Equations différentielles

Abdellah Bechata

www.mathematiques.fr.st

La notation $\mathbb{K}$ désignera, dans cette leçon, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points (*i.e.* non vide et non réduit à un point).

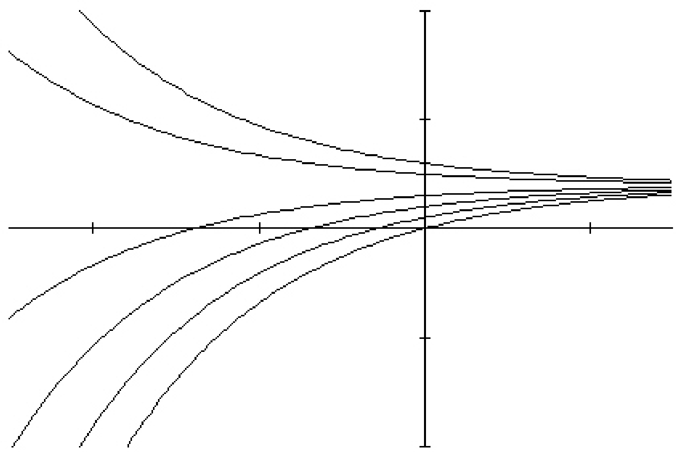
1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 Un exemple simple

Exemple 1
Nous considérons ici l'équation différentielle $y' + ay = b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Dans le cas où $b = 0$, les solutions de cette équation sont les fonctions $y : t \mapsto e^{-at}$. Dans le cas général, cherchons les solutions sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{-at}$ avec λ dérivable. On doit avoir :

$$y'(t) + ay(t) = \lambda'(t)e^{-at} - a\lambda(t)e^{-at} + a\lambda(t)e^{-at} = \lambda'(t)e^{-at} = b$$

On en déduit $\lambda'(t) = be^{at}$ et $\lambda(t) = \dfrac{be^{at}}{a} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$. La solution générale de l'équation de départ s'écrit alors $y : t \mapsto ke^{-at} + \dfrac{b}{a}$ (notons que cette solution ne convient pas dans le cas où $a = 0$). Nous allons reprendre ce qui a été fait ici mais dans un cadre un peu plus général.



Solutions de $\left\{ \begin{array}{c} y' = -\dfrac{y}{2} + 1 \\ y(0) = a \end{array} \right.$ avec $a = 0; 0.5; 1; 1.5; 2; 2.5; 3$

1.2 Cas général

Définition 1
On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ toute équation de la forme (E_1), où a et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. L'équation (H_1) est appelée équation différentielle homogène associée à (E_1).

$$(E_1) : y' + a(t)y = b(t)$$
$$(E_2) : y' + a(t)y = 0$$

On appelle solution de l'équation différentielle (E_1) toute fonction dérivable $y : I \to \mathbb{K}$ telle que, quel que soit $t \in I$, on ait $y'(t) + a(t)x(t) = b(t)$. Les courbes intégrales de l'équation sont les courbes représentatives des solutions. Le problème consistant à trouver une solution y de l'équation différentielle (E_1) vérifiant une condition supplémentaire du type $y(t_0) = y_0$ (avec $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ fixés) est appelé un problème de Cauchy.

Noter ici que a et b sont des fonctions (et non plus des constantes). On utilise d'ailleurs la notation $a(t)$ et $b(t)$, incorrecte mais qui permet de faire la distinction.

1.3 Résolution de l'équation homogène

Remarque 1
Si a est une constante, on sait que les solutions de $y' + ay = 0$ sont les fonctions $f : t \mapsto e^{-at}$. Si a est continue sur I, cherchons une solution de $y' + a(t)y = 0$ sous la forme $f : t \mapsto e^{A(t)}$ avec A dérivable. On trouve :

$$f'(t) + a(t)f(t) = A'(t)e^{A(t)} + a(t)e^{A(t)} = (A'(t) + a(t))e^{A(t)}$$

Par conséquent, f est solution de $y' + a(t)y = 0$ si et seulement si A est une primitive de $-a$.

Remarque 2 (Z)
Rien ne nous assure que l'on connait ainsi toutes les solutions de $y' + a(t)y = 0$.

Théorème 1 (Résolution de l'équation homogène)
Soit A une primitive sur I de la fonction continue a. Les solutions de l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$ sont les fonctions :

$$y : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-A(t)} \end{array}$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Preuve :
Montrons tout d'abord qu'une telle fonction est solution. En effet, pour $t \in I$, on a :

$$y'(t) + a(t)y(t) = -\lambda A'(t)e^{-A(t)} + \lambda a(t)e^{-A(t)} = \lambda e^{-A(t)}(a(t) - A'(t)) = 0$$

Considérons maintenant une solution quelconque y de $y' + a(t)y = 0$. On pose :

$$f : \begin{array}{rcl} I & \mapsto & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & e^{A(t)}y(t) \end{array}$$

f est alors dérivable sur I et on a, pour $t \in I$:

$$f'(t) = e^{A(t)}y'(t) + A'(t)e^{A(t)}y(t) = e^{A(t)}(y'(t) + a(t)y(t)) = 0$$

Par conéquent, f est constante sur I, égale à $\lambda \in \mathbb{K}$ et $y(t) = \lambda e^{-A(t)}$. ■

Remarque 3
Résoudre l'équation homogène se résume donc à trouver une primitive de la fonction a (qui existe nécessairement, puisque cette fonction est continue, mais il peut être beaucoup plus difficile de l'exhiber). Notons que, pour $t \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution y de $y' + a(t)y = 0$ telle que $y(t_0) = y_0$. Cette solution est obtenue pour $\lambda = y_0 e^{A(t_0)}$. En particulier, la seule solution qui peut s'annuler en un point de I est la fonction nulle.

Exemple 2
Cherchons la solution générale de $y' - \dfrac{(t^2-1)}{(t^2+1)}y = 0$ puis déterminer celle qui vérifie $y(1) = 2$.
Cette solution s'écrit $y(t) = \lambda e^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est fixé et $A(t)$ est une primitive de $\dfrac{(t^2-1)}{(t^2+1)}$. Or :

$$\frac{t^2-1}{t^2+1} = \frac{t^2+1-2}{t^2+1} = 1 - 2\frac{1}{t^2+1}$$

On peut donc prendre $A(t) = t - 2\arctan t$ donc la solution générale s'écrit $y : t \mapsto \lambda \exp\left(-(t - 2\arctan(t)\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Déterminons la solution vérifiant $y(1) = 2$

$$y(1) = 2 \Leftrightarrow \lambda \exp\left(-(1 - 2\arctan(1)\right) = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2\exp\left(-1+\pi\right)$$

donc la solution cherchée est $y : t \mapsto 2\exp\left(-1+\pi\right)\exp\left(-(t - 2\arctan(t)\right)$

Exercice 1
Déterminer la solution générale des équation différentielles homogènes suivantes :

$$y' - (\sin t)y = 0 \quad y' - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}y = 0$$

Exercice 2
Soit y une solution de $y' + a(t)y = 0$ pour laquelle il existe $t_0 \in I$ tel que $y(t_0) = 0$. Montrer que y est identiquement nulle sur I.

Solution 1
Comme y est solution de $y' + a(t)y = 0$, on peut écrire $y(t) = \lambda e^{-A(t)}$ où A désigne une primitive de a sur I. Comme $y(t_0) = 0$ on a $\lambda = 0$ ou $e^{-A(t_0)} = 0$. Ce dernier cas est impossible puisque la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives. Donc $\lambda = 0$ et y est identiquement nulle.

1.4 Équation avec second membre

Théorème 2 (Principe de superposition)
Soient b_1 et b_2 deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ et soit $b = b_1 + b_2$. Si y_1 une solution particulière de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b_1(t)$, alors toute solution de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ peut s'écrire sous la forme $y_1 + y_2$ où y_2 est une solution de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b_2(t)$.

Preuve :
Considérons y_1 solution de $y' + a(t)y = b_1(t)$ et y_2 solution de $y' + a(t)y = b_2(t)$. On a alors pour tout $t \in I$:

$$(y_1 + y_2)'(t) + a(t)(y_1 + y_2)(t) = y_1'(t) + a(t)y_1(t) + y_2'(t) + a(t)y_2(t) = b_1(t) + b_2(t) = b(t)$$

et ceci montre que $y_1 + y_2$ est solution de $y' + a(t)y = b(t)$. Il faut encore montrer que tout solution de $y' + a(t)y = b(t)$ peut s'écrire sous la forme $y_1 + y_2$ où y_1 est une solution particulière de $y' + a(t)y = b_1(t)$ et y_2 est une solution de $y' + a(t)y = b_2(t)$. Posons pour cela $y_2 = y - y_1$ et montrons que y_2 est solution de $y' + a(t)y = b_2(t)$:

$$y_2'(t) + a(t)y_2(t) = y'(t) - y_1'(t) + a(t)y(t) - a(t)y_1(t) = b(t) - b_1(t) = b_2(t)$$

d'où le résultat. ■

Remarque 4
On utilise le plus souvent ce résultat dans l'un des cas particuliers suivants :

- si y_0 est une solution particulière de $y' + a(t)y = b(t)$, alors les solutions de cette équation sont les fonctions qui s'écrivent $y_0 + y$ où y est une solution quelconque de l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$. Ainsi, pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre quelconque, il suffit de trouver toutes les solutions de l'équation homogène associée puis de déterminer une solution particulière de l'équation complète;
- si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$, alors il en est de même de $y_1 + y_2$ (on peut également vérifier facilement que pour une constante λ, λy_1 est également solution de l'équation différentielle homogène);

Bien sur, le principe de superposition est souvent utilisé en tant que tel, pour déterminer les solutions d'une équation dont le second membre est la somme de deux fonctions, correspondant à des équations plus simples.

Exercice 3
Montrer que $y(t) = \dfrac{e^t}{2}$ et $y(t) = te^t$ sont solutions particulières de $y' + y = e^t$ et $y' + y = e^{-t}$. En déduire une solution particulière de $y' + y = \operatorname{sh} t$.

Solution 2
Appliquer le principe de superposition.

Connaissant, d'après ce qui précède, la solution générale de l'équation homogène, il suffit d'une solution particulière pour obtenir la solution générale de l'équation différentielle de départ. Lorsqu'une telle solution n'apparait pas de manière évidente, on peut utiliser le résultat suivant (dit de variation de la constante).

Proposition 1 (Variation de la constante)
Notons A une primitive de a et λ une fonction de I dans $\mathbb{R}$ dérivable. La fonction :

$$y : \begin{array}{rcl} I & \mapsto & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda(t)e^{-A(t)} \end{array}$$

est solution de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ si et seulement si pour tout $t \in I$ on a :

$$\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$$

Preuve :
La fonction y ainsi définie est dérivable et on a :

$$y'(t) + a(t)y(t) = \lambda'(t)e^{-A(t)} - \lambda(t)a(t)e^{-A(t)} + a(t)\lambda(t)e^{-A(t)} = \lambda'(t)e^{-A(t)}$$

Par conséquent, $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ si et seulement si $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$. ■

Exemple 3
Déterminer une solution de chacune des équations suivantes $(E) : y' + 2y = t$, $\quad (F) : y' + \dfrac{y}{t} = \dfrac{1}{t^3}$ (sur $\mathbb{R}_+^\times$) :

Remarque 5
Notons que comme la fonction $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ est continue, elle possède des primitives et la condition $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$ pour tout $t \in I$ peut donc toujours être satisfaite. Ainsi, toute équation différentielle de la forme $y' + a(t)y = b(t)$ possède des solutions (la continuité des applications a et b est essentielle). Le nom de cette méthode (variation de la constante) provient du fait que l'on cherche une solution particlière de l'équation complète sous la même forme que la solution générale de l'équation homogène, en remplaçant la constante λ par une fonction. On voit ainsi que léquation $y' + a(t)y = b(t)$ peut être résolue au moyen de deux calculs de primitives. Néanmoins, on peut dans la plupart des cas se dispenser d'effectuer explicitement ces deux calculs.

Exercice 4
Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 2 + 2t$ ($te^t - e^t$ est une primitive de te^t).

1.5 Condition initiale

Proposition 2 (Unicité de la solution à un problème de Cauchy)
Quels que soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution y de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ telle que $y(t_0) = y_0$.

Preuve :
Soient y_1 une solution particulière de léquation $y' + a(t)y = b(t)$ et A une primitive de a. Les solutions de $y' + a(t)y = b(t)$ sont donc les fonctions :

$$y : \begin{array}{rcl} I & \mapsto & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & y_1(t) + \lambda e^{-A(t)} \end{array}$$

On a alors :

$$y(t_0) = y_0 \text{ si et seulement si } y_1(t_0) + \lambda e^{-A(t_0)} = y_0 \text{ si et seulement si } \lambda = e^{A(t)}(y_0 - y_1(t_0))$$

On en déduit l'existence et l'unicité de la solution au problème de Cauchy. ■

Exercice 5
Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{t} = 2 \\ y(1) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' + y = 2 + 2t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Le premier étant à résoudre sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^\times$ et le second sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 6
Soient y_1 et y_2 deux solutions de $y' + a(t)y = b(t)$. On suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$.
Montrer que les fonctions y_1 et y_2 coïncident.

Solution 3
Posons $y_0 = y_1(t_0) = y_2(t_0)$. Les fonctions y_1 et y_2 sont solution du problème de Cauchy associé à t_0 et y_0. Par unicité des solutions d'un tel problème, on a $y_1 = y_2$.

Remarque 6
Ce résultat peut s'énoncer sous un certain nombre de formes équivalentes :

- par tout point de $I \times \mathbb{K}$ passe une courbe intégrale de l'équation différentielle et une seule;
- notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle. Quel que soit $t_0 \in I$, l'application :

  $$\begin{array}{rcl} \mathcal{S} & \mapsto & \mathbb{K} \\ y & \mapsto & y(t_0) \end{array}$$

  est une bijection.

2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

2.1 Un exemple simple

Exemple 4
Considérons l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$. Les solutions de cette équation sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$. Si maintenant on s'intéresse à l'équation $y'' - \omega^2 y = 0$, les solutions sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{\omega t} + \mu e^{-\omega t}$.

2.2 Cas général

Définition 2
On appelle équation différentielle du second ordre à coefficients constants sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ toute équation de la forme (E_2) où les coefficicients a, b et c sont des élements de $\mathbb{K}$, avec $a \neq 0$, et d est une fonction de I dans $\mathbb{R}$, continue. L'équation (H_2) est appelée équation différentielle homogène associée à (E_2).

$$(E_2) : ay'' + by' + cy = d(t)$$
$$(H_2) : ay'' + by' + cy = 0$$

On appelle solution de l'équation (E_2) toute fonction $y : I \mapsto \mathbb{K}$ dérivable sur I telle que, quel que soit $t \in I$, on ait $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$.

2.3 Résolution de l'équation homogène

Afin de résoudre l'équation différentielle homogène $ay'' + by' + cy = 0$, nous lui associons l'équation du second degré suivante :

$$ax^2 + by + c = 0$$

(appelée équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$). L'intérêt de cette équation réside dans le résultat suivant.

Proposition 3 (Lien entre équation différentielle et équation caractéristique)
Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, la fonction :

$$y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & e^{\alpha t} \end{array}$$

est solution de $ay'' + by' + cy = 0$ si et seulement si α est solution de $ax^2 + bx + c = 0$.

Preuve :
On a, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = a\alpha^2 e^{\alpha t} + b\alpha e^{\alpha t} + ce^{\alpha t} = (a\alpha^2 + b\alpha + c)e^{\alpha t}$$

et, comme $e^{\alpha t} \neq 0$, on en déduit que y est solution de $ay'' + by' + c = 0$ si et seulement si $a\alpha^2 + b\alpha + c$. ■

Remarque 7
La proposition précédente établit un lien entre les solution d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constant et les racines d'une équation du second degré. On s'attend par conséquent à ce que le corps $\mathbb{K}$ joue un rôle particulier (puisque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ peut posséder ou pas des solutions suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Théorème 3 (L'équation caractéristique possède des racines)

1. *Si l'équation $ax^2+bx+c = 0$ possède des racines distinctes α_1 et α_2, les solutions de l'équation homogène $ay''+by'+c = 0$ sont les fonctions :*

$$y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 e^{\alpha_2 t} \end{array}$$

   avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$;

2. *Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède une racine double α_0, les solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + c = 0$ sont les fonctions :*

$$y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{\alpha_0 t} \end{array}$$

   avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

Preuve :
Il est clair que les fonctions proposées sont toujours solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$. Il suffit donc de montrer qu'il n'y en a pas d'autres. Soit y une solution de de cette équation et soient α_1 et α_2 les racines (éventuellement confondues) de $ax^2 + bx + c = 0$. On pose :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & e^{-\alpha_1 t} y(t) \end{array}$$

Nous allons montrer que f' est solution d'une certaine équation différentielle du premier ordre, que l'on sait résoudre, et on pourra en déduire l'expression de f puis celle de y. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{\alpha_1 t} f(t) \\
y'(t) &= \alpha_1 e^{\alpha_1 t} f(t) + e^{\alpha_1 t} f'(t) = e^{\alpha_1 t}(\alpha_1 f(t) + f'(t)) \\
y''(t) &= \alpha_1^2 e^{\alpha_1 t} f(t) + \alpha_1 e^{\alpha_1 t} f'(t) + \alpha_1 e^{\alpha_1 t} f'(t) + e^{\alpha_1 t} f''(t) \\
&= e^{\alpha_1 t}(\alpha_1^2 f(t) + 2\alpha_1 f'(t) + f''(t)) \\
ay''(t) + by'(t) + cy(t) &= e^{\alpha_1 t}(a\alpha_1^2 f(t) + 2a\alpha_1 f'(t) + af''(t) + b\alpha_1 f(t) + bf'(t) + cf(t)) \\
&= e^{\alpha_1 t}(af''(t) + (2a\alpha_1 + b)f'(t) + (a\alpha_1^2 + b\alpha_1 + c)f(t)) \\
&= e^{\alpha_1 t}(af''(t) + (2a\alpha_1 + b)f'(t))
\end{aligned}$$

La somme des racines étant $\alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{b}{a}$, on a alors :

$$2a\alpha_1 + b = a\alpha_1 + a\alpha_1 + b = a\alpha_1 - a\alpha_2 = a(\alpha_1 - \alpha_2)$$

On en déduit que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $\quad az''(t) + a(\alpha_1 - \alpha_2)z'(t) = 0$ et, par conséquent, que f' est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre et à coefficients constants :

$$z' + (\alpha_1 - \alpha_2)z = 0$$

On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \lambda e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t}$. Pour en déduire l'expression de f, il faut distinguer suivant que α_1 et α_2 sont distinctes ou non :

- si $\alpha_1 \neq \alpha_2$, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \frac{\lambda}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} + \mu, \quad y(t) = \frac{\lambda}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t} + \mu e^{\alpha_1 t}$$

- si $\alpha_1 = \alpha_2$, alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$ et il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \lambda t + \mu \quad y(t) = (\lambda t + \mu)e^{\alpha_0 t}$$

Dans chaque cas, la solution obtenue est donc bien de la forme voulue. ■

Remarque 8
Ce théorème nous permet de régler deux cas : celui où le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{C}$ (car une équation du second degré sur $\mathbb{C}$ possède toujours des racines, évantuellement distinctes) ainsi que le cas où le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ et où le discriminant de l'équation du second degré est positif (ou nul). Il ne reste donc plus qu'à déterminer les solutions d'une équation différentielle homogène lorsque le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ et où l'équation caractéristique $ax^2 + bx + c = 0$ possède un discriminant strictement négatif.

Théorème 4 (L'équation caractéristique ne possède pas de racines réelles)
On suppose maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on suppose que l'équation caractéristique $ax^2 + bx + c = 0$ ne possède pas de solutions réelles. Cette équation possède alors des solutions complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ (avec $\beta \neq 0$). Les solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors les fonctions :

$$\begin{array}{rccl} y: & \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & e^{\alpha t}(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) \end{array}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$;

Preuve :
D'après la proposition précédente, les solutions complexes de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$ s'écrivent :

$$\begin{array}{rccl} y: & \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \mu_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} + \mu_2 e^{\alpha t} e^{-i\beta t} \end{array}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Il suffit de déterminer, parmi ces fonctions, celles qui sont réelles. Supposons donc y à valeurs réelle, en appliquent et $t = 0$ et en $t = \dfrac{\pi}{(2\beta)}$, il vient :

$$y(0) = \mu_1 + \mu_2 \in \mathbb{R}, \quad y\left(\frac{\pi}{2\beta}\right) = \mu_1 e^{\dfrac{\pi\alpha}{2\beta}} e^{i\dfrac{\pi}{2}} + \mu_2 e^{\dfrac{\pi\alpha}{2\beta}} e^{-i\dfrac{\pi}{2}} = ie^{\dfrac{\pi\alpha}{2\beta}}(\mu_1 - \mu_2) \in \mathbb{R}$$

On en déduit que $\mu_1 + \mu_2 \in \mathbb{R}$ et $\mu_1 - \mu_2 \in i\mathbb{R}$. Par conséquent, μ_1 et μ_2 sont conjugués et on peut écrire $\mu_1 = \nu_1 + i\nu_2$ et $\mu_2 = \nu_1 - i\nu_2$., avec ν_1 et ν_2 réels. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\begin{aligned} y(t) &= (\nu_1 + i\nu_2)e^{\alpha t}e^{i\beta t} + (\nu_1 - i\nu_2)e^{-i\beta t} = e^{\alpha t}((\nu_1 + i\nu_2)e^{i\beta t} + \overline{(\nu_1 + i\nu_2)e^{i\beta t}}) \\ &= 2e^{\alpha_t}\,\mathrm{Re}((\nu_1 + i\nu_2)(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))) = e^{\alpha t}(2\nu_1\cos(\beta t) - 2\nu_2\sin(\beta t)) \end{aligned}$$

En posant $\alpha_1 = 2\nu_1$ et $\alpha_2 = -2\nu_2$, on obtient bien le résultat voulu. ■

Exercice 7
Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad y'' + y = 0 \quad y'' - 4y' + 4y = 0$$

Solution 4
On trouve comme solutions $\lambda e^{2t} + \mu e^{3t}$, $\lambda\cos t + \mu\sin t$ et $(\lambda t + \mu)e^{2t}$.

Exercice 8
Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad y'' + y = 0$$

Solution 5
On trouve comme solutions $(\lambda t + \mu)e^{2t}$ et $\lambda e^{it} + \mu e^{-it}$.

2.4 Équation avec second membre (cas particuliers)

Théorème 5 (Principe de superposition)
Soient d_1 et d_2 deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ et soit $d = d_1 + d_2$. Si y_1 une solution particulière de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d_1(t)$, alors toute solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(t)$ peut s'écrire sous la forme $y_1 + y_2$ où y_2 est une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d_2(t)$.

Preuve :
Considérons y_1 solution de $ay'' + by' + cy = d_1(t)$ et y_2 solution de $ay'' + by' + cy = d_2(t)$. On a alors pour tout $t \in I$:

$$a(y_1 + y_2)''(t) + b(y_1 + y_2)'(t) + c(y_1 + y_2)(t) = ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t) + ay'' - 2(t) + by_2'(t) + cy_2(t) = d_1(t) + d_2(t) = d(t)$$

et ceci montre que $y_1 + y_2$ est solution de $ay'' + by' + cy = d(t)$. Il faut encore montrer que tout solution de $ay'' + by' + cy = d(t)$ peut s'écrire sous la forme $y_1 + y_2$ où y_1 est une solution particulière de $ay'' + by' + cy = d_1(t)$ et y_2 est une solution de $ay'' + by' + cy = d_2(t)$. Posons pour cela $y_2 = y - y_1$ et montrons que y_2 est solution de $ay'' + by' + cy = d_2(t)$:

$$ay_2''(t) + by_2'(t) + cy_2(t) = ay''(t) - ay_1''(t) + by'(t) - by_1'(t) + cy(t) - cy_1(t) = d(t) - d_1(t) = d_2(t)$$

d'où le résultat. ■

Exemple 5
Considérons par exemple l'équation différentielle $y'' + y' + y = e^t + t$ et cherchons une solution particulière. La fonction $f(t) = \dfrac{e^t}{3}$ est solution de $y'' + y' + y = e^t$. Par eilleurs, la fonction $f(t) = t - 1$ est solution de $y'' + y' + y = t$. On en déduit que $f(t) = \dfrac{e^t}{3} + x - 1$ est solution de l'équation de départ.

Exercice 9
Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' + y = e^{-t} + t^2$ (on cherchera une solution particulière de $y'' + y' + y = e^{-t}$ sous la forme $f(t) = \lambda e^{-t}$ et une solution particulière de $y'' + y' + y = t^2$ sous la forme $\lambda t^2 + \mu t + \nu$ puis on appliquera le principe de superposition).

Solution 6
On trouve $f(t) = e^{-t} + t^2 - \dfrac{1}{2}$.

Remarque 9
On utilise le plus souvent ce résultat dans l'un des cas particuliers suivants :

- si y_0 est une solution particulière de $ay'' + by' + cy = d(t)$, alors les solutions de cette équation sont les fonctions qui s'écrivent $y_0 + y$ où y est une solution quelconque de l'équation homogène. Ainsi, pour résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, il suffit de trouver toutes les solutions de l'équation homogène associée puis de déterminer une solution particulière de l'équation complète;

- si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$, alors il en est de même de $y_1 + y_2$ (on peut également vérifier facilement que pour une constante λ, λy_1 est également solution de l'équation différentielle homogène);

Bien sur, le principe de superposition est souvent utilisé en tant que tel, pour déterminer les solutions d'une équation dont le second membre est la somme de deux fonctions, correspondant à des équations plus simples.

Contrairement au cas du premier ordre, nous ne donnerons pas de résultats généraux sur l'équation complète. Nous allons cependant indiquer, dans le cas de second membres particuliers, sous quelle former chercher une solution particulière.

Méthode 1 (Second membre polynomial)
Dans une équation différentielle du second ordre $ay'' + by' + cy = P(t)$ où $P(t)$ est un polynôme en t de degré n, il est toujours possible de trouver une solution particulière sous la forme d'un polynôme en t, $Q(t)$, de degré :

- *n si $c \neq 0$;*
- *$n+1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$;*
- *$n+2$ si $b = c = 0$ (et $a \neq 0$).*

Exemple 6
Cherchons une solution particulière de l'équation $y'' + y' - y = t^4 + 3t^2 + 1$. On cherche cette solution sous la forme $f(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$ et on trouve :

$$-a = 14a - b = 0, \quad 12a + 3b - c = 3, \quad 6b + 2c - d = 0, \quad 2c + d - e = 1$$

ce qui donne $a = -1$, $b = -4$, $c = -27$, $d = -78$ et $e = -133$.

Exercice 10
Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' = t^3 - 2t + 1$.

Méthode 2 (Second membre produit exponentielle polynôme)
Dans une équation différentielle du second ordre $ay'' + by' + cy = e^{ut}P(t)$ où $u \in \mathbb{C}$ et $P(t)$ est un polynôme en t de degré n, il est toujours possible de trouver une solution particulière sous la forme $e^{ut}Q(t)$, où $Q(t)$ est un polynôme en t de degré :

- *n si u n'est pas racine de $ax^2 + bx + c = 0$;*
- *$n+1$ si u est racine simple de $ax^2 + bx + c = 0$;*
- *$n+2$ si u est racine double de $ax^2 + bx + c = 0$.*

Remarque 10
1. Si on a un second membre de la forme $e^{ut}\cos(vt)P(t)$ ou $e^{ut}\sin(vt)P(t)$ avec $u, v \in \mathbb{R}$ et $P(t)$ polynôme en t, on peut se ramener au cas précédent en écrivant $\cos(vt)$ ou $\sin(vt)$ sous forme exponentielle (il faut appliquer le principe de superposition);
2. Dans le cas où aucune des méthodes précédentes ne s'applique il faut penser au principe de superposition et à chercher des solution particulières sous une forme qui « ressemble » au second membre.

Exercice 11
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes

$$: y'' - 4y' + 3y = (2t+1)e^{-t} \quad y'' - 4y' + 3y = (2t+1)e^{t} \quad y'' - 2y' + y = (t-1)e^{t}$$

En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' - 4y' + 3y = (2t+1)\operatorname{sh} t$.

Exercice 12
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 3y = te^{t}\cos t$$

(on écrira $\cos t$ sous forme exponentielle).

2.5 Condition initiale

Pour déterminer une solution, parmi l'ensemble des solutions de léquation différentielle, on utilise là encore des conditions initiales. Comme les solutions sont décrites au moyen de deux paramètres (et non plus un seul, comme dans le cas du premier ordre), il faut deux contraintes pour déterminer une solution. On cherche donc une solution en imposant, non seulement sa valeur en un point, mais aussi celle de sa dérivée.

Définition 3
On appelle problème de Cauchy le problème consistant à déterminer une solution de l'équation différentielle du second ordre $ay'' + by' + cy = d(t)$ satisfaisant de plus les conditions $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$ pour $t_0 \in I$ et $y_0, y'_0 \in \mathbb{K}$ fixés.

Proposition 4 (Unicité de la solution à un problème de Cauchy)
Soit $ay'' + by' + cy = d(t)$ une équation différentielle du second ordre possédant au moins une solution. Alors, quels que soient $t_0 \in I$ et $y_0, y'_0 \in \mathbb{K}$, cette équation différentielle possède une unique solution satisfaisant les conditions $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$.

Preuve :
Soit f_0 une solution particulière de l'équation complète. On sait que la solution générale de l'équation homogñe peut s'écrire sous la forme $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, de sorte que la solution générale de l'équation complète s'écrive $f = f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. Cette solution f est également solution du problème de Cauchy si et seulement si elle satisfait le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} f(t_0) = y_0 \\ f'(t_0) = y'_0 \end{array}\right. \quad \text{si et seulement si} \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 f_1(t_0) + \lambda_2 f_2(t_0) = y_0 - f_0(t_0) \\ \lambda_1 f'_1(t_0) + \lambda_2 f'_2(t_0) = y'_0 - f'_0(t_0) \end{array}\right. \quad \text{si et seulement si} \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 f_1(t_0) + \lambda_2 f_2(t_0) = u \\ \lambda_1 f'_1(t_0) + \lambda_2 f'_2(t_0) = v \end{array}\right.$$

où on a posé $u = y_0 - f(t_0)$ et $v = y'_0 - f'(t_0)$. Il ne reste plus qu'à montrer que ce dernier système possède une unique solution, on raisonne pour cela suivant la forme de la solution générale de l'équation homogène :

- si la solution générale de l'équation homogène est $t \mapsto \lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 e^{\alpha_2 t}$ avec $\alpha_1 \neq \alpha_2$, le système s'écrit alors :

  $$\left\{\begin{array}{r} \lambda_1 e^{\alpha_1 t_0} + \lambda_2 e^{\alpha_2 t_0} = u \\ \lambda_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 t_0} + \lambda_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 t_0} = v \end{array}\right.$$

  le déterminant de ce système vaut :

  $$e^{\alpha_1 t_0} e^{\alpha_2 t_0} \alpha_2 - \alpha_1 e^{\alpha_1 t_0} e^{\alpha_2 t_0} = e^{\alpha_1 t_0} e^{\alpha_2 t_0} (\alpha_2 - \alpha_1) \neq 0$$

  et le système possède une unique solution;

- si la solution générale de l'équation homogène est $t \mapsto \lambda_1 t e^{\alpha_0 t} + \lambda_2 e^{\alpha_0 t}$, le système s'écrit alors :

  $$\left\{\begin{array}{r} \lambda_1 t_0 e^{\alpha_0 t} + \lambda_2 e^{\alpha_0 t_0} = u \\ \lambda_1 (t_0 \alpha_0 + 1) e^{\alpha_0 t_0} + \lambda_2 \alpha_0 e^{\alpha_0 t_0} = v \end{array}\right.$$

  et son déterminant vaut :

  $$t_0 e^{\alpha_0 t_0} \alpha_0 e^{\alpha_0 t_0} - (t_0 \alpha_0 + 1) e^{\alpha_0 t_0} e^{\alpha_0 t_0} = e^{\alpha_0 t_0} e^{\alpha_0 t_0} (t_0 \alpha_0 - t_0 \alpha_0 - 1) \neq 0$$

  et le système possède une unique solution;

- si la solution générale de l'équation homogène est $t \mapsto \lambda_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \lambda_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ avec $\beta \neq 0$ (et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), le système s'écrit alors :

  $$\left\{\begin{array}{r} \lambda_1 e^{\alpha t_0} \cos(\beta t_0) + \lambda_2 e^{\alpha t_0} \sin(\beta t_0) = u \\ \lambda_1 (\alpha e^{\alpha t_0} \cos(\beta t_0) - e^{\alpha t_0} \beta \sin(\beta t_0)) + \lambda_2 (\alpha e^{\alpha t_0} \sin(\beta t_0) + e^{\alpha t_0} \beta \cos(\beta t_0)) = v \end{array}\right.$$

  Le déterminant de ce système est :

  $$e^{2\alpha t_0} (\cos(\beta t_0)(\alpha \sin(\beta t_0) + \beta \cos(\beta t_0)) - (\alpha \cos(\beta t_0) - \beta \sin(\beta t_0)) \sin(\beta t_0)) = e^{2\alpha t_0} \beta (\cos^2(\beta t_0) + \sin^2(\beta t_0)) = e^{2\alpha t_0} \neq 0$$

  et, là encore, le système possède une unique solution.

■

Méthode 3 (Résolution d'une équation différentielle linéaire)

1. *Résoudre (*i.e. *trouver toutes les solutions) l'équation homogène associée;*
2. *Trouver une solution particulière de l'équation complète :*
   - *pour une équation du premier ordre, utiliser la méthode de variation de la constante;*
   - *pour une équation du deuxième ordre d'un des types particuliers étudiés plus haut, chercher la solution sous la forme appropriée;*
   - *si ceci ne s'applique pas, chercher une solution qui « ressemble » aux fonctions qui interviennent dans l'équation.*

3 Compléments

3.1 Quelques exercices classiques

Exercice 13 (Équation d'Euler, changement de variable)
Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}_+^\times$ de l'équation différentielle :

$$t^2y'' + 3ty' + y = 0$$

On pourra poser $t = e^x$. Autrement dit, pour une solution y définie sur $\mathbb{R}_+^\times$, on considère la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x) = y(e^x)$ et on cherche une équation différentielle satisfaite par z.

Solution 7
On a :

$$z'(x) = e^x y'(e^x)$$
$$z''(x) = e^x y'(e^x) + e^{2x} y''(e^x)$$

On a alors :

$$z''(x) + 2z'(x) = (e^x)^2 y''(e^x) + 3e^x y'(x) = -y(e^x) = -z(x)$$

Par conséquent, z est solution de l'équation différentielle $z'' + 2z' + z = 0$, dont les solutions s'écrivent $z(x) = \lambda e^{-x} + \mu x e^{-x}$. On en déduit que les solutions de l'équation de départ s'écrivent $y(t) = \dfrac{(\lambda - \mu \ln t)}{t}$.

Exercice 14 (Raccord de solutions)
Résoudre sur $]-\infty, 0[$ puis sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$ty' + y = \frac{2t}{1+t^2}$$

Montrer qu'il existe une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Solution 8
Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $f(t) = \dfrac{\lambda}{t}$. La méthode de variation de la constante conduit à $\lambda'(t) = \dfrac{2t}{(1+t^2)}$ donc $\lambda(t) = \ln(1+t^2)$. Sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$, on obtient donc les solutions :

$$f(t) = \frac{\lambda}{t} + \frac{\ln(1+t^2)}{t}$$

On considère maintenant une solution f de l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$. Il existe alors α, λ, μ tels que :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{t} + \dfrac{\ln(1+t^2)}{t} & \text{si } t > 0 \\ \dfrac{\mu}{t} + \dfrac{\ln(1+t^2)}{t} & \text{si } t < 0 \\ \alpha & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

La fonction f doit être continue sur $\mathbb{R}$, donc en 0, ce qui impose $\lambda = \mu = \alpha = 0$. Alors f est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+t^2)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Vérifions que cette fonction est bien solution de l'équation différentielle de départ. Elle est clairement solution sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}_+^\times$. Elle est de plus dérivable en 0 car :

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{\ln(1+t^2) - \ln(1)}{t^2} \underset{t \to 0}{\to} \ln'(1) = 1$$

On a de plus $0f'(0) + f(0) = 0$ ce qui montre que f satisfait l'équation différentielle en 0.

Exercice 15 (Une équation fonctionnelle)
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que :

$$(1) \qquad \forall t, u \in \mathbb{R} \quad f(t+u) = f(t)f(u)$$

1. Montrer que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$;
2. Montrer que, si $f(0) = 0$, alors f est identiquement nulle. Dans la suite, on suppose f non identiquement nulle, donc $f(0) = 1$;
3. En dérivant (1) par rapport à u puis en appliquant en $u = 0$, montrer que l'on a $f'(t) = f'(0)f(t)$;
4. En déduire que f est solution d'une équation différentielle très simple que l'on résoudra;
5. En déduire l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivables et satisfaisant (1).

Solution 9

1. On a $f(0+0) = f(0)^2 = f(0)$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$;
2. Si $f(0) = 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) = f(t+0) = f(t)f(0) = 0$ et f est identiquement nulle;
3. En dérivant (1) par rapport à u on obtient :
$$\forall t, u \in \mathbb{R} \quad f'(t+u) = f(t)f'(u)$$
puis en faisant $u = 0$, il vient :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) = f(t)f'(0)$$
4. La fonction f est par conséquent solution du problème de l'équation différentielle $y' = f'(0)y$ et on en déduit que $f(t) = \lambda e^{f'(0)t}$ quel que soit t. Avec la condition supplémentaire $f(0) = 1$, il vient $f(t) = e^{f'(0)t}$ pour tout t;
5. Par conséquent, si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable et vérifie (1), alors $f(t) = e^{\alpha t}$ quel que soit t, ou bien f est identiquement nulle. Réciproquement, il faut vérifier que ces fonctions sont bien dérivables et vérifient (1), ce qui est le cas.

3.2 Méthode d'Euler

Considérons une équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ ainsi qu'une solution f de cette équation. Notons t_0 et y_0 deux réels tels que $t_0 \in I$ et $y_0 = f(t_0)$ (autrement dit, la courbe représentative de f passe par le point de coordonnées (t_0, y_0)). On a alors $f'(t_0) = b(t_0) - a(t_0)f(t_0) = b(t_0) - y_0 a(t_0)$. Pour $t_1 > t_0$ suffisamment proche de t_0, on a les approximations
$$: \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \approx f'(t_0) \quad f(t_1) \approx f'(t_0)(t_1 - t_0) + f(t_0)$$
La méthode d'Euler consiste à remplacer le nombre $f(t_1)$ (inconnu) par une approximation y_1 définie par :
$$y_1 = f'(t_0)(t_1 - t_0) + f(t_0) = (b(t_0) - a(t_0)y_0)(t_1 - t_0) + y_0$$
Ceci revient à assimiler, sur l'intervalle $[t_0, t_1]$, la courbe représentative de f avec sa tangente en t_0. Cette approximation est d'autant meilleure que $h = t_1 - t_0$ est petit. On peut alors réitérer ce processus et en déduire une approximation y_n de l'ordonnée du point de coordonnées $(t_n, f(t_n))$ où $t_n = t_0 + nh$. Finalement, pour $n > 0$, la ligne polygonale joignant les points :
$$(t_0, y_0), (t_1, y_1), \ldots, (t_n, y_n)$$
constitue une approximation de la courbe représentative de f sur l'intervalle $[t_0, t_n]$.

Commentaire 1
Plus généralement, si la courbe représentative d'une solution de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ passe par le point de coordonnées (t, y), sa tangente en ce point admet pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(t, b(t) - ya(t))$. On peut représenter sur un même dessin tous ces vecteurs ce qui donne une idée de l'allure des solutions de l'équation différentielle.

Exemple 7
Considérons le problème de Cauchy :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' - e^{t^2} y & = & t \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$
Appliquons la méthode d'Euler pour approcher son unique solution. On pose $h = \frac{1}{100}$ (par exemple) et $t_n = t_0 + nh = nh = \frac{n}{100}$ (puisque $t_0 = 0$). La suite (y_n) est définie par récurrence en posant :
$$y_0 = 1$$
$$y_{n+1} = y_n + (t_n + e^{t_n^2} y_n)h = y_n + \frac{(\frac{n}{100} + e^{\frac{n^2}{10000}} y_n)}{100}$$

Exercice 16
Faire de même avec le problème de Cauchy : $\begin{cases} y' + \sqrt{1-t^2}y = \sin t \\ y(-1) = 0 \end{cases}$ avec un pas $h = \dfrac{1}{10}$.

Exercice 17
On considère $n \geq 1$ et on subdivise régulièrement l'intervalle $[0, 1]$ en n parties en posant, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $t_k = \dfrac{k}{n}$. Notons $y_0, \ldots, y_n$ les ordonnées des points obtenus en appliquant la méthode d'Euler à l'équation différentielle $y' = y$ en partant de $(t_0, y_0) = (0, 1)$. Calculer y_{k+1} en fonction de y_k (pour $0 \leqslant k < n$) et en déduire la valeur de y_n. Que peut-on dire de la suite de terme général $u_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$.

Solution 10
D'après ce qui précède, on a :

$$y_{k+1} = y_k(t_{k+1} - t_k) + y_k = y_k\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

On en déduit que $y_n = (1+\dfrac{1}{n})^n$. La solution f de léquation différentielle $y' = y$ telle que $f(0) = 1$ est la fonction exponentielle et, par conséquent, y_n doit représenter une approximation de $f(1) = e$ d'autant plus fine que n est grand. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ doit donc converger vers e (contrairement à l'intuition qui dit que cette suite doit converger vers 1). En effet :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\underbrace{\left(\frac{\ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(1)}{\frac{1}{n}}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\to} \ln'(1)=1} \underset{n\to+\infty}{\to} e$$

3.3 Chimie

En chimie, l'évolution des concentrations pour une réaction du type : $\alpha A + \beta B \mapsto \gamma C$ est modélisée par des équations du type :

$$-\frac{1}{\alpha}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{\beta}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{d[C]}{dt} = k[A]^a[B]^b$$

Considérons le cas plus simple où $a = 1$ et $b = 0$, ce qui conduit à l'équation :

$$-\frac{1}{\alpha}\frac{d[A]}{dt} = k[A]$$

On obtient donc on équation différentielle, linéaire et du premier ordre, qui est résolue de la manière suivante :

1. On commence par séparer les variables $[A]$ et t, ce qui donne $-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{d[A]}{[A]} = kdt$;

2. On prend une primitive à gauche et à droite en n'oubliant pas la constante d'intégration : $-\dfrac{1}{\alpha}\ln[A] = kt + \text{Cste}$. On en déduit $[A] = \text{Cste} \times \exp(-\alpha kt)$, la valeur de la constante étant déterminée à l'aide des conditions initiales.
L'avantage de ce raisonnement, outre le fait qu'il est naturel, est qu'il peut sans problème être adapté aux cas où $a \neq 1$.
Voyons comment justifier ces différentes étapes, le point de départ étant une équation différentielle de la forme $y' = Ky$:

3. On commence par diviser de chaque coté par y, ce qui donne $\dfrac{y'}{y} = K$. Cette étape n'est possible que si y ne s'annule pas. Or nous sommes en présence d'une équation différentielle du premier ordre, linéaire et homogène, par unicité des solutions aux problèmes de Cauchy, on sait que la seule solution qui s'annule est la solution identiquement nulle. Comme l'hypothèse implicite est que la concentration $[A]$ n'est pas identiquement nulle, on peut se limiter à chercher une solution y non identiquement nulle et qui, par conséquent, ne s'annule pas;

4. On prend une primitive de chaque coté, ce qui donne $\ln|y| = Kt+K'$ et on ne peut pas omettre, dans un premier temps, la valeur absolue. Ceci dit, si la fonction y n'était pas de signe constant, elle s'annulerait et nous venons d'expliquer que ceci est impossible. Par conséquent, y est de signe constant et on a $\ln|y| = \ln y$ si y est positive et $\ln|y| = \ln(-y)$ si y est négative. On peut donc écrire $y = K'' \exp(Kt)$ ce qui donne bien la solution obtenue plus haut (notons que nous n'avons pas exclu les solutions négatives).