formules trigonométriques, il vient :

$$x(\theta) = \cos^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta), \quad y(\theta) = \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

On en déduit que le point de coordonnées $(x(\theta), y(\theta))$ décrit le cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Exercice 16
Déterminer les tangentes particulières à la courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$ où $\rho(\theta) = \cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$ (on pourra, en le justifiant, limiter le domaine d'étude à l'intervalle $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Solution 16
On a $\rho(\theta+3\pi)=\cos^3\left(\dfrac{\theta}{3}+\pi\right)=-\cos^3\left(\dfrac{\theta}{3}\right)=-\rho(\theta)$. Par conséquent les points $f(\theta)$ et $f(\theta+3\pi)$ sont confondus et on peut limiter l'étude à un intervalle de longueur 3π, par exemple $\left[-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$. Comme de plus ρ est paire, on pourra limiter l'étude à $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ en complétant ensuite par symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Sur l'intervalle d'étude, on a $\rho(\theta)=0$ si et seulement si $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$ et la courbe admet donc, au point de paramètre $\dfrac{3\pi}{2}$ (situé à l'origine) une tangente verticale. De plus, $\rho'(\theta)=-9\sin\left(\dfrac{\theta}{3}\right)\cos^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$ et $\rho'(\theta)=0$ si et seulement si $\theta=0$ ou $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$. Le cas $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$ a déjà été traité (notons que ce point est stationnaire puisque ρ et ρ' s'annulent en $\dfrac{3\pi}{2}$) et la courbe possède une tangente verticale au point de paramètre 0.

3.4 Branches infinies

On dit que la courbe paramétrée d'équation polaire $r=\rho(\theta)$ présente une branche infinie lorsque θ tend vers θ_0 (point adhérent mais hors de son domaine de définition) si et seulement si on a $\lim\limits_{\theta\mapsto\theta_0}|\rho(\theta)|=+\infty$. Si $\theta_0=+\infty$ ou $\theta_0=-\infty$, il n'y a pas d'asymptote (la courbe forme une sorte de spirale). Dans le cas contraire (lorsque $\theta_0\in\mathbb{R}$), on revient en coordonnées cartésiennes en posant $x(\theta)=\rho(\theta)\cos\theta$ et $y(\theta)=\rho(\theta)\sin\theta$. La première chose à faire est de déterminer si l'une des fonctions x ou y possède une limite finie en θ_0, ce qui donnera une asymptote verticale ou horizontale. Si les deux fonctions divergent, on utilise alors la méthode habituelle en déterminant la limite éventuelle du quotient $\dfrac{y(\theta)}{x(\theta)}$ lorsque θ tend vers θ_0 puis la limite éventuelle de $y(\theta)-ax(\theta)$ toujours lorsque θ tend vers θ_0. Si on a mis en évidence une asymptote, on peut étudier la position de la courbe par rapport à celle-ci.

Exemple 11
La courbe d'équation polaire $r=\rho(\theta)$ avec $\rho(\theta)=\dfrac{1}{\theta}$ présente une branche infinie quand θ tend vers 0. Pour des raisons de symétrie évoquées plus haut, on peut se contenter d'étudier cette branche infinie lorsque θ tend vers 0^+. On a :

$$x(\theta)=\frac{\cos\theta}{\theta}\underset{\theta\to0^+}{\longrightarrow}+\infty,\quad y(\theta)=\frac{\sin\theta}{\theta}\underset{\theta\to0^+}{\longrightarrow}1^-$$

(on a $\dfrac{\sin\theta}{\theta}\underset{\theta\to0^+}{\longrightarrow}1^-$ car $\sin\theta\leqslant\theta$ sur $\mathbb{R}_+$). Par conséquent, la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ et se trouve au dessus de cette asymptote lorsque θ tend vers 0^+.

Remarque 11
Lorsque $\rho(\theta)\underset{\theta\to\pm\infty}{\longrightarrow}r\in\mathbb{R}^\times$, on dit que le courbe admet le cercle de centre O et de rayon r pour cercle asymptote. Lorsque $\rho(\theta)\underset{\theta\to\pm\infty}{\longrightarrow}0$, on dit que l'origine du repère est un point asymptote pour la courbe.

Exercice 17
Etudier la branche infinie en $\dfrac{\pi}{3}$ de la courbe d'équation polaire $r=\rho(\theta)$ où $\rho(\theta)=\dfrac{\theta}{\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)}$.

Solution 17
On a :

$$x(\theta)=\frac{\theta\cos\theta}{\theta-\frac{\pi}{3}}\underset{\theta\to\frac{\pi}{3}^+}{\longrightarrow}+\infty,\quad y(\theta)=\frac{\theta\sin\theta}{\theta-\frac{\pi}{3}}\underset{\theta\to\frac{\pi}{3}^+}{\longrightarrow}+\infty$$

On calcule ensuite :

$$\frac{y(\theta)}{x(\theta)}=\tan\theta\underset{\theta\to\frac{\pi}{3}}{\longrightarrow}\sqrt{3}\qquad y(\theta)-\sqrt{3}x(\theta)=\frac{\theta(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)}{\theta-\frac{\pi}{3}}=\frac{2\theta\sin(\theta-\frac{\pi}{3})}{\theta-\frac{\pi}{3}}\underset{\theta\to\frac{\pi}{3}}{\longrightarrow}\frac{2\pi}{3}$$

et on en déduit que la droite d'équation $y=\sqrt{3}x+\dfrac{2\pi}{3}$ est asymptote à la courbe lorsque θ tend vers $\dfrac{\pi}{3}$. Pour étudier la position de la courbe par rapport a l'asymptote, on pourrait ensuite étudier le signe de $y(\theta)-\sqrt{3}x(\theta)-\dfrac{2\pi}{3}$ (et distinguer suivant que θ tend vers $\dfrac{\pi}{3}$ par valeurs inférieures ou supérieures). Il est cependant plus simple de constater que, si $\theta<\dfrac{\pi}{3}$, alors $\rho(\theta)$ est positif et la droite passant par l'origine et $f(\theta)$ est située sous l'asymptote. De même, si $\theta > \dfrac{\pi}{3}$, alors $\rho(\theta)$ est négatif et la droite passant par l'origine et $f(\theta)$ est, là encore, située au dessous de l'asymptote.

Exercice 18
Etudier les branches infinies de la courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$ où $\rho(\theta) = \dfrac{1}{\theta^2}$.

Solution 18
Pour des raisons de symétrie, il suffit de considérer les valeurs positives de θ. Lorsque θ tend vers $+\infty$, $\rho(\theta)$ tend vers 0 et $f(\theta)$ tend vers l'origine du repère. Il n'y a donc pas de branche infinie lorsque θ tend vers $+\infty$. Lorsque θ tend vers 0^+, on a :

$$x(\theta) = \frac{\cos\theta}{\theta^2} \underset{\theta \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty \qquad y(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta^2} \underset{\theta \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$$

On regarde donc la limite du quotient :

$$\frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \tan\theta \underset{\theta \to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

et on en déduit que la courbe présente une branche parabolique de direction l'axe des abscisses lorsque θ tend vers 0^+.

Remarque 12
Une autre méthode consiste à se placer dans le repère $\mathcal{R}_{\theta_0} = (O, \overrightarrow{u}(\theta_0), \overrightarrow{v}(\theta_0))$. Dans ce repère, le point $f(\theta)$ a pour coordonnées :

$$\begin{aligned} X(\theta) &= x(\theta)\cos\theta_0 + y(\theta)\sin\theta_0 = \rho(\theta)(\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0) = \rho(\theta)\cos(\theta - \theta_0) \\ Y(\theta) &= -x(\theta)\sin\theta_0 + y(\theta)\cos\theta_0 = \rho(\theta)(-\cos\theta\sin\theta_0 + \sin\theta\cos\theta_0) = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0) \end{aligned}$$

On a alors nécessairement $X(\theta) \underset{\theta \to \theta_0}{\longrightarrow} \pm\infty$. Deux cas nous intéressent :

- si $Y(\theta) \underset{\theta \to \theta_0}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, on a une asymptote d'équation $Y = l$ dans le repère $\mathcal{R}_{\theta_0}$;
- si $Y(\theta) \underset{\theta \to \theta_0}{\longrightarrow} \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction (OX) dans le repère $\mathcal{R}_{\theta_0}$.

3.5 Points multiples

Pour déterminer les points multiples d'une courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$, il faut distinguer les points situés à l'origine des autres. Pour savoir si l'origine du repère est un point multiple, il suffit de déterminer les solutions de l'équation $\rho(\theta) = 0$ (ce qui a du être fait auparavant). Si cette équation admet plusieurs solutions, alors l'origine est un point multiple de la courbe. Pour déterminer les autres points multiples, il faut résoudre les équations :

$$\begin{aligned} &\rho(\theta + 2k\pi) = \rho(\theta) && (k \in \mathbb{Z}^*) \\ &\rho(\theta + (2k+1)\pi) = -\rho(\theta) && (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Une solution à l'une de ces équations donnera un point multiple de la courbe.

3.6 Un exemple complet

Exemple 12
On considère la courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$ avec :

$$\rho(\theta) = \frac{\sin\theta}{1 - 2\cos\theta}$$

Le domaine de définition de ρ est :

$$D_\rho = \mathbb{R} \backslash \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

La fonction ρ est 2π-périodique, ce qui permet de limiter l'étude à $[-\pi, \pi] \cap D_\rho$. On a de plus $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$, on limite donc l'étude à $[0, \pi] \cap D_\rho$ et on complètera ensuite par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. On trouve :

$$\rho'(\theta) = \frac{\cos\theta(1 - 2\cos\theta) - 2\sin^2\theta}{(1 - 2\cos\theta)^2} = \frac{\cos\theta - 2}{(1 - 2\cos\theta)^2} < 0$$

On a le tableau de variations suivant :

θ	0		$\pi/3$		π
$\rho'(\theta)$		$-$	$\|$	$-$	
$\rho(\theta)$	0	$\searrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\searrow$	0

La courbe présente à l'origine (pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$) une tangente horizontale (puisque ρ s'annule). Etudions la branche infinie en $\frac{\pi}{3}$:

$$x(\theta) = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1-2\cos\theta} \underset{\theta\to(\frac{\pi}{3})^-}{\to} -\infty, \quad x(\theta) = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1-2\cos\theta} \underset{\theta\to(\frac{\pi}{3})^+}{\to} +\infty$$

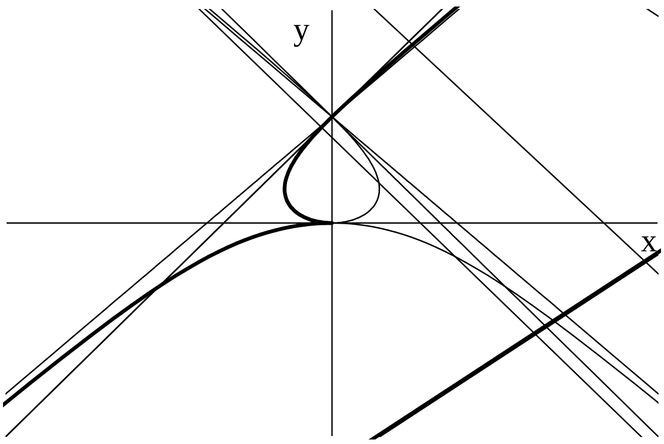
$$y(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{1-2\cos\theta} \underset{\theta\to(\frac{\pi}{3})^-}{\to} -\infty \quad y(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{1-2\cos\theta} \underset{\theta\to(\frac{\pi}{3})^+}{\to} +\infty$$

Ensuite on a :

$$\frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \tan\theta \underset{\theta\to\frac{\pi}{3}}{\to} \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} y(\theta) - \sqrt{3}x(\theta) &= \frac{\sin^2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}{1-2\cos\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{2}\cdot\frac{\tan\theta-\sqrt{3}}{\frac{1}{2}-\cos\theta} = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{2}\cdot\frac{\tan\theta-\tan(\frac{\pi}{3})}{\cos\theta-\cos(\frac{\pi}{3})} \\ &= -\frac{\sin\theta\cos\theta}{2}\cdot\frac{\tan\theta-\tan(\frac{\pi}{3})}{\theta-\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{\theta-\frac{\pi}{3}}{\cos\theta-\cos(\frac{\pi}{3})} \underset{\theta\to\frac{\pi}{3}}{\to} -\frac{\sin(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{3})}{2}\cdot\frac{\tan'(\frac{\pi}{3})}{\cos'(\frac{\pi}{3})} = \frac{\sin(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{3})}{2\cos^2(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{3})} = 1 \end{aligned}$$

La courbe admet donc une asymptote d'équation $y = \sqrt{3}x + 1$ lorsque t tend vers $\frac{\pi}{3}$. Pour finir, on note que pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $\rho(\theta) = 1$, $\rho'(\theta) = -2$ et la tangente en ce point est dirigée par $-2\vec{j} - \vec{i}$ et a donc pour pente 2.



Remarque 13
On aurait également pu écrire :

$$\begin{aligned}
y(\theta) - \sqrt{3}x(\theta) &= \sin\theta \frac{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta}{1 - 2\cos\theta} = \sin\theta \frac{\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}{\frac{1}{2} - \cos\theta} \\
&= \sin\theta \frac{\cos(\frac{\pi}{3})\sin\theta - \sin(\frac{\pi}{3})\cos\theta}{\cos(\frac{\pi}{3}) - \cos\theta} \\
&= \sin\theta \frac{\sin(\theta - \frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{3}) - \cos\theta} = -\sin\theta \frac{\sin(\theta - \frac{\pi}{3})}{\theta - \frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\theta - \frac{\pi}{3}}{\cos\theta - \cos(\frac{\pi}{3})} \\
&\underset{\theta \to \frac{\pi}{3}}{\rightarrow} -\frac{\sin(\frac{\pi}{3})\sin'(0)}{\cos'(\frac{\pi}{3})} = \frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\sin(\frac{\pi}{3})} = 1
\end{aligned}$$

On peut aussi se placer dans le repère $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{3}}$ dans lequel on a :

$$Y(\theta) = \rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\theta\sin(\theta - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos\theta} \underset{\theta \to \frac{\pi}{3}}{\rightarrow} \frac{1}{2}$$

On trouve une asymptote d'équation $Y = \frac{1}{2}$ dans le repère $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{3}}$.

3.7 Quelques problèmes classiques

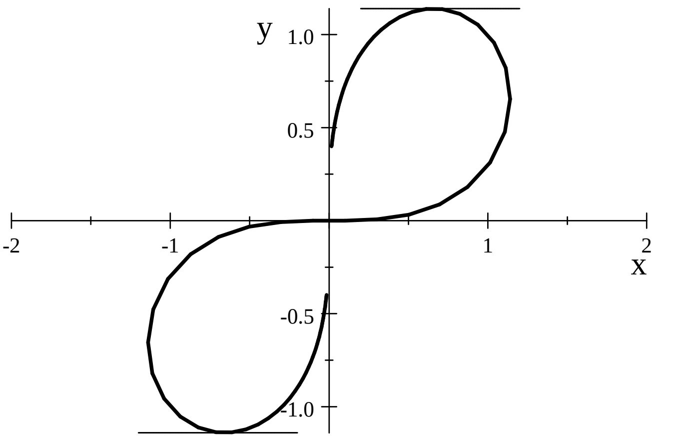
Exercice 19 (Podaire)
On considère la courbe paramétrée de composantes $x(t) = t$ et $y(t) = \frac{1}{t}$.
Pour $t \neq 0$, déterminer l'équation de droite $\mathcal{T}_t$ tangente à la courbe au point de paramètre t, ainsi que l'équation de la droite $\mathcal{D}_t$ passant par l'origine O du repère et perpendiculaire à $\mathcal{T}_t$.
Montrer que le projeté orthogonal P_t de O sur $\mathcal{T}_t$ a pour coordonnées $\frac{2t}{(t^4+1)}$ et $\frac{2t^3}{(t^4+1)}$.
Etudier la courbe décrite par le point P_t lorsque t varie.

Solution 19
On trouve facilement $\mathcal{T}_t : x + t^2 y = 2t$ et $\mathcal{D}_t : t^2 x - y = 0$, ce qui donne bien les coordonnées voulues pour le point d'intersection. On pose alors $x(t) = \frac{2t}{(t^4+1)}$ et $y(t) = \frac{2t^3}{(t^4+1)}$. Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ et impaires, ce qui permet de limiter l'étude à $\mathbb{R}_+$ en complètant par symétrie par rapport à O.

$$x'(t) = \frac{2}{(t^4+1)^2}(1 - 3t^4), \quad y'(t) = \frac{2t^2}{(t^4+1)^2}(3 - t^4)$$

t	0		$1/\sqrt[4]{3}$		1		$\sqrt[4]{3}$		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$3^{3/4}/2$	$\searrow$	1	$\searrow$	$3^{1/4}/2$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$3^{1/4}/2$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$3^{3/4}/2$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	

On a une tangente horizontale au point de paramètre 0 et une tangente verticale au point de paramètre $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$.



Remarque 14
Si $\mathcal{C}$ est une courbe paramétrée et P un point du plan, l'ensemble des projections orthogonales de P sur les tangentes à $\mathcal{C}$ est appelée podaire de $\mathcal{C}$ par rapport à P.

Exercice 20 (Orthoptique)
On considère la courbe paramétrée de composantes $x(t) = \sin^3 t - \cos^3 t$ et $y(t) = \sin^3 t + \cos^3 t$.
Montrer que la tangente $\mathcal{T}_t$ au point de paramètre t admet pour vecteur directeur le vecteur de composantes $(\sin t + \cos t, \sin t - \cos t)$ que le point soit régulier ou non.
Déterminer l'équation de $\mathcal{T}_t$ et déterminer à quelle condition les droites $\mathcal{T}_t$ et $\mathcal{T}_u$ sont perpendiculaires.
Montrer que, lorsque c'est le cas, leur point d'intersection P_t est le point de coordonnées polaires $(\theta, r) = (t, \sin(2t))$.
Etudier la courbe décrite par le point P_t lorsque t varie.

Solution 20
On trouve :

$$x'(t) = 3\cos t \sin t(\cos t + \sin t), \quad y'(t) = 3\cos t \sin t(\sin t - \cos t)$$

On ne peut pas avoir $\sin t - \cos t = \sin t + \cos t = 0$. Le point de paramètre t est donc stationnaire si et seulement si $\cos t = 0$ ou $\sin t = 0$. Pour les autres valeurs de t, le vecteur de composantes $(\sin t + \cos t, \sin t - \cos t)$ dirige bien la tangente. Lorsque le point est stationnaire, on calcule :

$$x''(t) = 9\cos^2 t \sin t + 9\cos^3 t - 3\sin t - 6\cos t, \quad y''(t) = -9\cos^3 t + 9\cos^2 t \sin t - 3\sin t + 6\cos t$$

Supposons $\cos t = 0$, alors $\sin t \neq 0$ et on a :

$$x''(t) = -3\sin t = -3(\cos t + \sin t), \quad y''(t) = -3\sin t = -3(\sin t - \cos t)$$

Supposons maintenant $\sin t = 0$, alors $\cos t = \pm 1$ et on a :

$$x''(t) = 9\cos^3 t - 6\cos t = 3\cos t(3\cos^2 t - 2) = 3\cos t = 3(\cos t + \sin t)$$
$$y''(t) = -9\cos^3 t + 6\cos t = 3\cos t(2 - 3\cos^2 t) = -3\cos t = 3(\sin t - \cos t)$$

On a dans chacun des cas $(x''(t), y''(t))$ colinéaire à $(\sin t + \cos t, \sin t - \cos t)$ qui est non nul. Ce vecteur dirige donc la tangente au point de paramètre t. Les tangentes aux points de paramètres t et u sont perpendiculaires si et seulement si on a :

$$\mathcal{T}_t \perp \mathcal{T}_u \Leftrightarrow (\sin t + \cos t)(\sin u + \cos u) + (\sin t - \cos t)(\sin u - \cos u) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin t \sin u + \cos t \cos u = 0 \text{si et seulement si } \cos(u-t) = 0 \Leftrightarrow u - t = \frac{\pi}{2} \bmod \pi \Leftrightarrow u = t + \frac{\pi}{2} \bmod \pi$$

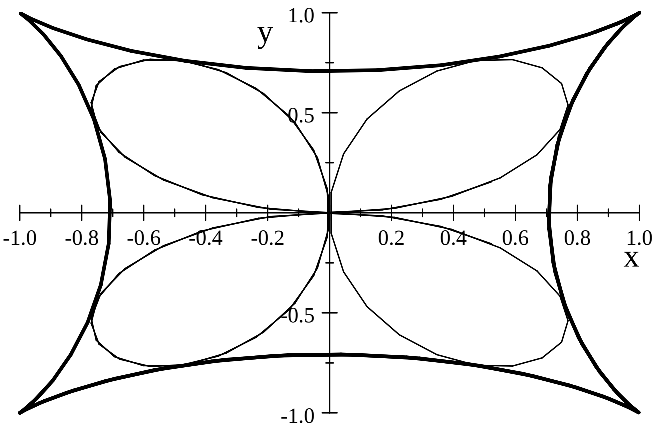
Le cas $u = t + \dfrac{3\pi}{2}$ s'obtient à partir de $u = t + \dfrac{\pi}{2}$ en échangeant u et t. Par conséquent, il suffit de considérer le cas $u = t + \dfrac{\pi}{2}$. On trouve pour équation de $\mathcal{T}_t$ et $\mathcal{T}_{t+\frac{\pi}{2}}$:

$$\mathcal{T}_t : (\sin t - \cos t)x - (\sin t + \cos t)y = -2\cos t \sin t$$
$$\mathcal{T}_{t+\frac{\pi}{2}} : (\sin t + \cos t)x + (\sin t - \cos t)y = 2\cos t \sin t$$

En calculant l'intersection de ces deux droites, on trouve le point de coordonnées $x(t) = 2\cos^2 t \sin t$ et $y(t) = 2\sin^2 t \cos t$. Par conséquent, le point P_t admet pour coordonnées polaires $(\theta, r) = (t, \sin(2t))$. Il suffit donc d'étudier la courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$ avec $\rho(\theta) = \sin(2\theta)$. On a $\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$, on peut donc limiter l'étude à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ en complétant par symétrie par rapport à O. Comme ρ est impaire, on peut limiter l'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$ en complétant par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Finalement, on a $\rho\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\pi - 2\theta) = \sin(2\theta) = \rho(\theta)$. On peut donc limiter l'étude à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ en complétant par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$. On a $\rho'(\theta) = 2\cos(2\theta)$, d'où le tableau de variations :

θ	0		$\pi/4$
$\rho'(\theta)$	2	$-$	0
$\rho(\theta)$	0	$\nearrow$	1

On note une tangente horizontale en $\theta = 0$ et une tangente dirigée par $(1, -1)$ en $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.



Remarque 15
Si $\mathcal{C}$ est une courbe paramétrée, le lieu des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à $\mathcal{C}$ est appelé courbe orthoptique de $\mathcal{C}$.

Exercice 21 (Hypocycloïde)
On considère deux cercles. Le premier, noté $\mathcal{C}$, est fixe, de centre O et de rayon R. Le second, noté $\mathcal{C}'$, est mobile et roule sans glisser à l'intérieur de $\mathcal{C}$. On note $R' < R$ son rayon et Ω son centre. Sur le cercle $\mathcal{C}'$, on fixe un point M et on suppose qu'au temps $t = 0$ les deux cercles sont tangents en M.
Décrire le mouvement du point M (on posera $\alpha = \dfrac{R}{R'}$). Etudier la courbe obtenue lorsque $R = 3$ et $R' = 1$.

Solution 21
On considère le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où on a posé $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ (en $t = 0$). À un instant donné, on note $\theta = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{O\Omega}})$ et $\theta' = (\widehat{\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{\Omega M}})$. La condition de roulement sans glisser donne $R'\theta' = -R\theta$ (si le cercle $\mathcal{C}'$ roule sur le cercle $\mathcal{C}$ dans le sens horaire, alors θ' est négatif et θ est positif, la distance parcourue par M dans le repère mobile $(\Omega, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta})$ vaut $R'\theta'$ et la distance parcourue par le cercle $\mathcal{C}'$ vaut $R(-\theta)$), donc $\theta' = -\alpha\theta$ avec $\alpha = \dfrac{R}{R'}$. Dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$, le point M a pour coordonnées $(R'\cos\theta', R'\sin\theta')$, donc, par définition des coordonnées dans un repère donné, on a

$$\overrightarrow{\Omega M} = R'\cos\theta'\overrightarrow{u}(\theta) + R'\sin\theta'\overrightarrow{v}(\theta) = R'\cos(\alpha\theta)\overrightarrow{u}(\theta) + R'\sin(\alpha\theta)\overrightarrow{v}(\theta)$$

Ecrivons ce vecteur dans le repère $(O, (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}))$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = (R - R')\overrightarrow{u}(\theta) + R'\cos(\alpha\theta)\overrightarrow{u}(\theta) - R'\sin(\alpha\theta)\overrightarrow{v}(\theta) \\
&= (R - R' + R'\cos(\alpha\theta))\overrightarrow{u}(\theta) - R'\sin(\alpha\theta)\overrightarrow{v}(\theta) \\
&= (R - R' + R'\cos(\alpha\theta))\left(\cos\theta\overrightarrow{i} + \sin\theta\overrightarrow{j}\right) - R'\sin(\alpha\theta)\left(-\sin\theta\overrightarrow{i} + \cos\theta\overrightarrow{j}\right) \\
&= \left[(R - R' + R'\cos(\alpha\theta))\cos\theta + R'\sin(\alpha\theta)\sin\theta\right]\overrightarrow{i} + \left[(R - R' + R'\cos(\alpha\theta))\sin\theta - R'\sin(\alpha\theta)\cos\theta\right]\overrightarrow{j} \\
&= \left[(R - R')\cos\theta + R'(\cos(\alpha\theta)\cos\theta + \sin(\alpha\theta)\sin\theta)\right]\overrightarrow{i} + \left[(R - R')\sin\theta + R'(\cos(\alpha\theta)\sin\theta - \sin(\alpha\theta)\cos\theta)\right]\overrightarrow{j} \\
&= \left[(R - R')\cos\theta + R'\cos((\alpha - 1)\theta)\right]\overrightarrow{i} + \left[(R - R')\sin\theta + R'\sin((1 - \alpha)\theta)\right]\overrightarrow{j} \\
&= \left[(R - R')\cos\theta + R'\cos((\alpha - 1)\theta)\right]\overrightarrow{i} + \left[(R - R')\sin\theta - R'\sin((\alpha - 1)\theta)\right]\overrightarrow{j} \\
&= R'\left\{\left[(\alpha - 1)\cos\theta + \cos((\alpha - 1)\theta)\right]\overrightarrow{i} + \left[(\alpha - 1)\sin\theta - \sin((\alpha - 1)\theta)\right]\overrightarrow{j}\right\}
\end{aligned}$$

On a alors la représentation paramétrique :

$$x(\theta) = R'\left[(\alpha - 1)\cos\theta + \cos((\alpha - 1)\theta)\right] \qquad y(\theta) = R'\left[(\alpha - 1)\sin\theta - \sin((\alpha - 1)\theta)\right]\overrightarrow{j}$$

Lorsque $\alpha = \dfrac{R}{R'}$ est un entier, la courbe obtenue est appelée une hypocycloïde à n points de rebroussement. Pour $n = 3$, la courbe obtenue porte également le nom de deltoïde. Dans ce cas particulier, on a :

$$x(\theta) = 2\cos\theta + \cos(2\theta), \quad y(\theta) = 2\sin\theta - \sin(2\theta)$$

Les fonctions x et y sont 2π-périodiques, on limitera donc l'étude à $[-\pi, \pi]$. Comme x est paire et y impaire, on limitera l'étude à $[0, \pi]$ et on complètera par symétrie par rapport à l'axe des abscisses. On a :

$$\begin{aligned}
x'(\theta) &= -2\sin\theta - 2\sin(2\theta) = -2\sin\theta - 4\sin\theta\cos\theta = -2\sin\theta(1 + 2\cos\theta) \\
y'(\theta) &= 2\cos\theta - 2\cos(2\theta) = 2\cos\theta - 2(2\cos^2\theta - 1) = -2(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1)
\end{aligned}$$

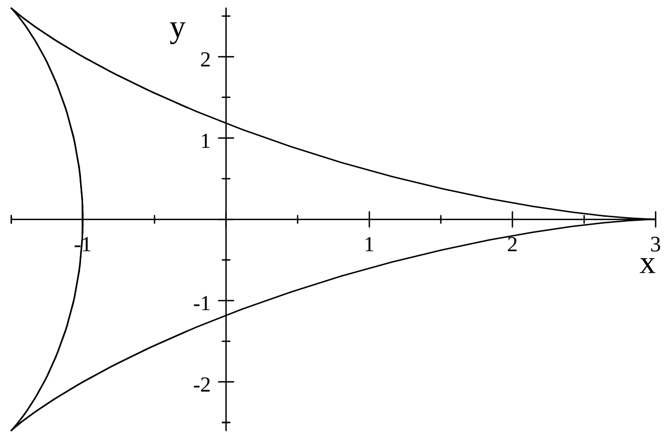
On a donc le tableau de variations suivant :

θ	0		$2\pi/3$		π
$x'(\theta)$	0	$-$	0	$+$	0
$x(\theta)$	3	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	-1
$y(\theta)$	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}/2$	$\searrow$	0
$y'(\theta)$	0	$+$	0	$-$	

La courbe présente une tangente verticale en $\theta = \pi$. En $\theta = 0$ et $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, on a des points stationnaires :

$$\begin{aligned}
x''(\theta) &= -2\cos\theta - 4\cos(2\theta), \quad x''(0) = -6, \quad x''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3 \\
y''(\theta) &= -2\sin\theta + 4\sin(2\theta), \quad y''(0) = 0, \quad y''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}
\end{aligned}$$

La tangente en $\theta = 0$ est donc horizontale et celle en $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ est dirigée par $\overrightarrow{u}(\dfrac{2\pi}{3})$.



On aurait pu montrer que la courbe est invariante par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et limiter l'étude à $[0, \frac{\pi}{3}]$. Le plus simple pour cela est d'utiliser des notations complexes pour vérifier que :

$$x\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)+iy\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)=e^{\frac{2i\pi}{3}}(x(t)+iy(t))$$