Géométrie plane

Abdellah Bechata

www.mathematiques.fr.st

1 Modes de repérage

1.1 Bases et repères

On appelle base du plan toute paire de vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ non colinéaires. On montre alors que, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan, il existe un et un seul couple de réels (x, y) tel $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. Les réels x et y sont appelés coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On appelle repère du plan la donnée d'un triple $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où O est un point quelconque du plan et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ constitue une base de ce plan. Soit M un point du plan, il existe alors un unique couple de réels (x, y) tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. Les réels x et y sont appelés les coordonnées du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (remarquons que (x, y) sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$). On note symboliquement $M = O + x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ (resp. d'un point M) dans une base donnée $\mathcal{B}$ (resp. repère $\mathcal{R}$) dépendent de .. $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{R}$). On notera en générale $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right._{\mathcal{B}}$ (resp. $M\left|\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right._{\mathcal{R}}$) sauf lorsque la base (resp. le repère) est clairement définie, ce qui ne sera pas le cas lorque l'on effectuera des changements de bases (resp. repère).

1.2 Changement de repère

Nous aurons souvent à travailler dans plusieurs repères à la fois ou, dans les cas les plus simples, à changer de repère. Il faut dans ce cas pouvoir faire le lien entre les deux systèmes de coordonnées utilisés. Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $(O', \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}')$ deux repères orthonormés du plan (nous qualifierons les premier d'ancien repère et le second de nouveau repère). On commence par écrire les coordonnées du nouveau repère dans l'ancien :

$$O' = O + \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{i}' = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{j}' = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}$$

Soit M un point du plan, si ses coordonnées sont x et y dans l'ancien repère et x' et y' dans le nouveau, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \\
&= \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + x'\overrightarrow{i}' + y'\overrightarrow{j}' \\
&= \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + x'(a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}) + y'(c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}) \\
&= (\alpha + x'a + y'c)\overrightarrow{i} + (\beta + x'b + y'd)\overrightarrow{j}
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit, par unicité des coordonnées :

$$x = \alpha + x'a + y'c, \quad y = \beta + x'b + y'd$$

Nous verrons que c'est sous cette forme, en pratique, que l'on a souvent besoin d'avoir une relation entre coordonnées. Si toutefois il est nécessaire d'exprimer x' et y' en fonction de x et y, on peut au choix suivre la même méthode en échangeant le rôle des deux repères ou bien inverser le système ci-dessus.

Exercice 1
Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère ; deux points $A\left|\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ et $M\left|\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ ainsi que les deux vecteurs $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right._{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\right._{\mathcal{B}}$
Déterminer les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}'(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

2 Produit scalaire

2.1 Définition et propriétés du produit scalaire

Commençons par donner une interprétation géométrique au produit scalaire, dans le cas où les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ considérés sont non nuls. On note O, M et P des points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$. Soit P' le projeté orthogonal du point P sur la droite (OM). On a alors $OM = \|\overrightarrow{u}\|$ et $OP' = \|\overrightarrow{v}\| \, |\cos\theta|$ (où θ est une mesure de l'engle non orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$). Par conséquent $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est égal au produit des longueurs OM et OP' si $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OP'}$ sont de même sens et est égal à l'opposé de cette quantité si les vecteurs sont de sens contraires. On aurait tout aussi bien pu projeter orthogonalement sur (OP). Sous cette forme, il est clair que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ puisque ceci traduit le fait que $O = M$ ou que $P' = M$.

Rappelons maintenant quelques propriétés algébriques du produit scalaire. Tout d'abord, ce produit est symétrique, autrement dit quels que soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$, on a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$

Ensuite ce produit est bilinéaire, ce qui signifie que quels que soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ et les réels λ, μ :

$$\overrightarrow{u} \cdot \lambda\overrightarrow{v}_1 + \mu\overrightarrow{v}_2 = \lambda\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}_1 + \mu\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}_1$$

Si, au moyen d'un repère orthonormé, on associe des affixes complexes aux vecteur, on remarque que, pour deux vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ d'affixes respectives a et b, on a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \mathrm{Re}(a\bar{b})$$

2.2 Bases et repères orthonormés

Lorsqu'une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est telle que $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1$ et $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0$, on dit que la base est orthonormée et un repère construit sur une base orthonormée est dit orthonormé. Dans les repères orthonormés, les coordonnées se calculent très simplement à l'aide de produits scalaire. Les calculs de distances et de produits scalaires sont également très simples à effectuer.

Proposition 1 (Coordonnées dans les repères orthonormés)
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan. Pour tout point M du plan et tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on a, dans ce repère :

$$M \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{j} \end{array} \right. , \quad \overrightarrow{u} \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{u}.\overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{j} \end{array} \right.$$

Proposition 2 (Utilisation des coordonnées dans un repère orthonormé)
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan. Si dans ce repère on a $A \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$ et $B \left| \begin{array}{l} x' \\ y' \end{array} \right.$, alors :

$$AB^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$$

Si dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on a $\overrightarrow{u} \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$ et $\overrightarrow{v} \left| \begin{array}{l} x' \\ y' \end{array} \right.$, alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy', \quad \|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + y^2$$

3 Orientation, base et repères orthonormés directs

Lorsqu'on dispose deux deux repères orthonormés $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $(O', \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}')$, le second est toujours image du premier par un déplacement (composée d'une translation et d'une rotation, donc il conserve l'angle entre deux vecteurs) ou d'un anti-déplacement (composée d'une symétrie axiale et d'un déplacement, donc il change le signe de l'angle entre deux vecteurs). Deux repères quelconques seront dits de même sens lorsque l'un est l'image de l'autre par un déplacement et de sens contraires lorsqu'il faut utiliser un anti-déplacement. Ainsi, on voit apparaitre de classes de repères, à l'intérieur desquelles les repères sont de même sens et deux repères de classes différentes étant toujours de sens contraires.

Choisir une orientation du plan, c'est choisir une des deux classes de repères mises en évidence précédemment et appeler les repères de cette classe des repères orthonormés directs et les bases associées à ces repères seront appelées bases orthonormées directes. Les repères de l'autre classe seront dits indirects (ou rétrogrades). Notons qu'un tel choix peut se faire en fixant un repère orthonormé particulier et en décrétant directs tous les repères de même sens. Ce choix ne peut être qu'arbitraire (en général, on appelle repères orthonormés directs ceux dans lesquels on passe du premier vecteur au second au moyen d'une rotation dans le sens trigonométrique, qui est de toutes façons lui-aussi issu d'un choix arbitraire). Lorsqu'un tel choix aura été effectué, on dira que le plan est orienté.

Proposition 3
Si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est orthonormée directe, alors le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(-y, x)$ est directement orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y) (à condition que ce dernier soit non nul). De plus, $\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ est directement orthogonal à $\dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$.

Exercice 2
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonrmé direct et soit $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. Donner les deux vecteurs unitaires orthogonaux à $\overrightarrow{v}$ et préciser celui qui lui est directement orthogonal.

Solution 1
Les vecteurs unitaires orthogonaux à $\overrightarrow{v}$ sont $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j}$ (directement orthogonal) et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j}$.

Proposition 4
Si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est orthonormée et directe, alors le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(\cos\theta x - \sin\theta y, \sin\theta x + \cos\theta y)$ est le vecteur déduit du vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y) par rotation d'angle orienté θ.

4 Déterminant

Nous supposons dans cette partie le plan $\mathcal{P}$ orienté.

Définition 1
Dans le plan orienté, on appelle déterminant de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ la quantité :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\sin\theta$$

où θ désigne une mesure de l'angle orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Dans le cas où l'un des vecteurs $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, on peut prendre n'importe quelle valeur pour θ, le déterminant obtenu valant toujours 0.

Proposition 5 (Propriétés algébriques du déterminant)
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ des vecteurs du plan et λ et μ deux réels, on a les résultats suivants :

$$\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = -\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$
$$\det(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v}_1 + \mu\overrightarrow{v}_2) = \lambda\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}_1) + \mu\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}_1)$$

(et on dit que l'application déterminant est antisymétrique et bilinéaire).

Théorème 1
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan orienté :

- *on a $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires;*
- *le réel $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ représente l'aire algébrique du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$;*
- *si $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère orthonormé direct du plan dans lequel les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ sont x et y et celles de $\overrightarrow{v}$ sont x' et y', on a :*
$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - yx'$$
- *Si les affixes de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont respectivement a et b, on a :*
$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \mathrm{Im}(a\bar{b})$$

Remarque 1
Il est traditionnel de noter $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Preuve :
Le premier point est conséquence directe de la définition. Pour le deuxième point, soient P, Q, et R les trois points du plan tels que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. On note R' la projection orthogonale de R sur la droite (OP) et Q' la projection orthogonale de Q sur la droite (OP). Il est immédiat que l'aire du parallélogramme $OPRQ$ est celle du rectangle $Q'PRQ$. L'aire de ce dernier est égale à $QQ' \times QR$. Or $QQ' = OQ \times \sin\theta$ où θ est l'angle (non orienté) entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ donc l'aire de $OPRQ$ vaut $OQ \times QR \times \sin\theta$. On achève la preuve en remarquant que $QR = \left\|\overrightarrow{QR}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\|$ puis en distinguant les cas où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont en sens direct ou indirect. ■

Exercice 3
Déterminer l'aire du triangle (ABC) sachant que dans un repère orthonormé, on a $A \left| \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right., \quad B \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right., \quad C \left| \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} \right.$.
Déterminer la longueur de la hauteur issue de A du triangle (ABC).

Preuve :
Ces deux points se démontrent aisément en utilisant les coordonnées. ■

Remarque 2
Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une famille orthonormée, on a $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pm 1$ et $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 1$ si et seulement si la famille est directe. Bien entendu, la réciproque n'est pas vraie (il existe des familles de vecteurs dont le déterminant vaut 1 sans pour autant que la famille soit une base orthonormée directe). Ceci conduit à la définition suivante, permettant de généraliser la notion de famille directe.

Définition 2
Un couple de deux vecteurs non colinéaires $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est dit direct si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) > 0$ et indirect si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) < 0$.

4.1 Coordonnées polaires

Venons-en à une dernière manière de repérer des vecteurs et des points du plan, très utilisée aussi bien en mathématiques qu'en physique. Fixons un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et, pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons :

$$\overrightarrow{u}(\theta) = \cos\theta \overrightarrow{i} + \sin\theta \overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{v}(\theta) = -\sin\theta \overrightarrow{i} + \cos\theta \overrightarrow{j}$$

Alors, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan, il existe un couple de réels (r, θ) tel que $\overrightarrow{u} = r\overrightarrow{u}(\theta)$ (pour un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$, il suffit de considérer l'écriture exponentielle de son affixe). On dit alors que r et θ sont les coordonnées polaires de $\overrightarrow{u}$ dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Par contre, puisque nous n'imposons pas ici que $\overrightarrow{u}$ soit non nul, ni que r soit positif, les coordonnées polaires ne sont pas uniques, à la différence des coordonnées cartésiennes. En effet, on a

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{0} = 0 \times \overrightarrow{u}(\theta), \quad r\overrightarrow{u}(\theta) = r\overrightarrow{u}(\theta + 2k\pi) = (-r)\overrightarrow{u}(\theta + \pi) = (-r)\overrightarrow{u}(\theta + \pi + 2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Autrement dit, si (r, θ) sont des coordonnées polaires de $\overrightarrow{u}$, $(r, \theta + 2\pi)$ et $(-r, \theta + \pi + 2k\pi)$ sont aussi des coordonnées polaires de $\overrightarrow{u}$.

Pour tout point M du plan, il existe un couple de réels (r, θ) tel que $M = O + r\overrightarrow{u}(\theta)$ et on dit que r et θ sont les coordonnées polaires de M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Notons que, dans tous les cas, les coordonnées cartésiennes de $\overrightarrow{u}$ sont $r\cos\theta$ et $r\sin\theta$ sont bien déterminées. Si on désire avoir unicité des coordonnées polaires, il est possible d'imposer des conditions supplémentaires comme le montre la proposition suivante (qui ne représente qu'une manière possible de faire).. Par contre, si l'on impose des conditions restrictives à r et θ, on dispose de l'unicité.

Proposition 6
Supposons fixé un repère orthonormé direct d'origine O. Un vecteur non nul du plan (respectivement un point du plan distinct de O) possède un unique couple de coordonnées polaires (r, θ) tel que $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

5 Droites et cercles

On suppose fixé dans cette partie un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, associé à la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

5.1 Représentations d'une droite

Méthode 1 (Représentations d'une droite)
Pour obtenir une représentation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$:

- *si cette droite est définie par un point $A \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right._{\mathcal{R}}$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{u} \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right._{\mathcal{B}}$, alors $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M qui peuvent s'écrire sous la forme $M = A + t\overrightarrow{u}$ ce qui conduit à la représentation paramétrique :*

$$x : t \mapsto a + \alpha t, \quad y : t \mapsto b + \beta t$$

- *si cette droite est définie par deux points distincts $A \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right._{\mathcal{R}}$ et $B \left| \begin{matrix} a' \\ b' \end{matrix} \right._{\mathcal{R}}$, alors $\overrightarrow{u} \left| \begin{matrix} a' - a \\ b' - b \end{matrix} \right._{\mathcal{B}}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et appliquant ce qui précède, on obtient la représentation paramétrique :*

$$x : t \mapsto a + (a' - a)t, \quad y : t \mapsto b + (b' - b)t$$

- *finalement, si cette droite est définie par un point* $A\left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$ *et un vecteur normal* $\overrightarrow{v}\left|\begin{matrix} \alpha' \\ \beta' \end{matrix}\right._{\mathcal{B}}$ *dans* $\mathcal{R}$*, alors* $\overrightarrow{u}\left|\begin{matrix} -\beta' \\ \alpha' \end{matrix}\right._{\mathcal{B}}$ *est un vecteur directeur de* $\mathcal{D}$ *et on obtient ainsi la représentation paramétrique :*

$$x : t \mapsto a - \beta' t, \quad y : t \mapsto b + \alpha' t$$

Pour obtenir une équation cartésienne d'une droite $\mathcal{D}$ *:*

- *si cette droite est définie par un point* $A\left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$ *et un vecteur directeur* $\overrightarrow{u}\left|\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right._{\mathcal{B}}$ *dans* $\mathcal{R}$*, un point* $M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$ *dans* $\mathcal{R}$ *est situé sur cette droite si et seulement si* $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0$ *et on développe ensuite ce déterminant pour obtenir une équation cartésienne :*

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = \begin{vmatrix} x-a & \alpha \\ y-b & \beta \end{vmatrix} = \beta(x-a) - \alpha(y-b) = 0$$

- *si la droite est définie par deux points distincts* $A\left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$ *et* $B\left|\begin{matrix} a' \\ b' \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$ *dans* $\mathcal{R}$*, on raisonne de même en prenant le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *comme vecteur directeur :*

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x-a & a'-a \\ y-b & b'-b \end{vmatrix} = (b'-b)(x-a) - (a'-a)(y-b) = 0$$

- *si la droite est définie par un point* $A\left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$ *et un vecteur normal* $\overrightarrow{v}\left|\begin{matrix} \alpha' \\ \beta' \end{matrix}\right._{\mathcal{B}}$ *dans* $\mathcal{R}$*, alors le vecteur* $\overrightarrow{u}\left|\begin{matrix} -\beta' \\ \alpha' \end{matrix}\right._{\mathcal{B}}$ *est un vecteur directeur et on écrit donc :*

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = \begin{vmatrix} x-a & -\beta' \\ y-b & \alpha' \end{vmatrix} = \alpha' x + \beta' y - \alpha' a - \beta' b = 0$$

on peut également développer directement le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{v}$ *:*

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{v} = (x-a)\alpha' + (y-b)\beta' = \alpha' x + \beta' y - (\alpha' a + \beta' b) = 0$$

Remarque 3
On en déduit que toute droite $\mathcal{D}$ possède une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. L'équation de cette droite n'est pas unique. Il suffit de changer un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ par $\lambda\overrightarrow{u}$ avec $\lambda \neq 0$, ce qui fournit l'équation $\lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0$.
Partant d'une équation de droite $ax + by + c = 0$, il est toujours possible de diviser par $\sqrt{a^2 + b^2}$ (qui est non nul) pour se ramener à une équation du même type mais vérifiant de plus $a^2 + b^2 = 1$ (on parle alors d'équation normale de la droite).

Méthode 2 (Éléments caractéristiques d'une droite)
Si on connait une représentation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$ *dans* $\mathcal{R}$ *:*

$$x : t \mapsto a + \alpha t, \quad y : t \mapsto b + \beta t$$

alors on peut en déduire deux point distincts de cette droite en donnant deux valeurs distinctes au paramètre t *(par exemple pour* $t = 0$ *et* $t = 1$ *on trouve les points* $A\left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$ *et* $B\left|\begin{matrix} a+\alpha \\ b+\beta \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$ *dans* $\mathcal{R}$*). Le vecteur* $\overrightarrow{u}\left|\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right._{\mathcal{B}}$ *dans* $\mathcal{R}$ *est un vecteur directeur de* $\mathcal{D}$ *et le vecteur* $\overrightarrow{v}\left|\begin{matrix} -\beta \\ \alpha \end{matrix}\right._{\mathcal{B}}$ *dans* $\mathcal{R}$ *est un vecteur normal.*
De même, si la droite $\mathcal{D}$ *admet pour équation cartésienne* $ax + by + c = 0$ *alors le vecteur* $\overrightarrow{v}\left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right._{\mathcal{B}}$ *dans* $\mathcal{R}$ *est un vecteur normal à la droite. En effet, si* $M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$ *et* $M'\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$ *dans* $\mathcal{R}$ *sont deux points de la droite, on a :*

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{MM'} = a(x'-x) + b(y'-y) = (ax' + by') - (ax + by) = -c + c = 0$$

Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{u}\left|\begin{matrix} -b \\ a \end{matrix}\right._{\mathcal{B}}$ *dans* $\mathcal{R}$ *est un vecteur directeur de la droite. Finalement, pour obtenir des points de cette droite, il suffit de trouver des solutions à l'équation* $ax+by+c = 0$*. Lorsque* a *est non nul, on peut écrire* $x = \dfrac{-(by+c)}{a}$ *et donner différentes valeurs à* y*. Lorsque* b *est non nul, on fait de même mais en écrivant* y *en fonction de* x*.*

Exercice 4
On considère un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé fixé. Pour chacune des droites suivantes, déterminer deux points, un vecteur directeur, un vecteur normal, une équation et une représentation paramétrique :

1. La droite passant par $A \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right.$ et $B \left| \begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array} \right.$;
2. La droite passant par $A \left| \begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} \right.$ et dirigée par $\overrightarrow{u} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right.$;
3. La droite passant par $A \left| \begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} \right.$ et de vecteur normal $\overrightarrow{v} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right.$;
4. La droite d'équation $2x - 3y + 1 = 0$;
5. La droite de représentation paramétrique :

$$x : t \mapsto 1 + 2t, \quad y : t \mapsto -t$$

Solution 2

1. Le vecteur $\overrightarrow{u} \left| \begin{array}{c} -2 \\ 1 \end{array} \right.$ est directeur et le vecteur $\overrightarrow{v} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right.$ est normal. La droite admet pour équation $(x-1)+2(y-1) = 0$ et pour représentation paramétrique $x(t) = 1 - 2t$ et $y(t) = 1 + t$;
2. Le point $B \left| \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right.$ est un point de la droite distinct de A et le vecteur $\overrightarrow{v} \left| \begin{array}{c} -3 \\ 2 \end{array} \right.$ est normal. La droite admet pour équation $3(x - 1) - 2(y + 2) = 0$ et pour représentation paramétrique $x(t) = 1 + 2t$ et $y(t) = -2 + 3t$;
3. Le vecteur $\overrightarrow{u} \left| \begin{array}{c} -3 \\ 2 \end{array} \right.$ est directeur et le point $B \left| \begin{array}{c} -2 \\ 0 \end{array} \right.$ est un point de la droite distinct de A. La droite admet pour équation $2(x - 1) + 3(y + 2) = 0$ et pour représentation paramétrique $x(t) = 1 - 3t$ et $y(t) = -2 + 2t$;
4. Le vecteur $\overrightarrow{v} \left| \begin{array}{c} 2 \\ -3 \end{array} \right.$ est normal et le vecteur $\overrightarrow{u} \left| \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right.$ est directeur. Les points $A \left| \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{3} \end{array} \right.$ et $B \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right.$ sont situés sur la droite. Elle admet pour représentation paramétrique $x(t) = 1 + 3t$ et $y(t) = 1 + 2t$;
5. Le vecteur $\overrightarrow{u} \left| \begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array} \right.$ est directeur et le vecteur $\overrightarrow{v} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right.$ est normal. Les points $A \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right.$ et $B \left| \begin{array}{c} 3 \\ -1 \end{array} \right.$ sont situés sur la droite et elle admet pour équation $(x - 1) + 2y = 0$.

Remarque 4
Considérons une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c = 0$. Les coordonnées (r, θ) des points M de cette droite vérifient donc :

$$r(a\cos\theta + b\sin\theta) + c = 0$$

Dans le cas où la droite ne passe pas par l'origine du repère, on a $c \neq 0$ et la quantité $a\cos\theta + b\sin\theta$ ne s'annule donc pas (pour les points de la droite). Ainsi, M appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si ses coordonnées polaires vérifient :

$$r = \frac{-c}{a\cos\theta + b\sin\theta}$$

Plus généralement, une équation de la forme :

$$r = \frac{1}{a\cos\theta + b\sin\theta}$$

avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est appelée équation polaire de la droite d'équation $ax + by - c = 0$. Dans le cas d'une droite passant par l'origine, l'équation polaire est plus simple à trouver : il s'agit simplement de l'équation $\theta \equiv \theta_0 \mod \pi$ où θ_0 est l'angle que fait la droite avec l'axe des abscisses.

5.2 Intersection de deux droites

Méthode 3 (Intersection de deux droites)
Voyons comment obtenir le point d'intersection éventuel de deux droites à partir de leur représentation (paramétrique ou cartésienne). Tout d'abord, deux droites possèdent un unique point d'intersection si et seulement si leur vecteurs directeurs (ou orthogonaux) ne sont pas colinéaires. Ensuite :

- *si l'une des droites est représentée par une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et l'autre par une représentation paramétrique $x : t \mapsto x(t), y : t \mapsto y(t)$, c'est le cas le plus simple : on remplace x et y par $x(t)$ et $y(t)$ dans l'équation $ax + by + c = 0$ ce qui permet d'obtenir t puis les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du point d'intersection;*

- *si les deux droites sont représentées par des équations cartésiennes $ax+by+c = 0$ et $a'x+b'y+c' = 0$, les coordonnées du point d'intersection sont solution du système :*

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

- *si les deux droites sont représentées paramétriquement par x_1, y_1 et x_2, y_2, on commence par résoudre le système :*

$$\begin{cases} x_1(t) = x_2(t') \\ y_1(t) = y_2(t') \end{cases}$$

  À partir des solutions t, t' de ce système, on trouve les coordonnées du point d'intersection qui sont $(x_1(t), y_1(t))$ ou $(x_2(t'), y_2(t'))$.

Exercice 5
Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite d'équation $3x - 2y = 0$ avec la droite de représentation paramétrique :

$$x : t \mapsto 1 - t, \quad y : t \mapsto 2t$$

5.3 Distance d'un point à une droite

Si $\mathcal{D}$ est une droite et M un point, la distance de M à $\mathcal{D}$ est égale à la longueur MP où P désigne le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ et on note $d(M, \mathcal{D}) = MP$.

Méthode 4 (Calcul de la distance d'un point à une droite)
Soient $\mathcal{D}$ une droite et M un point du plan. Si A est un point de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, on a (d'après les propriétés du déterminant) : $d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{\left|\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM})\right|}{\|\overrightarrow{u}\|}$

De même, si $\overrightarrow{v}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$, on a : $d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{\left|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{AM}\right|}{\|\overrightarrow{v}\|}$.

Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$, on a en particulier : $d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ où x_0 et y_0 désignent les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$.

Exercice 6
Déterminer la distance du point M de coordonnées $(-2, 1)$ à la droite d'équation $x + 3y + 1 = 0$.

Solution 3
On calcule $\dfrac{|-2 + 3 + 1|}{\sqrt{1 + 3^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$.

5.4 Représentations d'un cercle

Une représentation paramétrique d'un cercle est constituée de deux fonctions $x : t \mapsto x(t)$ et $y :\mapsto y(t)$ telles que tout point du cercle admette pour coordonnées $(x(t), y(t))$ pour un certain paramètre t, la manière la plus naturelle de faire étant d'utiliser des fonctions trigonométriques. Nous verrons aussi comment obtenir une équation cartésienne.

Méthode 5 (Représentations d'un cercle)
Si $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right._{\mathcal{R}}$ et de rayon $R \geqslant 0$, les fonctions :

$$x : t \mapsto a + R\cos t, \quad y : t \mapsto b + R\sin t$$

constituent une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$. Par ailleurs, un point $M \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right._{\mathcal{R}}$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $\Omega M^2 = R^2$, autrement dit si et seulement si l'équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0$$

est satisfaite. Cette équation est donc une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 7
On considère l'équation :

$$x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$$

Déterminer à quelle condition sur les réels a, b et c cette équation est celle d'un cercle et donner alors son centre et son rayon.

Solution 4
On écrit $x^2 + ax$ et $y^2 + by$ comme le développement d'un carré :

$$(x + a/2)^2 + (y + b/2)^2 = a^2/4 + b^2/4 - c = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

Cette équation représente un cercle si et seulement si $a^2 + b^2 \geqslant 4c$ et dans ce cas, le centre de cercle est $\Omega \left| \begin{array}{l} -\dfrac{a}{2} \\ -\dfrac{b}{2} \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ et son rayon est $R = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$.

Remarque 5
Soient $A \left| \begin{array}{l} a \\ b \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ et $B \left| \begin{array}{l} a' \\ b' \end{array}\right._{\mathcal{R}}$ deux point de plan. Comme le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que le triangle ABM soit rectangle en M, on en déduit une équation cartésienne de $\mathcal{C}$:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (x - a)(x - a') + (y - b)(y - b') = 0$$

sans avoir à calculer ni le centre du cercle (milieu de $[AB]$) ni le rayon $R = \dfrac{AB}{2}$.

5.5 Intersection d'un cercle et d'une droite

Proposition 7 (Intersection d'un cercle et d'une droite)
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon $R > 0$ et soit $\mathcal{D}$ une droite. On note H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$, on est alors dans un et un seul des cas suivants :

- *$\Omega H > R$ et l'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ est vide;*
- *$\Omega H = R$ et l'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ est réduit au point H ($\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}$ en H);*
- *$\Omega H < R$ et l'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ est consituée de deux points distincts M_1 et M_2, ce sont les points de $\mathcal{D}$ dont la distance à H est égale à $\sqrt{R^2 - \Omega H^2}$.*

Preuve :
Soit M un point de $\mathcal{D}$, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2$$

on a alors $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si $HM^2 = R^2 - \Omega H^2$. Un tel point M ne peut exister que si $R^2 \geqslant \Omega H^2$ et, dans ce cas, on a :

$$HM = \sqrt{R^2 - \Omega H^2}$$

On en déduit bien les résultats annoncés. ■

Exercice 8
On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}\right.$ et de rayon R ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x + y = 2$. Déterminer suivant la valeur de R le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

Solution 5
La distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ vaut $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Par conséquent si $R > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, il y a deux points d'intersection, si $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ il y en a un seul et dans le cas contraire il n'y en a pas.

Exercice 9
On considère la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $x(t) = 1 + 2t$ et $y(t) = 1 - t$ ainsi que le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}\right.$ et de rayon R. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ et chercher à quelle condition sur t le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ est situé sur $\mathcal{C}$. En déduire la distance de la droite $\mathcal{D}$ au cercle $\mathcal{C}$ ainsi que les coordonnées des points d'intersection lorsque $R = 1$.

Solution 6
Le discriminant réduit de l'équation obtenue est $\delta = 5R^2 - 4$. Il est donc strictement positif lorsque $R > \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. On en déduit que la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ et $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Pour $R = 1$, on trouve $\delta = 1$ et les solutions s'écrivent $t_1 = -\dfrac{2}{5}$ et $t_2 = 0$ ce qui donne les coordonnées des points d'intersection.

5.6 Intersection de deux cercles

Remarque 6
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega \left| \begin{array}{cc} & a \\ \mathcal{R} & b \end{array} \right.$ et de rayon R. Ce cercle admet pour équation cartésienne l'équation :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$$

Pour un point $M \left| \begin{array}{cc} & x \\ \mathcal{R} & y \end{array} \right.$ quelconque, la quantité $(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2$ est égale à $\Omega M^2 - R^2$.

Proposition 8 (Axe radical de deux cercles non concentriques)
Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles, $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R et $\mathcal{C}'$ de centre Ω' et de rayon R'. On suppose $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ non concentriques, autrement dit $\Omega \neq \Omega'$. L'ensemble des points M du plan tels que :

$$\Omega M^2 - R^2 = \Omega' M^2 - {R'}^2$$

est une droite $\mathcal{D}$ du plan, appelée axe radical des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Du plus, un point M du plan appartient à $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ si et seulement si il appartient à $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

Preuve :
Notons $\Omega \left| \begin{array}{cc} & a \\ \mathcal{R} & b \end{array} \right.$, $\Omega' \left| \begin{array}{cc} & a' \\ \mathcal{R} & b' \end{array} \right.$ et $M \left| \begin{array}{cc} & x \\ \mathcal{R} & y \end{array} \right.$, on a alors :

$$\begin{aligned} \Omega M^2 - R^2 = \Omega' M^2 - {R'}^2 & \text{si et seulement si } (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = (x-a')^2 + (y-b')^2 - {R'}^2 \\ & \text{si et seulement si } -2ax + a^2 - 2by + b^2 - R^2 = -2a'x + {a'}^2 - 2b'y + {b'}^2 - {R'}^2 \\ & \text{si et seulement si } 2(a-a')x + {a'}^2 + 2(b-b')y = a^2 + b^2 - {a'}^2 - {b'}^2 - R^2 + {R'}^2 \end{aligned}$$

Or $a \neq a'$ ou $b \neq b'$, on obtient donc bien l'équation d'une droite $\mathcal{D}$. ■

Proposition 9 (Intersection de deux cercles non concentriques)
Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles non concentriques. Si on note $\mathcal{D}$ l'axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, alors : $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.
Par conséquent, le calcul de l'intersection de deux cercles non concentriques se ramène à un calcul d'intersection entre un cercle et un droite et on est donc dans un et un seul des cas suivants :

- *$\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ est vide et les deux cercles ne se courpent pas;*
- *$\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ est réduit à un point, en ce point chacun des cercles est tangent à $\mathcal{D}$ et on dit que les deux cercles sont tangents;*
- *$\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ est constituée de deux points distincts et $\mathcal{D}$ est la droite passant par ces deux points.*

Preuve :
Montrons tout d'abord que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Soit Ω le centre de $\mathcal{C}$, R son rayon, Ω' le centre de $\mathcal{C}'$ et R' son rayon. Soit M un point du plan. Si $M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$, alors : $\Omega M^2 - R^2 = 0 = \Omega' M^2 - {R'}^2$ et on a alors $M \in \mathcal{D}$, donc $M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Réciproquement, si $M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, alors $\Omega' M^2 - {R'}^2 = \Omega M^2 - R^2$ (car M est situé sur $\mathcal{D}$) et $\Omega M^2 - R^2 = 0$ (car M est situé sur $\mathcal{C}$). Par conséquent $\Omega' M^2 - {R'}^2 = 0$ et M est situé sur $\mathcal{C}$. On en déduit donc que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Il ne reste plus qu'à appliquer le résultat sur l'intersection d'un cercle et d'une droite : cette intersection est composée de zéro, un ou deux points. ■

Exercice 10
On considère les cercles $\mathcal{C}$ de centre $A \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right.$ et de rayon 2 et $\mathcal{C}'$ de centre $A' \left| \begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array} \right.$ et de rayon $2\sqrt{2}$. Déterminer une équation cartésienne puis une représentation paramétrique de l'axe radical de ces deux cercles.

Solution 7
Les cercles ont pour équations respectives $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$ et $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 3 = 0$. L'axe radical a pour équation $2x - 6y + 4 = 0$. Le point $B \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right.$ est situé sur l'axe radical qui est dirigé par $\overrightarrow{u} \left| \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right.$. L'axe radical a donc pour représentation paramétrique $x(t) = 1 + 3t$, $y(t) = 1 + t$. La distance du point A à l'axe radical est $\dfrac{|2 - 12 + 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{13}} < 2$. Par conséquent les deux cercles ont une intersection non vide. On trouve les coordonnées des point d'intersection en cherchant les réels t tels que le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ soit situé sur l'un des cercles.