Géométrie dans l'espace

Abdellah Bechata

www.mathematiques.fr.st

1 Modes de repérage

1.1 Bases et repères

Pour pouvoir décrire la position d'un point dans l'espace à l'aide de coordonnées (trois nombres) il faut un système permettant de décrire l'espace tout entier. Le cas le plus simple (mais nous verrons d'autres possibilités plus loin) est de choisir trois vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ non coplanaires (un tel triplet de vecteurs non coplanaires est appelé une base de l'espace). Ainsi tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace peut s'écrire :

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

où les réels x, y et z sont uniques et appelés coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Pour pouvoir repérer un point de l'espace (et plus seulement un vecteur), il faut de plus choisir une origine. Une telle origine est constituée d'un point O quelconque et le quadruplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est alors appelé un repère de l'espace. Tout point M peut s'écrire :

$$M = O + x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

et les réels x, y et z sont uniques et appelés coordonnées du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ (notons que x, y et z sont, par définition, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$).

Remarque 1 (Z)
Dans la suite, les écritures :

$$M\left|\begin{matrix} & x \\ & y \\ {}_{\mathcal{R}} & z \end{matrix}\right. \quad , \quad \overrightarrow{u}\left|\begin{matrix} & x \\ & y \\ {}_{\mathcal{B}} & z \end{matrix}\right.$$

signifient respectivement que M est le point du plan de coordonnées x, y et z dans le repère $\mathcal{R}$ et que $\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées x, y et z dans la base $\mathcal{B}$. Mais comme les coordonnées dépendent de la base ou du repère choisis et que nous serons amenés régulièrement à faire des changements de bases ou de repères, il faudra prendre garde à toujours préciser dans quelle base ou repère on se place lorsque l'on utilise ces notations.

1.2 Bases et repères orthonormés

Lorsqu'une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est telle que $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = \left\|\overrightarrow{k}\right\| = 1$ et $\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{k} = 0$, on dit que la base est orthonormée et un repère construit sur une base orthonormée est dit orthonormé. Dans les repères orthonormés, les coordonnées se calculent très simplement à l'aide de produits scalaire. Les calculs de distances et de produits scalaires sont également très simples à effectuer.

Proposition 1 (Coordonnées dans les repères orthonormés)
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé de l'espace. Pour tout point M et tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on a, dans ce repère :

$$M\left|\begin{matrix} \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{k} \end{matrix}\right. \quad , \quad \overrightarrow{u}\left|\begin{matrix} \overrightarrow{u}.\overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{k} \end{matrix}\right.$$

Proposition 2 (Utilisation des coordonnées dans un repère orthonormé)
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé du plan. Si dans ce repère on a $A\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right.$ et $B\left|\begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix}\right.$, alors :

$$AB^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$$

Si dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *on a* $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right.$ *et* $\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{l} x' \\ y' \\ z' \end{array}\right.$ *, alors :*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz' \; \|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Exercice 1
Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé direct, on pose :

$$\overrightarrow{I}\left|\begin{array}{l} \frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \end{array}\right._{\mathcal{R}} \quad \overrightarrow{J}\left|\begin{array}{l} \frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} \end{array}\right._{\mathcal{R}} \quad \overrightarrow{K}\left|\begin{array}{l} \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} \\ -\frac{8}{9} \end{array}\right._{\mathcal{R}}$$

Montrer que le repère $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ est orthonormé. Pour $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right._{\mathcal{R}}$, donner les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans $\mathcal{R}'$.

Solution 1
Il est facile de vérifier que $\mathcal{R}'$ est orthonormé. Si $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array}\right._{\mathcal{R}'}$, alors :

$$X = <\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{I}> = \frac{7x + 4y + 4z}{9}, \quad Y = <\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{J}> = \frac{4x - 8y + z}{9}, \quad Z = <\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{K}> = \frac{4x + y - 8z}{9}$$

1.3 Orientation, base et repères orthonormés directs

Lorsqu'on dispose deux deux repères orthonormés $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $(O', \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}')$, le second est toujours image du premier par un déplacement (composée d'une translation et d'une rotation) ou d'un anti-déplacement (composée d'une symétrie plane et d'un déplacement). Deux repères quelconques seront dits de même sens lorsque l'un est l'image de l'autre par un déplacement et de sens contraires lorsqu'il faut utiliser un anti-déplacement. Ainsi, on voit apparaitre de classes de repères, à l'intérieur desquelles les repères sont de même sens et deux repères de classes différentes étant toujours de sens contraires. Notons qu'il n'est pas nécessaire, à ce stade, de privilégier un sens par rapport à un autre. Par exemple, si on dispose de deux vecteurs unitaires et orthogonaux $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on cherche souvent un troisième vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ soit orthonormée. Il y a cependant deux manières possibles de choisir ce vecteur $\overrightarrow{w}$. Privilégier un sens particulier parmi les bases orthonormées de l'espace permet de faire un choix entre ces deux possibilités.

Choisir une orientation de l'espace, c'est choisir une des deux classes de repères mises en évidence précédemment et appeler les repères de cette classe des repères orthonormés directs et les bases associées à ces repères seront appelées bases orthonormées directes. Les repères de l'autre classe seront dits indirects (ou rétrogrades). Notons qu'un tel choix peut se faire en fixant un repère orthonormé particulier et en décrétant directs tous les repères de même sens. Ce choix ne peut être qu'arbitraire. Lorsqu'un tel choix aura été effectué, on dira que le plan est orienté. Le résultat essentiel concernant l'orientation est le suivant (que nous ne pouvons prouver que partiellement, faute d'une définition formelle de l'orientation).

Proposition 3
Dans une base orthonomée directe, considérons les vecteurs $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right.$ *et* $\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{l} x' \\ y' \\ z' \end{array}\right.$ *. On note* $\overrightarrow{w}$ *le vecteur qui s'écrit dans cette base sous la forme :*

$$\overrightarrow{w}\left|\begin{array}{l} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{array}\right.$$

Alors, ce vecteur $\overrightarrow{w}$ *possède les propriétés suivantes :*

1. *Le vecteur* $\overrightarrow{w}$ *est orthogonal à* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$*;*
2. *On a* $\|\overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, |\sin\theta|$ *où* θ *désigne une mesure de l'angle non orienté entre les vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$*;*
3. *Le vecteur* $\overrightarrow{w}$ *est nul si et seulement si* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires;*
4. *Dans un plan* $\mathcal{P}$ *dirigé par* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *et orienté par* $\overrightarrow{w}$*, la famille* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *est directe.*

Preuve :

1. On calcule $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = x(yz' - zy') + y(zx' - xz') + z(xy' - yx') = 0$$
$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = x'(yz' - zy') + y'(zx' - xz') + z'(xy' - yx') = 0$$

2. Calculons $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}^2 + \|w\|^2$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}^2 + \|w\|^2 &= (xx' + yy' + zz')^2 + (yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2 \\ &= x^2x'^2 + y^2y'^2 + z^2z'^2 + y^2z'^2 + z^2y'^2 + z^2x'^2 + x^2z'^2 + x^2y'^2 + y^2x'^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \|\overrightarrow{u}\|^2 \|\overrightarrow{v}\|^2\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\|\overrightarrow{w}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \|\overrightarrow{v}\|^2 - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \|\overrightarrow{v}\|^2 (1 - \cos^2\theta) = \|\overrightarrow{u}\|^2 \|\overrightarrow{v}\|^2 \sin^2\theta$$

d'où le résultat;

3. Le point précédent montre que $\overrightarrow{w}$ est nul si et seulement si l'un des vecteurs $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{w}$ est nul ou si $\sin\theta = 0$. Comme dans chacun des cas on a $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ colinéaires, on en déduit le résultat voulu;

4. Ce point est admis.

■

Exercice 2
Dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$, on considère les vecteurs :

$$\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ {}_{\mathcal{R}}\ 3 \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{v}\left|\begin{array}{l} 3 \\ \alpha \\ {}_{\mathcal{R}}\ \beta \end{array}\right.$$

Déterminer α et β tels que les vecteurs soient colinéaires. Pour $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, déterminer la valeur absolue du sinus de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Solution 2
On a par lecture directe $\alpha = 6$ et $\beta = 9$, mais on peut aussi utiliser le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\left|\begin{array}{c} 2\beta - 3\alpha \\ 9 - \beta \\ {}_{\mathcal{R}}\ \alpha - 6 \end{array}\right.$$

et on a $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\alpha = 6$ et $\beta = 9$.

Remarque 2
Même si l'espace $\mathcal{E}$ est orienté, ceci n'induit en rien une orientation sur les plans de $\mathcal{E}$. Pour orienter un plan $\mathcal{P}$ de E, le moyen classique consiste à choisir un vecteur $\overrightarrow{n}$ unitaire et orthogonal à $\mathcal{P}$ (il n'y a que deux choix possibles, chacun conduisant, comme on va le voir, à l'une des deux orientations possibles de $\mathcal{P}$). Le choix du vecteur $\overrightarrow{n}$ induit une orientation de $\mathcal{P}$ de la manière suivante : une base orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de $\mathcal{P}$ est dite directe si et seulement si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{n})$ est une base orthonormée directe de l'espace. On peut noter que, pour une famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de deux vecteurs non colinéaires d'un plan $\mathcal{P}$, il existe un unique vecteur unitaire et normal à $\mathcal{P}$ induisant une orientation de $\mathcal{P}$ pour laquelle la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est directe.

1.4 Changement de repère

Nous aurons souvent à travailler dans plusieurs repères à la fois ou, dans les cas les plus simple, à changer de repère. Il faut dans ce cas pouvoir faire le lien entre les deux systèmes de coordonnées utilisés. Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $(O', \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}')$ deux repères orthonormés du plan (nous qualifierons les premier d'ancien repère et le second de nouveau repère). On commence par écrire les coordonnées du nouveau repère dans l'ancien :

$$\begin{aligned} O' &= O + \alpha_1 \overrightarrow{i} + \alpha_2 \overrightarrow{j} + \alpha_3 \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{i}' &= a_{11} \overrightarrow{i} + a_{21} \overrightarrow{j} + a_{31} \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{j}' &= a_{12} \overrightarrow{i} + a_{22} \overrightarrow{j} + a_{32} \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{k}' &= a_{13} \overrightarrow{i} + a_{23} \overrightarrow{j} + a_{33} \overrightarrow{k} \end{aligned}$$

Soit M un point du plan, si ses coordonnées sont x et y dans l'ancien repère et x' et y' dans le nouveau, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \\
&= \alpha_1 \overrightarrow{i} + \alpha_2 \overrightarrow{j} + \alpha_3 \overrightarrow{k} + x' \overrightarrow{i}' + y' \overrightarrow{j}' + z' \overrightarrow{k}' \\
&= (\alpha_1 + x' a_{11} + y' a_{12} + z' a_{13}) \overrightarrow{i} \\
&+ (\alpha_2 + x' a_{21} + y' a_{22} + z' a_{23}) \overrightarrow{j} \\
&+ (\alpha_3 + x' a_{31} + y' a_{32} + z' a_{33}) \overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit, par unicité des coordonnées :

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_1 + x' a_{11} + y' a_{12} + z' a_{13} \\
y &= \alpha_2 + x' a_{21} + y' a_{22} + z' a_{23} \\
z &= \alpha_3 + x' a_{31} + y' a_{32} + z' a_{33}
\end{aligned}$$

Nous verrons que c'est sous cette forme, en pratique, que l'on a souvent besoin d'avoir une relation entre coordonnées. Si toutefois il est nécessaire d'exprimer x', y' et z' en fonction de x, y et z, on peut au choix suivre la même méthode en échangeant le rôle des deux repères ou bien inverser le système ci-dessus.

Exercice 3
On considère le repère $\mathcal{R}' = (O', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ avec :

$$O' \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{I} \left| \begin{array}{c} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{J} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{K} \left| \begin{array}{c} \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Donner une relation entre les coordonnées dans $\mathcal{R}$ et les coordonnées dans $\mathcal{R}'$.

Solution 3
On considère $M \left| \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right._{\mathcal{R}}, M \left| \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \right._{\mathcal{R}'}$, en appliquant ce qui précède :

$$x = 1 + \frac{3}{4}X + \frac{1}{4}Y + \frac{\sqrt{6}4}{Z} y = 1 + \frac{1}{4}X + \frac{3}{4}Y - \frac{\sqrt{6}}{4}Z z = -1 - \frac{\sqrt{6}}{4}X + \frac{\sqrt{6}}{4}Y + \frac{1}{2}Z$$

Comme $\mathcal{R}'$ est orthonormé, on peut également utiliser :

$$\begin{aligned}
X &=< \overrightarrow{O'M} \mid \overrightarrow{I} >= \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(y-1) - \frac{\sqrt{6}}{4}(z+1) \\
Y &=< \overrightarrow{O'M} \mid \overrightarrow{J} >= \frac{1}{4}(x-1) + \frac{3}{4}(y-1) + \frac{\sqrt{6}}{4}(z+1) \\
Z &= \frac{\sqrt{6}}{4}(x-1) - \frac{\sqrt{6}}{4}(y-1) + \frac{1}{2}(z+1)
\end{aligned}$$

1.5 Coordonnées cylindriques et sphériques

Voyons maintenant d'autres manières de repérer des points et des vecteurs dans l'espace, très utilisée aussi bien en mathématiques qu'en physique. Fixons un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et, pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons :

$$\overrightarrow{u}(\theta) = \cos\theta \overrightarrow{i} + \sin\theta \overrightarrow{j} \overrightarrow{v}(\theta) = -\sin\theta \overrightarrow{i} + \cos\theta \overrightarrow{j}$$

Alors, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, il existe un triplet de réels (r, θ, z) tel que $\overrightarrow{u} = r\overrightarrow{u}(\theta) + z\overrightarrow{k}$ et pour tout point M du plan, il existe un triplet de réels (r, θ, z) tel que $M = O + r\overrightarrow{u}(\theta) + z\overrightarrow{k}$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le point P, projeté orthogonal du point M sur le plan Oxy (passant par O et dirigé par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$). On a alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$. En utilisant les coordonnées polaires dans le plan Oxy muni du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on écrit $\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{u}(\theta)$. Par ailleurs comme $\overrightarrow{PM}$ est orthogonal au plan Oxy, il est colinéaire à $\overrightarrow{k}$ et on peut alors écrire $\overrightarrow{PM} = z\overrightarrow{k}$, ce qui permet bien d'obtenir le résultat voulu. On dit alors que r, θ et z sont les coordonnées cynlindriques de $\overrightarrow{u}$ dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ ou de M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Notons que, à la différence des coordonnées cartésiennes, les coordonnées cylindriques ne sont pas uniques : comme (r, θ) sont les coordonnées polaires du point P dans le plan Oxy, elles présentent les mêmes particularités. La composante z est cependant unique. On en déduit que, si M est a pour coordonnées cylindriques (r, θ, z), alors $OM = \sqrt{r^2 + z^2}$. Si de plus le point P est distinct de O (autrement dit, si M n'est pas situé sur l'axe Oz), alors $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OP}}) \bmod [\pi]$. Notons que, dans tous les cas, les coordonnées cartésiennes de M sont $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. Si on désire avoir unicité des coordonnées cylindriques, il est possible d'imposer des conditions supplémentaires comme le montre la proposition suivante (qui ne représente qu'une manière possible de faire).

Proposition 4
Supposons fixé un repère orthonormé direct d'origine O. Un vecteur non nul (respectivement un point du plan distinct de O) possède un unique couple de coordonnées cylindriques (r, θ, z) tel que $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Commentaire 1
Si l'on utilise les coordonnées cylindriques, le réel $|r|$ ne représente pas la distance OM. On introduit pour y remédier les coordonnées cylindriques. Considérons un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ ainsi qu'un point M. Notons P la projection orthogonale de M sur le plan Oxy, θ une mesure de l'angle orienté de $\overrightarrow{i}$ à $\overrightarrow{OP}$ (n'importe quelle valeur de θ convient si $P = O$), ϕ une mesure de l'angle orienté de $\overrightarrow{k}$ à $\overrightarrow{OM}$ et posons $r = OM$. On dit que le triplet (r, θ, ϕ) est un triplet de coordonnées cartésiennes pour M. On a alors :

$$M = O + r\sin\phi\cos\theta\,\overrightarrow{i} + r\sin\phi\sin\theta\,\overrightarrow{j} + r\cos\phi\,\overrightarrow{k}$$

L'angle ϕ est appelé la colatitude du point M (sa longitude est l'angle $\frac{\pi}{2} - \phi$). Si on impose de plus $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\phi \in [0, \pi]$, alors les coordonnées polaires d'un point situé hors de l'axe Oz sont uniques.

Exercice 4
Déterminer des systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques pour les points suivants :

$$A \left| \begin{array}{c} \sqrt{6} \\ \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{array} \right. \qquad B \left| \begin{array}{c} -\frac{3}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Solution 4
Pour A, coordonnées cylindriques $(r, \theta, z) = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{6}, 2\sqrt{2})$ et sphériques $(r, \theta, \phi) = (4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$. Pour B, coordonnées cylindriques $(r, \theta, z) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2})$ et sphériques $(r, \theta, \phi) = (1, \frac{7\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$.

2 Produit scalaire, produit vectoriel et déterminant

2.1 Produit scalaire

Nous ne revenons pas sur ce point. Les formules pratiques de calcul ont été données lors de la discussion sur les repères orthonormés et l'interprétation géométrique est la même que dans le cadre de la géométrie plane.

2.2 Produit vectoriel

Le déterminant de deux vecteurs s'est avéré être, en géométrie plane, un outil utile et efficace. Nous allons le généraliser, dans le cas de la géométrie de l'espace, de deux manière différentes en définissant le produit vectoriel de deux vecteurs et le déterminant de trois vecteurs. Partant de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, il est possible de considérer leur déterminant en tant que vecteurs du plan dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (il faut, avant cela, orienter ce plan, nous allons voir comment dans un instant). Nous allons donner à la quantité représentée par ce déterminant une direction et une orientation. Nous obtiendrons alors un vecteur, de norme $|\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|$, que nous appellerons produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Définition 1
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires et soit $\mathcal{P}$ un plan dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur unitaire, orthogonal au plan $\mathcal{P}$, choisi de sorte que dans le plan $\mathcal{P}$ orienté par $\overrightarrow{n}$, la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ soit directe. On appelle alors produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et on note $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, le vecteur :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\overrightarrow{n}$$

(le déterminant étant calculé dans le plan $\mathcal{P}$ orienté par $\overrightarrow{n}$). Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, leur produit vectoriel est, par définition, le vecteur nul.

Théorème 1 (Propriétés géométriques du produit vectoriel)
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan orienté :

1. *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux et unitaires, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est l'unique vecteur tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ soit une base orthonormée directe;*
2. *On a $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires;*
3. *le réel $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$ est égal à l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*

Théorème 2 (Propriétés algébriques du produit vectoriel)
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ des vecteurs et λ et μ deux réels, on a les résultats suivants :

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \quad \overrightarrow{u} \wedge (\lambda \overrightarrow{v}_1 + \mu \overrightarrow{v}_2) = \lambda \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}_1 + \mu \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}_1$$

(et on dit que l'application produit vectoriel est antisymétrique et bilinéaire). Si dans une base orthonormée directe on a $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right.$ et $\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{l} x' \\ y' \\ z' \end{array}\right.$, alors on a dans cette même base :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \left|\begin{array}{l} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{array}\right.$$

Preuve :
Ces deux points se démontrent aisément en utilisant les coordonnées. ■

Méthode 1 (Déterminer $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$)
On peut procéder de deux manières :

- *analytiquement : si on sait que $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ et $\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{l} x' \\ y' \\ z' \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ avec $\mathcal{R}$ orthonormé direct, alors :*

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \left|\begin{array}{l} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{array}\right._{\mathcal{R}}$$

- *géométriquement : si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (ce qui fixe sa direction) de norme $\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, |\sin\theta|$ et tel que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ soit directe.*

Exercice 5
Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormée et directe de l'espace. Calculer :

$$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k}, (\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}) \wedge \overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{i} \wedge (\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j})$$

Solution 5

$$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$$
$$(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}) \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i}, \quad \overrightarrow{i} \wedge (\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

Remarque 3 (Z)
Noter que, pour des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, on a, en général :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}, \quad \overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) \neq (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w}$$

(on dit qu le produit vectoriel n'est ni commutatif, ni associatif).

Exercice 6
Soit $ABCD$ un parallélogramme avec dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$:

$$A \left|\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right._{\mathcal{R}} \quad B \left|\begin{array}{r} 2 \\ -1 \\ 5 \end{array}\right._{\mathcal{R}} \quad C \left|\begin{array}{r} 4 \\ 1 \\ 3 \end{array}\right._{\mathcal{R}}$$

Déterminer l'aire du parallélogramme $ABCD$.

Solution 6
On trouve $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \left|\begin{array}{l} 2 \\ 6 \\ _{\mathcal{R}}\ 8 \end{array}\right.$ et $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = 2\sqrt{26}$.

Exercice 7
Soit ABC un triangle avec dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$:

$$A \left|\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ _{\mathcal{R}}\ -1 \end{array}\right. \quad B \left|\begin{array}{r} 3 \\ -1 \\ _{\mathcal{R}}\ -1 \end{array}\right. \quad C \left|\begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ _{\mathcal{R}}\ 2 \end{array}\right.$$

Déterminer l'aire du triangle ABC.

Solution 7
On trouve $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \left|\begin{array}{r} -9 \\ -6 \\ _{\mathcal{R}}\ -5 \end{array}\right.$ et $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{142}$.

2.3 Déterminant

Définition 2
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. Le déterminant de ces trois vecteurs, noté $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est le nombre réel défini par :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$$

Théorème 3 (Propriétés géométriques du déterminant)
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace :

- *on a $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires;*
- *le réel $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$ représente le volume algébrique du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.*

Théorème 4 (Propriétés algébriques du déterminant)
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w}_1$ et $\overrightarrow{w}_2$ des vecteurs et λ et μ deux réels, on a les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = \det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) &= -\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \\ \det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) &= \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \\ \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{w}_1 + \mu\overrightarrow{w}_2) &= \lambda\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_1) + \mu\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_2) \end{aligned}$$

Si dans une base $\mathcal{B}$ orthonormée et directe on a :

$$\overrightarrow{u} \left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right. , \quad \overrightarrow{v} \left|\begin{array}{l} x' \\ y' \\ z' \end{array}\right. , \quad \overrightarrow{w} \left|\begin{array}{l} x'' \\ y'' \\ z'' \end{array}\right.$$

alors on a :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (yz' - zy')x'' + (zx' - xz')y'' + (xy' - yx')z''$$

Exercice 8
Calculer le volume du parallélépipède formé par les vecteurs $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{PS}$ avec dans un repère orthonormal direct $\mathcal{R}$:

$$P \left|\begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ _{\mathcal{R}}\ 4 \end{array}\right. \quad Q \left|\begin{array}{r} 2 \\ 0 \\ _{\mathcal{R}}\ 1 \end{array}\right. \quad R \left|\begin{array}{r} 0 \\ 2 \\ _{\mathcal{R}}\ 3 \end{array}\right. \quad S \left|\begin{array}{r} 3 \\ 5 \\ _{\mathcal{R}}\ 7 \end{array}\right.$$

Solution 8
On trouve $\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{QR} \left|\begin{array}{l} 8 \\ 4 \\ _{\mathcal{R}}\ 4 \end{array}\right.$, puis $\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}, \overrightarrow{PS}) = 52$.

Exercice 9
Déterminer $a \in \mathbb{R}$ de sorte que les vecteurs :

$$\overrightarrow{u} \left|\begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ _{\mathcal{R}}\ a \end{array}\right. \quad \overrightarrow{v} \left|\begin{array}{l} 2 \\ a \\ _{\mathcal{R}}\ 1 \end{array}\right. \quad \overrightarrow{w} \left|\begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ _{\mathcal{R}}\ 1 \end{array}\right.$$

(dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$) soient coplanaires.

Solution 9
On trouve $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -a^2 + a - 3$. Cette équation ne possède pas de solution dans $\mathbb{R}$, les vecteurs ne peuvent pas être coplanaires.

Définition 3
Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *une famille de trois vecteurs de l'espace, non coplanaires. Cette famille est dite directe si* $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) > 0$ *et indirecte dans le cas contraire.*

3 Plans, droites et sphères

L'analogue dans l'espace de la droite du plan est le plan de l'espace. En effet, un point quelconque du plan possède deux degrés de liberté alors qu'un point de l'espace en possède trois. Considérer une droite du plan, c'est supprimer un degré de liberté au moyen d'une contrainte (équation) ce qui donne une droite ou, plus généralement, une courbe du plan. Si on supprime un degré de liberté à un point de l'espace, on obtient un plan ou, plus généralement une surface. Ensuite, si on désire décrire une droite de l'espace, il faut supprimer deux degrés de liberté, autrement dit considérer deux équations (ce qui est naturel car une droite peut toujours être considérée comme intersection de deux plans non parallèles). De manière analogue, pour décrire un point du plan il faut deux équations pour supprimer deux degrés de liberté (ce qui est là encore naturel puisqu'un point du plan peut toujours être considéré comme intersection de deux droites non parallèles). On suppose fixés un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ associé à la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

3.1 Représentations d'un plan

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Ceci signifie que le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y, z) vérifient l'équation. Là encore, un plan peut posséder plusieurs équations cartésiennes distinctes. Toutefois deux équations cartésiennes dans le même repère :

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

représentent le même plan si et seulement si il existe $\lambda \neq 0$ tel que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$ et $d' = \lambda d$ (on dit que les deux équations sont proportionnelles). Une représentation paramétrique d'un plan $\mathcal{P}$ est constituée de trois fonctions de deux variables :

$$x : (s,t) \mapsto a + \alpha s + \alpha' t, y : (s,t) \mapsto b + \beta s + \beta' t, z : (s,t) \mapsto c + \gamma s + \gamma' t$$

que l'on notera plus simplement :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(s,t) & = & a + \alpha s + \alpha' t \\ y(s,t) & = & b + \beta s + \beta' t \\ z(s,t) & = & c + \gamma s + \gamma' t \end{array} \right.$$

décrivant tous les points de $\mathcal{P}$ (autrement dit, tout point de $\mathcal{P}$ doit pouvoir s'écrire comme le point de coordonnées $(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ pour une certaine valeur de s et de t). Nécessairement, on a $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$ et $(\alpha', \beta', \gamma') \neq (0,0,0)$. On doit avoir de plus les vecteurs de coordonnées dans $\mathcal{B}$ (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ non colinéaires. Notons que la représentation paramétrique d'un plan n'est pas unique : son écriture dépend du repère considéré mais, même dans un même repère, on peut obtenir des représentations paramétriques différentes.

Méthode 2 (Représentations d'un plan)
Pour obtenir une représentation paramétrique d'un plan $\mathcal{P}$ *:*

- *si ce plan est défini par un point* $A \left| \begin{array}{c} a \\ b \\ _{\mathcal{R}}\ c \end{array} \right.$ *et deux vecteurs directeurs* $\overrightarrow{u} \left| \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ _{\mathcal{R}}\ \gamma \end{array} \right.$ *et* $\overrightarrow{v} \left| \begin{array}{c} \alpha' \\ \beta' \\ _{\mathcal{R}}\ \gamma' \end{array} \right.$, *alors* $\mathcal{P}$ *est l'ensemble des points* M *qui peuvent s'écrire sous la forme* $M = A + s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$ *ce qui conduit à la représentation paramétrique :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(s,t) & = & a + \alpha s + \alpha' t \\ y(s,t) & = & b + \beta s + \beta' t \\ z(s,t) & = & c + \gamma s + \gamma' t \end{array} \right.$$

- *si ce plan est défini par trois points distincts* $A\left|\begin{array}{c} a\\ b\\ c\end{array}\right._{\mathcal{R}}$, $B\left|\begin{array}{c} a'\\ b'\\ c'\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ et $C\left|\begin{array}{c} a''\\ b''\\ c''\end{array}\right._{\mathcal{R}}$, *alors* $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{c} a'-a\\ b'-b\\ c'-c\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ et $\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{c} a''-a\\ b''-b\\ c''-c\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *est un vecteur directeur de* $\mathcal{D}$ *et appliquant ce qui précède, on obtient la représentation paramétrique :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(s,t) & = & a+(a'-a)s+(a''-a)t\\ y(s,t) & = & b+(b'-b)s+(b''-b)t\\ z(s,t) & = & c+(c'-c)s+(c''-c)t \end{array}\right.$$

- *finalement, si ce plan est défini par un point* $A\left|\begin{array}{c} a\\ b\\ c\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *et un vecteur normal* $\overrightarrow{n}\left|\begin{array}{c} \alpha''\\ \beta''\\ \gamma''\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *dans* $\mathcal{R}$*, il faut alors déterminer deux vecteurs* $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{c} \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *et* $\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{c} \alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *non colinéaires et orthogonaux à* $\overrightarrow{n}$ *afin de pouvoir obtenir une représentation paramétrique du plan. Un manière de procéder consiste à partir d'un vecteur* $\overrightarrow{w}$ *et à poser* $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{w}$ *et* $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{u}$*. La seule condition est de partir d'un vecteur* $\overrightarrow{w}$ *non colinéaire à* $\overrightarrow{n}$*.*

Pour obtenir une équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$ *:*

- *si ce plan est définie par un point* $A\left|\begin{array}{c} a\\ b\\ c\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *et deux vecteurs directeurs* $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{c} \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{array}\right._{\mathcal{B}}$ *et* $\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{c} \alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{array}\right._{\mathcal{B}}$ *dans* $\mathcal{R}$*, un point* $M\left|\begin{array}{c} x\\ y\\ z\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *dans* $\mathcal{R}$ *est situé dans ce plan si et seulement si* $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=0$ *et on développe ensuite ce déterminant pour obtenir une équation cartésienne :*

$$\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\begin{vmatrix} x-a & \alpha & \alpha'\\ y-b & \beta & \beta'\\ z-c & \gamma & \gamma'\end{vmatrix}=0$$

- *si le plan est défini par trois points distincts* $A\left|\begin{array}{c} a\\ b\\ c\end{array}\right._{\mathcal{R}}$, $B\left|\begin{array}{c} a'\\ b'\\ c'\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ et $C\left|\begin{array}{c} a''\\ b''\\ c''\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *dans* $\mathcal{R}$*, on raisonne de même en prenant les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *comme vecteurs directeurs :*

$$\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix} x-a & a'-a & a''-a\\ y-b & b'-b & b''-b\\ z-c & c'-c & c''-c\end{vmatrix}=0$$

- *si le plan est défini par un point* $A\left|\begin{array}{c} a\\ b\\ c\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *et un vecteur normal* $\overrightarrow{n}\left|\begin{array}{c} \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *dans* $\mathcal{R}$*, alors un point* $M\left|\begin{array}{c} x\\ y\\ z\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *dans* $\mathcal{R}$ *est situé dans ce plan si et seulement si* $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0$ *ce qui conduit à l'équation cartésienne :*

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=\alpha x+\beta y+\gamma z-(\alpha a+\beta b+\gamma c)=0$$

Méthode 3 (Éléments caractéristiques d'un plan)
Si on connait une représentation paramétrique d'un plan $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{R}$ *:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(s,t) & = & a+\alpha s+\alpha' t\\ y(s,t) & = & b+\beta s+\beta' t\\ z(s,t) & = & c+\gamma s+\gamma' t \end{array}\right.$$

alors on peut en déduire trois points distincts de cette droite en donnant trois valeurs distinctes au couple de paramètres (s,t) *(par exemple pour* $(s,t)=(0,0)$*,* $(s,t)=(1,0)$ *et* $(s,t)=(0,1)$ *on trouve les points* $A\left|\begin{array}{c} a\\ b\\ c\end{array}\right._{\mathcal{R}}$, $B\left|\begin{array}{c} a+\alpha\\ b+\beta\\ c+\gamma\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *et* $C\left|\begin{array}{c} a+\alpha'\\ b+\beta'\\ c+\gamma'\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *dans* $\mathcal{R}$*). Les vecteur* $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{c} \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{array}\right._{\mathcal{B}}$ *et* $\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{c} \alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *dans* $\mathcal{R}$ *sont des vecteurs directeurs de* $\mathcal{P}$ *et le vecteur* $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ *est un vecteur normal. De même, si le plan* $\mathcal{P}$ *admet pour équation cartésienne :*

$$ax+by+cz+d=0$$

alors le vecteur $\overrightarrow{n}\left|\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}\right._{\mathcal{B}}$ *dans* $\mathcal{R}$ *est un vecteur normal au plan. En effet, si* $M\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *et* $M'\left|\begin{array}{l} x' \\ y' \\ z' \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *dans* $\mathcal{R}$ *sont deux points du plan, on a :*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MM'} &= a(x'-x)+b(y'-y)+c(z'-z) = (ax'+by'+cz')-(ax+by+cz) \\ &= -d+d=0 \end{aligned}$$

Pour déterminer deux vecteurs directeurs du plan, on peut partir d'un vecteur $\overrightarrow{w}$ *non colinéaire à* $\overrightarrow{n}$ *et considérer* $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{w}$ *et* $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{u}$. *Finalement, pour obtenir des points de ce plan, il suffit de trouver des solutions à l'équation* $ax+by+cz+d=0$. *Lorsque* a *est non nul, on peut écrire* $x=\dfrac{-(by+cz+d)}{a}$ *et donner différentes valeurs à* y *et* z. *On procède de même lorsque* b *ou* c *est non nul, en écrivant la coordonnée* y *ou* z *en fonction des autres.*

Exercice 10
Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A\left|\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right.$ et dirigé par $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right.$ et $\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 1 \end{array}\right.$.

Solution 10

$$\mathcal{P}: 5x-3y+7z-8=0$$

Exercice 11
Donner une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $A\left|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right., B\left|\begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 0 \end{array}\right., C\left|\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 3 \end{array}\right.$.

Solution 11

$$\mathcal{P}: x-1=0$$

Remarque 4
Partant d'une équation de plan $ax+by+cz+d=0$, il est toujours possible de diviser par $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (qui est non nul) pour se ramener à une équation du même type mais vérifiant de plus $a^2+b^2+c^2=1$ (on parle alors d'équation normale du plan).

Méthode 4 (Distance d'un point à un plan)
Soient $\mathcal{P}$ *un plan et* M *un point. Pour déterminer la distance de* M *à* $\mathcal{P}$, *notée* $d(M,\mathcal{P})$ *:*

- *si* $\mathcal{P}$ *passe par* A *et a pour vecteur normal* $\overrightarrow{n}$, *alors :*

$$d(M,\mathcal{P})=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\|n\|}$$

- *si* $\mathcal{P}$ *passe par* A *et est dirigé par* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$, *alors :*

$$d(M,\mathcal{P})=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\right|}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|}=\frac{\left|\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\right|}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|}$$

- *si* $\mathcal{P}$ *a pour équation* $ax+by+cz+d=0$ *et* $M\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right._{\mathcal{R}}$, *alors :*

$$d(M,\mathcal{P})=\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Exercice 12
Déterminer la distance du point $A\left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right.$ au plan $\mathcal{P}$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t,u) &=& 2+t-u \\ y(t,u) &=& 3-t+2u \\ z(t,u) &=& 1+2t+u \end{array}\right.$$

Solution 12
$\frac{11}{\sqrt{35}}$.

Exercice 13
Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$:

$$\mathcal{P} : x - 2y + 2z = 1, \quad \mathcal{P}' : 2x - 4y + 4z = 3$$

sont parallèles. Déterminer un point de $\mathcal{P}$ puis la distance de $\mathcal{P}$ à $\mathcal{P}'$.

Solution 13
Les vecteurs normaux sont colinéaires. $A\left|\begin{array}{l}1\\0\\0\end{array}\right. \in \mathcal{P}$ et la distance est donc $\frac{1}{6}$.

3.2 Représentations d'une droite

Une représentation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$ est constituée de trois fonctions :

$$x : t \mapsto a + \alpha t, y : t \mapsto b + \beta t, z : t \mapsto c + \gamma t$$

que l'on notera plus simplement :

$$\begin{cases} x(t) &= a + \alpha t \\ y(t) &= b + \beta t \\ z(t) &= c + \gamma t \end{cases}$$

décrivant tous les points de $\mathcal{D}$ (autrement dit, tout point de $\mathcal{D}$ doit pouvoir s'écrire comme le point de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ pour une certaine valeur de t). Nécessairement, on a $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$. Notons que la représentation paramétrique d'une droite n'est pas unique : son écriture dépend du repère considéré mais, même dans un même repère, on peut obtenir des représentations paramétriques différentes. On appelle système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ tout système de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \end{cases}$$

où les équation $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ décrivent chacune un plan, les deux plans obtenus étant non parallèles et d'intersection $\mathcal{D}$. Ceci signifie que la droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y, z) vérifient chacune des deux équations. Là encore, une droite peut posséder plusieurs systèmes d'équations cartésiennes distincts. De plus, deux systèmes d'équations cartésiennes pour une droite de l'espace ne sont pas nécessairement proportionnels (car il y a plusieurs manières d'écrire une droite comme intersection de deux plans).

Méthode 5 (Représentations d'une droite)
Pour obtenir une représentation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$:

- *si cette droite est définie par un point $A\left|\begin{array}{l}a\\b\\c\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l}\alpha\\\beta\\\gamma\end{array}\right._{\mathcal{B}}$, alors $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M qui peuvent s'écrire sous la forme $M = A + t\overrightarrow{u}$ ce qui conduit à la représentation paramétrique :*

$$\begin{cases} x(t) &= a + \alpha t \\ y(t) &= b + \beta t \\ z(t) &= c + \gamma t \end{cases}$$

- *si cette droite est définie par deux points distincts $A\left|\begin{array}{l}a\\b\\c\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ et $B\left|\begin{array}{l}a'\\b'\\c'\end{array}\right._{\mathcal{R}}$, alors $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l}a'-a\\b'-b\\c'-c\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et appliquant ce qui précède, on obtient la représentation paramétrique :*

$$\begin{cases} x(t) &= a + (a' - a)t \\ y(t) &= b + (b' - b)t \\ z(t) &= c + (c' - c)t \end{cases}$$

- *finalement, si cette droite est définie par un point $A\left|\begin{array}{l}a\\b\\c\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ et deux vecteurs normaux non colinéaire $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l}\alpha\\\beta\\\gamma\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ et $\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{l}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{array}\right._{\mathcal{R}}$ dans $\mathcal{R}$ (autrement dit, $\mathcal{D}$ est la droite issue de A orthogonale au plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$), alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et permet d'obtenir une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.*

Pour obtenir un système d'équations cartésiennes pour une droite $\mathcal{D}$:

- *si cette droite est définie par un point* $A\left|\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *et un vecteur directeur* $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array}\right._{\mathcal{B}}$ *dans* $\mathcal{R}$*, un point* $M\left|\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *dans* $\mathcal{R}$ *est situé sur cette droite si et seulement si le vecteur* $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}$ *est nul, ce qui conduit au système d'équations :*

$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ si et seulement si } \left\{\begin{array}{l} \gamma(y-b)-\beta(z-c)=0 \\ \alpha(z-c)-\gamma(x-a)=0 \\ \beta(x-a)-\alpha(y-b)=0 \end{array}\right.$$

  Notons que, si on multiplie ces équations respectivement par α*,* β *et* γ *et si on ajoute les équations obtenues, on trouve l'équation triviale* $0=0$*. Comme* α*,* β *et* γ *ne sont pas tous nuls, il est donc possible d'exprimer l'une des équations comme une combinaison des autres. On peut ainsi éliminer l'une de ces équations et obtenir un sustème d'équations cartésiennes pour la droite* $\mathcal{D}$*;*

- *si la droite est définie par deux points distincts* $A\left|\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *et* $B\left|\begin{array}{c} a' \\ b' \\ c' \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *dans* $\mathcal{R}$*, on raisonne de même en prenant le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *comme vecteur directeur;*

- *si la droite est définie par un point* $A\left|\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *et deux vecteurs normaux* $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *et* $\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{c} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{array}\right._{\mathcal{R}}$*, alors elle est égale à l'intersection du plan passant par* A *et de vecteur normal* $\overrightarrow{u}$ *avec le plan passant par* A *et de vecteur normal* $\overrightarrow{v}$*, ce qui conduit au système d'équations :*

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha(x-a)+\beta(x-b)+\gamma(x-c)=0 \\ \alpha'(x-a)+\beta'(x-b)+\gamma'(x-c)=0 \end{array}\right.$$

Méthode 6 (Éléments caractéristiques d'une droite)
Si on connait une représentation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$ *dans* $\mathcal{R}$ *:*

$$\left\{\begin{array}{ccc} x(t) & = & a+\alpha t \\ y(t) & = & b+\beta t \\ z(t) & = & c+\gamma t \end{array}\right.$$

alors on peut en déduire deux point distincts de cette droite en donnant deux valeurs distinctes au paramètre t *(par exemple pour* $t=0$ *et* $t=1$ *on trouve les points* $A\left|\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *et* $B\left|\begin{array}{c} a+\alpha \\ b+\beta \\ c+\gamma \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *dans* $\mathcal{R}$*). Le vecteur* $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *dans* $\mathcal{R}$ *est un vecteur directeur de* $\mathcal{D}$*. Si on cherche des vecteurs orthogonaux à* $\mathcal{D}$*, on peut partir d'un vecteur* $\overrightarrow{w}$ *non colinéaire à* $\overrightarrow{u}$ *et considérer les vecteurs* $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}$ *et* $\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{n_1}$*. De même, si la droite* $\mathcal{D}$ *admet pour système d'équations cartésiennes :*

$$\left\{\begin{array}{c} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array}\right.$$

alors les vecteurs $\overrightarrow{n_1}\left|\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right._{\mathcal{B}}$ *et* $\overrightarrow{n_2}\left|\begin{array}{c} a' \\ b' \\ c' \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ *dans* $\mathcal{R}$ *sont des vecteurs normaux à la droite et le vecteur* $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}$ *est un vecteur directeur de* $\mathcal{D}$*. Finalement, pour obtenir des points de cette droite, il suffit de trouver des solutions au système d'équations.*

Exercice 14
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'équations :

$$\left\{\begin{array}{ccc} 5x-3y+7z-8 & = & 0 \\ x-1 & = & 0 \end{array}\right.$$

Solution 14

$$\left\{\begin{array}{ccc} x(t) & = & 1 \\ y(t) & = & -1+7t \\ z(t) & = & 3t \end{array}\right.$$

Exercice 15
Déterminer des équations cartésiennes pour la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 3+2t \\ y(t) & = & t \\ z(t) & = & 1+t \end{array}\right.$$

Solution 15

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y-3 & = & 0 \\ y-z+1 & = & 0 \end{array}\right.$$

Méthode 7 (Distance d'un point à une droite)
Soient $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et M un point. La distance de M à $\mathcal{D}$, notée $d(M,\mathcal{D})$, est donnée par :

$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\|u\|}$$

Exercice 16
Déterminer la distance de $A\left|\begin{array}{l} -1 \\ 1 \\ 3 \end{array}\right.$ à la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 1+2t \\ y(t) & = & 2-t \\ z(t) & = & 2+2t \end{array}\right.$$

Solution 16
$\dfrac{\sqrt{53}}{3}$.

Exercice 17
Déterminer la distance de $A\left|\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right.$ à la droite d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y-2z+3 & = & 0 \\ x+y-4z+3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Solution 17
$\sqrt{2}$.

Remarque 5
Si $\mathcal{D}$ est définie au moyen d'équations cartésiennes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+cz+d & = & 0 \\ a'x+b'y+c'z+d' & = & 0 \end{array}\right.$$

et si les plans $\mathcal{P}$ d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $\mathcal{P}'$ d'équation $a'x+b'y+c'z+d'=0$ sont perpendiculaires, alors on a :

$$d(M,\mathcal{D}) = \sqrt{d(M,\mathcal{P})^2 + d(M,\mathcal{P}')^2} = \sqrt{\frac{(ax+by+cz+d)^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{(a'x+b'y+c'z+d')^2}{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

3.3 Intersection de droites et de plans

3.4 Projection orthogonale sur un plan, sur une droite

Exercice 18
Déterminer le projeté orthonogal de $M\left|\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right.$ sur la droite $\mathcal{D}$ passant par $A\left|\begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right.$ et dirigée par $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -1 \end{array}\right.$. Indication : ce point H est un point de $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{MH}$.

Solution 18
On trouve $H = A$.

Exercice 19
Déterminer le projeté orthogonal de $M \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$ sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y - z = 1$. Indication : ce point H est un point de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{MH}$ soit colinéaire à un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à $\mathcal{P}$.

Solution 19
On trouve $H \left| \begin{array}{c} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{19}{6} \end{array} \right.$.

3.5 Perpendiculaire commune

Proposition 5 (Perpendiculaire commune)
Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non parallèles. Il existe alors une unique droite Δ perpendiculaire à la fois à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Preuve :
Soient A et $\overrightarrow{u}$ un point et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et B et $\overrightarrow{v}$ un point et un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$. On pose $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Comme les droite $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et on a donc $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$. On note alors $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ et $\mathcal{P}'$ le plan passant par B et dirigé par $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Les plan $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas parallèles, sinon les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ seraient coplanaires. On pose $\Delta = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$. Par construction Δ est une droite dirigée par $\overrightarrow{w}$. Elle est contenue dans $\mathcal{P}$ et coupe donc $\mathcal{D}$. De même, elle est contenue dans $\mathcal{P}'$ et coupe $\mathcal{D}'$. On en déduit que Δ est perpendiculaire à la fois à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Réciproquement, supposons qu'il existe une droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Alors Δ est contenue dans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, donc $\Delta = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ ce qui assure l'unicité d'une telle droite. ■

Méthode 8 (Perpendiculaire commune)
Considérons deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ définies par des points A et B et des vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On calcule $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Si $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles et on cherche alors une équation $ax + by + cz + d = 0$ du plan $\mathcal{P}$ passant par A et dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ puis une équation $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ du plan $\mathcal{P}'$ passant par B et dirigé par $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. La perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est la droite intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ et admet pour équations cartésiennes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by + cz + d & = & 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' & = & 0 \end{array} \right.$$

Exemple 1
On considère les droites $\mathcal{D}$ passant par $A \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$ dirigée par $\overrightarrow{u} \left| \begin{array}{c} -2 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right.$ et $\mathcal{D}'$ passant par $B \left| \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right.$ et dirigée par $\overrightarrow{v} \left| \begin{array}{c} -3 \\ 2 \\ -1 \end{array} \right.$. On pose alors :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} \left| \begin{array}{c} -1 \\ -5 \\ -7 \end{array} \right. , \quad \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} \left| \begin{array}{c} 12 \\ -15 \\ 9 \end{array} \right. , \quad \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \left| \begin{array}{c} -19 \\ -20 \\ 17 \end{array} \right.$$

Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ a donc pour équation :

$$12(x-1) - 15(y-2) + 9(z-3) = 0$$

et le plan passant par B et dirigé par $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ a pour équation :

$$-19(x+1) - 20y + 17(z-1) = 0$$

Ce qui donne pour la perpendiculaire commune Δ à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les équations cartésiennes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 12(x-1) - 15(y-2) + 9(z-3) & = & 0 \\ -19(x+1) - 20y + 17(z-1) & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 20
Déterminer la perpendiculaire commune aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$:

$$\mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z & = & 2 \\ x - 2y - 3z & = & -1 \end{array} \right. \qquad \mathcal{D}' : \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 2z & = & 1 \\ 2x + y + z & = & -2 \end{array} \right.$$

Solution 20
La droite $\mathcal{D}$ est dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix}$ et passe par $A\begin{vmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix}$ et $\mathcal{D}'$ est dirigée par $\overrightarrow{v}\begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix}$ et passe par $B\begin{vmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix}$. On pose $\overrightarrow{w}\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{vmatrix} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Comme $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles et admettent donc une unique perpendiculaire commune Δ. La plan $\mathcal{P}$ passant par A et dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ admet pour équation $2x - y = 7$ et le plan $\mathcal{P}'$ passant par B et dirigé par $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ admet pour équation $17x + 4y - 5z = -35$. Par conséquent, Δ admet pour équations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y & = & 7 \\ 17x + 4y - 5z & = & -35 \end{array} \right.$$

3.6 Représentations d'une sphère

Commentaire 2
On considère un repère orthonormé direct fixé $\mathcal{R}$.

Méthode 9 (Représentation d'une sphère)
La sphère de centre $\Omega\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}_{\mathcal{R}}$ et de rayon R admet pour équation cartésienne dans $\mathcal{R}$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

que l'on peut également écrire :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = R^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

La sphère de diamètre $[AB]$ avec $A\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}_{\mathcal{R}}$ et $B\begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{vmatrix}_{\mathcal{R}}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ et admet donc pour équation dans $\mathcal{R}$:

$$(x - a)(x - a') + (y - b)(y - b') + (z - c)(z - c') = 0$$

Exercice 21
Donner une condition sur a pour que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - y - az = 0$$

soit l'équation d'une sphère. En donner alors le centre et le rayon.

Solution 21
On écrit :

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - y + az = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

L'équation représente la sphère de centre $\Omega\begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} \end{vmatrix}$ et de rayon $R = \dfrac{\sqrt{a^2 + 2}}{2}$.

Proposition 6 (Plan tangent, principe de dédoublement)
Si $\mathcal{S}$ est la sphère d'équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, qui peut également s'écrire :

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by + z^2 - 2cz = R^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

et si $A\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}_{\mathcal{R}}$ est un point de $\mathcal{S}$, alors le plan tangent à $\mathcal{S}$ en A est le plan d'équation :

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) - c(z + z_0) = R^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

Preuve :
On note $\Omega \left|_{\mathcal{R}} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right.$ le centre de la sphère $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation :

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) - c(z + z_0) = R^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

Alors $A \in \mathcal{P}$ puisque :

$$x_0x_0 + y_0y_0 + z_0z_0 - a(x_0 + x_0) - b(y_0 + y_0) - c(z_0 + z_0) = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 - 2cz_0 = R^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

De plus, $\mathcal{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n} \left|_{\mathcal{R}} \begin{array}{c} x_0 - a \\ y_0 - b \\ z_0 - c \end{array}\right.$. Alors $\mathcal{P}$ est le plan passant par A et orthogonal à $\overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{n}$, c'est le plan tangent à $\mathcal{S}$ au point A. ■

Exercice 22
Déterminer les point d'intersection de la sphère d'équation :

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$$

avec la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{1}{2} \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= t \end{cases}$$

Donner le plan tangent en chacun de ces points.

3.7 Intersection d'une sphère et d'un plan, d'une sphère et d'une droite

Proposition 7 (Intersection d'une sphère et d'un plan)
Soient $\mathcal{S}$ la sphère de centre Ω et de rayon R et $\mathcal{P}$ un plan. On note H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$. On est dans un et un seul des cas suivants :

- *$\Omega H > R$ et l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est vide;*
- *$\Omega H = R$ et l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est réduite au point H, $\mathcal{P}$ est alors le plan tangent à $\mathcal{S}$ en H;*
- *$\Omega H < R$ et l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est le de $\mathcal{P}$ de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - \Omega H^2}$.*

Preuve :
Posons $d = \Omega H$. Notons M un point du plan $\mathcal{P}$. Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega H}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont orthogonaux et d'après le théorème de Pythagore, on a $\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2$. Par conséquent :

$$M \in \mathcal{S} \text{si et seulement si } \Omega M^2 = R^2 \text{si et seulement si } HM^2 = R^2 - d^2$$

On distingue donc trois cas :

- si $d > R$, alors $R^2 - d^2 < 0$ et on ne peut pas avoir $HM^2 = R^2 - d^2$ et l'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est vide;
- si $d = R$, alors $R^2 - d^2 = 0$ et $HM^2 = R^2 - d^2$ si et seulement si $M = H$ et l'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est réduite au point H;
- si $d < R$, alors $HM^2 = R^2 - d^2$ si et seulement si $HM = \sqrt{R^2 - d^2}$ et l'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est le cercle de $\mathcal{P}$ de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$.

■

Exercice 23
Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 5 = 0$ est l'équation d'une sphère $\mathcal{S}$ dont on déterminera le centre Ω et le rayon R. Déterminer la distance de Ω au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + 3z - 2 = 0$ et préciser l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$.

Solution 22
La sphère $\mathcal{S}$ a pour rayon $R = 3$ et pour centre $\Omega \left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -3 \end{array} \right.$. On a $d(\Omega, \mathcal{P}) = \dfrac{8}{\sqrt{14}}$, or $3 < \sqrt{14} < 4$, donc $2 < \dfrac{8}{\sqrt{14}} < \dfrac{8}{3} < 3$.

Par conséquent, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est le cercle de $\mathcal{P}$ de centre H (projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$) et de rayon $\sqrt{\dfrac{31}{7}}$. On trouve $H \left| \begin{array}{c} \frac{22}{7} \\ \frac{3}{7} \\ -\frac{9}{7} \end{array} \right.$.

Proposition 8 (Intersection d'une sphère et d'une droite)
Soient $\mathcal{S}$ la sphère de centre Ω et de rayon R et $\mathcal{D}$ une droite. On note H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$. On est dans un et un seul des cas suivants :

- *$\Omega H > R$ et l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{D}$ est vide;*
- *$\Omega H = R$ et l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est réduit au points H;*
- *$\Omega H < R$ et l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est constituée de deux points qui sont les points de $\mathcal{D}$ situés à la distance $\sqrt{R^2 - \Omega H^2}$ de H.*

Exercice 24
Rédiger la démonstration (on s'inspirera de la démonstration de la proposition précédente).

Solution 23
Posons $d = \Omega H$. Notons M un point de la droite $\mathcal{D}$. Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega H}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont orthogonaux et d'après le théorème de Pythagore, on a $\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2$. Par conséquent :

$$M \in \mathcal{S} \text{si et seulement si } \Omega M^2 = R^2 \text{si et seulement si } HM^2 = R^2 - d^2$$

On distingue donc trois cas :

Exercice 25

- si $d > R$, alors $R^2 - d^2 < 0$ et on ne peut pas avoir $HM^2 = R^2 - d^2$ et l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ est vide;
- si $d = R$, alors $R^2 - d^2 = 0$ et $HM^2 = R^2 - d^2$ si et seulement si $M = H$ et l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ est réduite au point H;
- si $d < R$, alors $HM^2 = R^2 - d^2$ si et seulement si $HM = \sqrt{R^2 - d^2}$ et l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ est constituée des points $M_1, M_2 \in \mathcal{D}$ tels que $HM_1 = HM_2 = \sqrt{R^2 - d^2}$.

3.8 Intersection de deux sphères

Remarque 6
Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega \left| \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right._{\mathcal{R}}$ et de rayon R. Cett sphère admet pour équation cartésienne $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0$. Pour un point $M \left| \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right._{\mathcal{R}}$ quelconque, la quantité $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (y-c)^2 - R^2$ est égale à $\Omega M^2 - R^2$.

Proposition 9 (Plan radical de deux sphères non concentriques)
Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux sphères, $\mathcal{S}$ de centre $\Omega \left| \begin{array}{c} \\ b \\ c \end{array} \right._{\mathcal{R}}$ et de rayon R et $\mathcal{S}'$ de centre $\Omega' \left| \begin{array}{c} a' \\ b' \\ c' \end{array} \right._{\mathcal{R}}$ et de rayon R'. On suppose $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ non concentriques, autrement dit $\Omega \neq \Omega'$. L'ensemble des points M tels que :

$$\Omega M^2 - R^2 = \Omega' M^2 - {R'}^2$$

est un plan admettant pour équation dans $\mathcal{R}$:

$$2(a'-a)x + 2(b'-b)y + 2(c'-c)z = R^2 - {R'}^2 + {a'}^2 + {b'}^2 + {c'}^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

On l'appelle plan radical des sphères $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.

Preuve :

On note $M \left| \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right._{\mathcal{R}}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
&\Omega M^2 - R^2 = \Omega' M^2 - {R'}^2 \\
&\text{si et seulement si } (x-a)^2 + (y-b)^2 + (c-z)^2 - R^2 = (x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2 - {R'}^2 \\
&\text{si et seulement si } 2(a'-a)x + 2(b'-b)y + 2(c'-c)z = R^2 - {R'}^2 + {a'}^2 + {b'}^2 + {c'}^2 - a^2 - b^2 - c^2 \\
&\text{si et seulement si } M \in \mathcal{P}
\end{aligned}$$

■

Remarque 7
Le plan radical des sphères $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ admet le vecteur $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ pour vecteur normal. Il est donc perpendiculaire à la droite joignant les deux centres.

Proposition 10 (Intersection de deux sphères non concentriques)
Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux sphères non concentriques. Si on note $\mathcal{P}$ le plan radical de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, alors :

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{S}' = \mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \mathcal{S}' \cap \mathcal{P}$$

Par conséquent, le calcul de l'intersection de deux sphères non concentriques se ramène à un calcul d'intersection entre une sphère et un plan et on est donc dans un et un seul des cas suivants :

- *$\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est vide et les deux sphères ne se coupent pas;*
- *$\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est réduit à un point, en ce point chacune des sphère est tangente à $\mathcal{P}$ et on dit que les deux sphères sont tangentes;*
- *$\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est un cercle et $\mathcal{P}$ est le plan contenant ce cercle.*

Preuve :
On a :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{S}' &\text{si et seulement si } \Omega M = R \text{ et } \Omega' M = R' \text{si et seulement si } \Omega M^2 - R^2 = \Omega' M^2 - {R'}^2 = 0 \\
&\text{si et seulement si } \Omega M^2 - R^2 = \Omega' M^2 - {R'}^2 \text{ et } \Omega M^2 - R^2 = 0 \\
&\text{si et seulement si } M \in \mathcal{P} \cap \mathcal{S}
\end{aligned}$$

et on procède de même pour montrer que $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}' = \mathcal{P} \cap \mathcal{S}'$. On applique ensuite les résultats sur les intersections de sphères et de plans. ■

3.9 Cercles de l'espace

Remarque 8
Un cercle $\mathcal{C}$ dans l'espace est défini par son centre Ω, son rayon R mais également le plan $\mathcal{P}$ dans lequel il est contenu, avec en général $\Omega \in \mathcal{P}$. On peut alors écrire $M \in \mathcal{C}$si et seulement si $\Omega M = R$ et $M \in \mathcal{P}$. Par conséquent, $\mathcal{C}$ est l'intersection de la sphère de centre Ω et de rayon R avec le plan $\mathcal{P}$. Si $\Omega \left| \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} \right._{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{P}$ a pour équation, dans $\mathcal{R}$, $ax + by + cz + d = 0$, alors on a :

$$M \left| \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right._{\mathcal{R}} \in \mathcal{C} \text{si et seulement si } \left\{ \begin{array}{rcl} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 &=& R^2 \\ ax + by + cz + d &=& 0 \end{array} \right.$$

On peut également définir ce cercle en donnant simplement un vecteur $\overrightarrow{n} \left| \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right._{\mathcal{R}}$ normal au plan $\mathcal{P}$. Alors :

$$\begin{aligned}
M \left| \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right._{\mathcal{R}} \in \mathcal{C} &\text{si et seulement si } \Omega M = R \text{ et } \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \\
&\text{si et seulement si } \left\{ \begin{array}{rcl} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 &=& R^2 \\ a(x-\alpha) + b(y-\beta) + c(z-\gamma) &=& 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$