Nombres complexes

Abdellah Bechata

www.mathematiques.fr.st

1 Construction de $\mathbb{C}$

Cette partie est absolument facultative et on pourra l'omettre en première lecture. Nous allons expliquer ici comment construire les nombres complexes à partir d'objets existants (les réels). Nous allons définir, sur l'ensemble des couples de réels, des opérations d'addition et de multiplication.
Pour (a,b) et (a',b') éléments de $\mathbb{R}^2$, on pose :

$$(a,b)\oplus(a',b')=(a+a',b+b') \qquad (a,b)\otimes(a',b')=(aa'-bb',ab'+ba')$$

On pose alors $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ et les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés nombres complexes. Remarquons les deux identités remarquables suivantes

$$(x,0)\oplus(y,0)=(x+y,0) \qquad (x,0)\otimes(y,0)=(xy,0)$$

Par conséquent, si l'on identifie les nombres réels x aux couples $(x,0)$ de $\mathbb{C}$, alors que l'on identifie puis on additionne (resp. multiplie) ou que l'on additionne (resp. multiplie) puis on identifie, on obtient le même résultat dans $\mathbb{C}$. En effet, dans le premier cas, on obtient

$$\left.\begin{array}{c} x\mapsto(x,0) \\ y\mapsto(y,0)\end{array}\right\}\mapsto \left.\begin{array}{c}(x,0)\oplus(y,0)=(x+y,0) \\ (x,0)\otimes(y,0)=(xy,0)\end{array}\right\}$$

ce qui est égal à l'identification de $x+y$ et xy aux complexes $(x+y,0)$ et $(xy,0)$. On dit que notre identification est compatible à l'addition et la multiplication des nombres réels. Nous pouvons alors affirmer que, suite à l'identification, l'ensemble $\mathbb{R}$ est contenu dans $\mathbb{C}$, sous la forme des couples de la forme $(x,0)$ avec $x\in\mathbb{R}$ et que l'on vient de prolonger les lois d'additions et de multiplication aux complexes. Par la suite, pour une plus grande commodité, on écrira l'addition (resp. la multiplication) de $\mathbb{C}$ sera notée $+$ (resp. $\times$) au lieu de $\oplus$ (resp. $\otimes$). Notons ensuite que, pour $z=(x,y)\in\mathbb{C}$, on a :

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,1)\times(y,0)=x+i\times y$$

On peut alors poser $i=(0,1)$ de sorte que tout nombre complexe z s'écrive sous la forme $z=a+ib$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ et le complexe i vérifie

$$i^2=(0,1)\times(0,1)=(0\times0-1\times1,0\times1+1\times0)=(-1,0)=-1$$

En outre, cette écriture est unique. Si $z=a+ib$ et $z=a'+ib'$ avec a,b,a',b' dans $\mathbb{R}$, on a $z=(a,b)$ et $z=(a',b')$ donc $(a,b)=(a',b')\Leftrightarrow a=a'$ et $b=b'$.
Les opérations d'addition et de multiplication sur $\mathbb{C}$ définies plus haut possèdent un certain nombre de propriétés. Commençons par étudier le cas de l'addition :

1. Elle est associative, *i.e.* pour $z,z',z''\in\mathbb{C}$, on a :
$$(z+z')+z''=z+(z'+z'')$$
2. $0\quad(=(0,0))$ est élément neutre pour l'addition, autrement dit, quel que soit $z\in\mathbb{C}$, on a :
$$z+0=0+z=z$$
3. Pour $z=x+iy\in C$ on pose :
$$-z=(-x)+i\times(-y)$$
alors $-z$ est l'opposé de z pour l'addition, autrement dit :
$$z+(-z)=(-z)+z=0$$
4. Elle est commutative, *i.e.* pour $z,z'\in\mathbb{C}$, on a :
$$z+z'=z'+z$$

En ce qui concerne la multiplication, les propriétés vérifiées sont quelque peu différentes :

1. Elle est associative;
2. Elle admet 1 $\quad (= (1,0))$ pour élément neutre;
3. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec x, y réels, et $z \neq 0$. Le complexe z s'écrit alors $z = (x, y) \neq 0 = (0, 0)$ donc x ou y est non nul, ce qui implique que la quantité $x^2 + y^2$ est également non nul. On pose alors
$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \times \frac{-y}{x^2+y^2}$$
et un petit calcul nous donne
$$zz^{-1} = (a+ib)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} - i\frac{ab-ba}{a^2+b^2} = 1$$
Autrement dit, z^{-1} est l'inverse de z pour la multiplication dans $\mathbb{C}$. On le note également $\dfrac{1}{z}$ et tout complexe z non nul admet un inverse $\dfrac{1}{z}$ dans $\mathbb{C}$.
4. Elle est commutative;
5. Elle est distributive sur l'addition, *i.e.* quels que soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, on a :
$$z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z'' \qquad (z' + z'') \times z = z' \times z + z'' \times z$$

Lorsqu'un ensemble est muni d'une addition et d'une multiplication possédant toutes les propriétés précédentes, on dit que c'est un corps. C'est pourquoi nous parlerons du corps des nombres complexes. Il est facile de vérifier que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ sont également des corps.

Notation 1
Pour $z \in \mathbb{C}$, l'écriture $z = a + ib$, avec a et b réels, est appelée forme algébrique du nombre complexe z. Le réel a est alors appelé partie réelle de z et noté $\mathrm{Re}(z)$ tandis que b est appelé partie imaginaire de z et noté $\mathrm{Im}(z)$, de sorte que $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$. Les nombres complexes dont la partie réelle est nulle sont appelés imaginaires purs et l'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.
On n'a pas en général $\mathrm{Re}(a + ib) = a$ et $\mathrm{Im}(a + ib) = b$: ces égalités ne sont vraies que si a et b sont réels.

2 Calculs dans $\mathbb{C}$

Proposition 1 (Calcul de $z + z'$ et de zz')
Pour deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec a, b, a', b' dans $\mathbb{R}$, on a :
$$z + z' = (a + a') + i(b + b') \quad zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

Proposition 2 (Linéarité de Re et Im)
Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{array}{ll} \mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') & \mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z') \\ \mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Re}(z) & \mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Im}(z) \end{array}$$

Exercice 1
Montrer que, en général, $\mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz') \neq \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z')$.

Solution 1
Avec $z = z' = \imath$, il vient $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') = 0$ et $\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(-1) = -1$. De même, $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') = 1$ et $\mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Im}(-1) = 0$.

Exercice 2
Comparer $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), \mathrm{Re}(iz), \mathrm{Im}(iz)$.

Solution 2
Si $z = a + ib$, alors $iz = -b + ia$. Donc :
$$\mathrm{Re}(iz) = -b = -\mathrm{Im}(z) \quad \mathrm{Im}(iz) = a = \mathrm{Re}(z)$$

3 Conjugaison et module

Définition 1 (Conjugué et module)
Soit $z \in \mathbb{C}$ écrit sous la forme $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle nombre complexe conjugué de z, et on note $\overline{z}$ le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$. Le nombre réel $\sqrt{a^2 + b^2}$ est appelé module de z et noté $|z|$.

Proposition 3 (Conjugaison et module)
Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, on a les relations suivantes (les égalités relatives à z^{-1} n'étant valable que pour $z \neq 0$) :

$$\begin{array}{lll} \overline{\overline{z}} = z & \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2} & \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2} \\ \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} & \overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'} & \overline{(z^{-1})} = (\overline{z})^{-1} \\ |z|^2 = z\overline{z} & |zz'| = |z| \times |z'| & \left|z^{-1}\right| = \dfrac{1}{|z|} \end{array}$$

Proposition 4 (Calcul de l'inverse)
Soit z un nombre complexe non nul, on a alors : $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Preuve :
On utilise l'égalité $z\overline{z} = |z|^2$. Puisque z est non nul, son module $|z|$ est égalemen$\neq 0$, on peut divientraine que $z \times \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$ donc $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ ■

Remarque 1
Pour déterminer simplement les parties imaginaires et réelles d'un quotient de nombres complexes $\dfrac{z}{z'}$, on a coutume de multiplier numérateur et dénominateur par $\overline{z}$, ce qui a pour effet de rendre le dénominateur réel, égal à $|z'|^2$:

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}} = \frac{z\overline{z'}}{|z'|^2}$$

Puisque $\dfrac{1}{|z'|^2}$ est un réel, on a donc ramener le calcul des parties réelles et imaginaires d'un quotient de nombres complexes à celui d'un certain produit.

Exercice 3
Écrire, sous forme algébrique, les inverses des nombres complexes :

$$(1) \quad i \quad (2) \quad 1 + i \quad (3) \quad 3 - 4i$$

Solution 3

1. $i^2 = -1 \Leftrightarrow i \times (-i) = 1 \Leftrightarrow i^{-1} = -i$
2. $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{|1+i|^2} = \dfrac{1-i}{1^2+1^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i.$
3. $\dfrac{1}{3-4i} = \dfrac{3+4i}{|3-4i|^2} = \dfrac{3+4i}{3^2+4^2} = \dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25}i$

Exercice 4
Écrire sous forme algébrique les complexes suivants :

$$(1) \quad \frac{1-2i}{3+i} \quad (2) \quad \frac{2+i}{2-i} \quad (3) \quad \frac{(1-4i)(1-i)}{(1+i)^2}$$

Solution 4

1. $\dfrac{1-2i}{3+i} = \dfrac{(1-2i)(3+i)}{|3+i|^2} = \dfrac{5-5i}{3^2+1^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$
2. $\dfrac{2+i}{2-i} = \dfrac{(2+i)^2}{|2-i|^2} = \dfrac{3+4i}{2^2+1^2} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$
3. $\dfrac{(1-4i)(1-i)}{(1+i)^2} = \dfrac{(1-4i)(1-i)^3}{(|1+i|^2)^2} = \dfrac{-10+6i}{(1^2+1^2)^2} = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}i \quad (z^2\overline{z}^2 = z\overline{z}z\overline{z} = (z\overline{z})^2 = (|z|^2)^2)$

Exercice 5
On pose $z_1 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})}$ et $z_2 = \dfrac{i}{(2i\sqrt{3}-2)}$. Écrire sous forme algébrique z_1, z_2, z_1+z_2, z_1z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Solution 5

- $z_1 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^2}{\left|1-i\sqrt{3}\right|^2} = \dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{1^2+\sqrt{3}^2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
- $z_2 = \dfrac{i}{(2i\sqrt{3}-2)} = \dfrac{i}{2(-1+i\sqrt{3})} = \dfrac{i(-1-i\sqrt{3})}{2((-1)^2+\sqrt{3}^2)} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{1}{8}i$

4 Inégalité triangulaire

Remarque 2
Pour $z = a+ib \in \mathbb{C}$, on sait que $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. On a donc $|z|^2 \geqslant a^2 \Rightarrow |z| \geqslant \sqrt{a^2} = |a| \geqslant a$, ce qui peut également s'écrire $|z| \geqslant \operatorname{Re} z$. Regardons également dans quels cas on a égalité :

$$a = \sqrt{a^2+b^2} \text{si et seulement si } (a^2 = a^2+b^2 \text{ et } a \geqslant 0) \text{ si et seulement si } (a \geqslant 0 \text{ et } b = 0)$$

Par conséquent $|z| = \operatorname{Re} z$ si et seulement si $z = a \in \mathbb{R}$ et $a \geqslant 0$, donc si et seulement si $z \in \mathbb{R}^+$.

Théorème 1 (Inégalité triangulaire)
Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$$

avec égalité si et seulement si $z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+$.

Preuve :
On développe tout d'abord $|z+z'|^2$:

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2$$

On utilise ensuite le fait que $\operatorname{Re}(z\overline{z'}) \leqslant \left|z\overline{z'}\right| = |z|\,|z'|$:

$$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2\,|z|\,|z'| + |z'|^2 = (|z|+|z'|)^2$$

On en déduit que $0 \leqslant |z+z'|^2 \leqslant (|z|+|z'|)^2$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant définie et croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a donc l'inégalité :

$$|z+z'| = \sqrt{|z+z'|^2} \leqslant \sqrt{(|z|+|z'|)^2} = |z| + |z'|$$

De plus, on a égalité si et seulement si la majoration $\operatorname{Re}(z\overline{z'}) \leqslant \left|z\overline{z'}\right|$ est une égalité, donc si et seulement si $z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+$. ■

Remarque 3
Le cas d'égalité se traduit aussi par z et z' sont proportionnels et de même sens, autrement dit $z = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z' = \lambda z$.

Exercice 6
On suppose que $4z^4 = 1 + z + z^2 + z^3$. Montrer que $|z| \leqslant 1$ (indication : raisonner par l'absurde).

Solution 6
On suppose $|z| > 1$. On a alors $\left|z^k\right| = |z| \leqslant |z|^4$ pour $k \in \{0,1,2,3\}$. Ainsi :

$$\left|4z^4\right| \leqslant 1 + |z| + |z|^2 + |z|^3 \leqslant 4\,|z|^3$$

et on en déduit $|z| \leqslant 1$, d'où une contradiction.

Exercice 7
Montrer que si z est solution de $z^3 = pz + q$ (avec $p, q \in \mathbb{C}$), alors $|z| \leqslant 1$ ou $|z| < |p| + |q|$.

Solution 7
Supposons $|z| > 1$ et montrons que $|z| \leqslant |p| + |q|$. On écrit pour cela :

$$\left|z^3\right| = |pz + q| \leqslant |p|\,|z| + |p| < |p|\,|z| + |q|\,|z|$$

car $|z| > 1$, donc $|q| < |q|\,|z|$. On a alors $\left|z^2\right| < |p| + |q|$, d'où $|z| \leqslant |z|^2 \leqslant |p| + |q|$.

Proposition 5
Quels que soient $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$$

Preuve :
Comme $z = z - z' + z'$ et $z' = z' - z + z$, on a :

$$|z| = |z - z' + z'| \leqslant |z - z'| + |z'|\,|z'| = |z' - z + z| \leqslant |z' - z| + |z|$$

d'où l'on déduit $|z| - |z'| \leqslant |z - z'|$ et $|z'| - |z| \leqslant |z - z'|$ et ainsi :

$$||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$$

■

5 Sommes et produits

Soient $a_p, a_{p+1}, .., a_{n-1}, a_n$ des complexes, on définit les symboles $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k$ et $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} a_k$ par les deux formules suivantes :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n \qquad \prod_{k=p}^{n} a_n = a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_{n-1} \times a_n$$

Proposition 6
Soient $a_p, a_{p+1}, .., a_{n-1}, a_n$ et $b_p, b_{p+1}, .., b_{n-1}, b_n$ des nombres (réels ou complexes) et soit λ une constante (réelle ou complexe). On a la

- *linéarité du symbole somme*
$$\sum_{k=p}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k \qquad \sum_{k=p}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=p}^{n} a_k$$
- *relation de Chasles*
$$\forall s \in [\![p, n]\!], \quad \sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{n} a_k$$
- *Changement de variable :*
$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p+1}^{n+1} a_{k-1} = \sum_{k=p+q}^{n+q} a_{k-q}$$
- *Télescopage (ou principe des dominos)*
$$\sum_{k=p}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = a_n - a_p$$

Preuve :
Démontrons simplement le dernier point. On a :

$$\sum_{k=p}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=p}^{n-1} a_{k+1} - \sum_{k=p}^{n-1} a_k = \sum_{k=p+1}^{n} a_k - \sum_{k=p}^{n-1} a_k = a_n - a_p$$

■

Exemple 1
Montrons par récurrence que, quel que soit $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On pose $\mathcal{H}_n : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Initialisation $n = 1$. $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$ et $\frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = 1$ donc $\mathcal{H}_1$ est vraie
Hérédité : Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{n+1}{6}(n(2n+1)+6(n+1))\end{aligned}$$

Or $(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6 = n(2n+1)+6(n+1)$, donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

Exemple 2
En remarquant que $\forall k \geqslant 1$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, calculer, pour $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Exemple 3
En calculant de deux façons différentes $\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3]$, obtenir la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exemple 4
On écrit tout d'abord :

$$(k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^3 - k^3] &= (n+1)^3 \\ \sum_{k=0}^{n}[(k+1)^3 - k^3] &= \sum_{k=0}^{n}(3k^2+3k+1) = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1\end{aligned}$$

On trouve donc finalement :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)\right) = \frac{n+1}{6}(2(n+1)^2 - 3n - 2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 8
Simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n} k \times k!$ (indication : $k = (k+1) - 1$).

correction 1
On a :

$$\sum_{k=0}^{n} k \times k! = \sum_{k=0}^{n}((k+1)\times k! - k!) = \sum_{k=0}^{n}(k+1! - k!) = (n+1)! - 0! = (n+1)! - 1$$

On a des règles semblables avec les produits, mais il faut faire attention.

Proposition 7
Soient $a_p, a_{p+1}, .., a_{n-1}, a_n$ et $b_p, b_{p+1}, .., b_{n-1}, b_n$ des nombres (réels ou complexes) et soit λ une constante (réelle ou complexe). On a la

- *multiplicativité du symbole produit*

$$\prod_{k=p}^{n}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=p}^{n} b_k\right) \quad \prod_{k=p}^{n}(\lambda a_k) = \lambda^{n-p+1}\prod_{k=p}^{n} a_k$$

- *relation de Chasles*

$$\forall s \in [\![p, n]\!], \quad \prod_{k=p}^{n} a_k = \left(\prod_{k=p}^{s} a_k\right)\left(\prod_{k=s+1}^{n} a_k\right)$$

- *Changement de variable :*

$$\prod_{k=p}^{n} a_k = \prod_{k=p+1}^{n+1} a_{k-1} = \prod_{k=p+q}^{n+q} a_{k-q}$$

- *Télescopage (ou principe des dominos) sous l'hypothèse que tous les complexes $a_p, .., a_n$ soient non nuls*

$$\prod_{k=p}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_p}$$

6 Exponentielle

6.1 Nombres complexes de module 1

Notation 2
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = 1$.

Proposition 8
Pour $z, z' \in \mathbb{U}$, on a $zz' \in \mathbb{U}$. De plus, z est non nul de sorte que $z^{-1} \in \mathbb{U}$ et $\overline{z} = z^{-1}$.

Nous montrons maintenant un lemme sur les fonctions trigonométriques que nous démontrons en utilisant des propriétés classiques de ces fonctions.

Lemme 1
Si a et b sont des réels tels que $a^2 + b^2 = 1$, alors il existe un réel θ, unique à 2π près, tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$.

Preuve :
On commence par montrer qu'il existe $\phi \in [0, \pi]$ tel que $\cos\phi = a$. On sait en effet que la fonction cos est dérivable sur $[0, \pi]$ et que sa dérivée est la fonction sin, positive sur $[0, \pi]$ et s'annulant uniquement en 0 et en π sur cet intervalle. Par conséquent, cos est strictement croissante et continue sur $[0, \pi]$ donc elle réalise donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Puisque $a^2 + b^2 = 1$, on a $a, b \in [-1, 1]$. Il existe par conséquent $\phi \in [0, \pi]$ tel que $\cos\phi = a$. Pour trouver θ, on remarque que $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$, donc $\sin^2\phi = 1 - \cos^2\phi = 1 - a^2 = b^2$ et $\sin\phi = \pm b$. Si $\sin\phi = b$, on pose $\theta = \phi$ et si $\sin\phi = -b$, on pose $\theta = -\phi$, de sorte que $\cos\theta = \cos\phi = a$ et $\sin\theta = b$. Supposons maintenant que θ et θ' conviennent, autrement dit, supposons $a = \cos\theta = \cos\theta'$ et $b = \sin\theta = \sin\theta'$. La première équation donne $\theta' = \theta + 2k\pi$ ou $\theta' = -\theta + 2k\pi$. Dans le premier cas, on a directement la réponse voulue. Il reste donc à examiner le second. Supposons donc que $\theta' = -\theta + 2k\pi$, on aurait alors $\sin\theta' = -\sin\theta$, d'où $\sin\theta = \sin\theta' = b = 0$ et par conséquent $a = 1$. Dans ce cas, on a $\theta = k\pi$ et $\theta' = k'\pi$ et $\cos\theta = (-1)^k$ et $\cos\theta' = (-1)^{k'}$. Comme on doit avoir $a = \cos\theta = \cos\theta'$, on en déduit que k et k' sont de même parité, donc que $k - k'$ est pair. Par conséquent, θ et θ' sont égaux à 2π près. ■

Corollaire 1
Pour $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près, tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

6.2 Exponentielle complexe

Définition 2
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$.

Remarque 4
Cette définition est motivée par le fait que la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + i\sin x$ possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f'(x) &= \alpha f(x) \\ f(0) &= 1 \end{cases}$$

où on a posé $\alpha = i$. On sait que, lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$, cette équation différentielle avec condition initiale admet pour unique solution la fonction f définie par $f(x) = e^{\alpha x}$. La définition précédente permet d'étendre ceci au cas où α est complexe. Notons qu'avec les formules d'addition des fonctions sin et cos on a également :

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

Proposition 9
Tout nombre complexe $u \in \mathbb{U}$ peut s'écrire sous la forme $u = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Ce réel θ est unique à 2π près.

Proposition 10
Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}, \quad (e^{i\theta})^{-1} = \overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}, \quad (e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$$

Par ailleurs, les nombres complexes $e^{i\theta}$ et $e^{i\theta'}$ sont égaux si et seulement si les réels θ et θ' sont égaux à 2π près.

Proposition 11 (Formules de Moivre et d'Euler)
Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta), \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$$

La première formule est appelée formule de Moivre et les suivantes sont les formules d'Euler.

Exercice 9
Montrer que $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1+e^{-i\theta}} = e^{i\theta}$ lorsque $\theta \neq \pi \bmod 2\pi$.

Solution 8

$$\frac{1+e^{i\theta}}{1+e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}} = e^{i\theta}$$

6.3 Argument

Définition 3
Si z est un nombre complexe non nul, alors $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1. On appelle argument de z tout réel θ tel que :

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$$

(ainsi, tous les arguments de z sont égaux à 2π près). La notation $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |z| > 0$ et θ un argument de z est appelée forme trigonométrique du nombre complexe z.

Notation 3
Afin d'exprimer plus simplement les propriétés des arguments, nous allons définir une notation pour exprimer que deux réels θ et θ' sont égaux à 2π près. Nous écrirons donc $\theta \equiv \theta' \bmod[2\pi]$. Le plus simple pour manipuler une telle relation sera de revenir à la définition : $\theta \equiv \theta' \bmod[2\pi]$ si et seulement si il existe un entier k tel que $\theta = \theta' + 2k\pi$.

Proposition 12
Quels que soient $z, z' \in \mathbb{C}^\times$ on a :

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \bmod 2\pi \quad \arg(z^{-1}) = -\arg z \bmod 2\pi$$

Méthode 1 (Formes algébrique et exponentielle)
Soit z un complexe non nul.

1. *Si l'on possède son écriture exponentielle $z = \rho e^{i\theta}$, on en déduit immédiatement son écriture algébrique*

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \underbrace{\rho\cos\theta}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\rho\sin\theta}_{\in\mathbb{R}}$$

2. *Si l'on possède son écriture algébrique, $z = a + ib$, avec a et b deux réels et que l'on désire déterminer son écriture exponentielle $z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, on commence par remarquer $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (par construction de l'écriture exponentielle). Pour passer de la forme algébrique à la forme exponentielle d'un nombre complexe $z = a+ib$, on peut, dans le cas où z est non nul, factoriser le module de z en écrivant :*

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

puis tenter de reconnaître dans les réels $\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ le cosinus et le sinus d'un même angle θ (nous définirons dans le chapitre suivant des fonctions permettant de retrouver un angle à partir du cosinus et du sinus).
Notons finalement que la notation algébrique est plus adaptée à des problèmes de type additif, tandis que la notation exponentielle est utilisée le plus souvent pour traiter des problèmes multiplicatifs.

Exercice 10
Mettre sous forme exponentielle $1 + \sqrt{3}i$ et $\sqrt{3} - 3i$.

Solution 9
$\left|1 + i\sqrt{3}\right| = 2$ donc $1 + \sqrt{3}i = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\pi/3}$

$\left|\sqrt{3} - 3i\right| = 2\sqrt{3}$ donc $\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left[-\dfrac{\pi}{3}\right] + i\sin\left[-\dfrac{\pi}{3}\right]\right) = 2\sqrt{3}e^{-i\pi/3}$

Exercice 11
Mettre sous forme algébrique $2e^{i\pi/4}$ et $-e^{2i\pi/3}$.

Solution 10
$2e^{i\pi/4} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i.$

$-e^{2i\pi/3} = -\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Exercice 12
Donner le module et un argument de $-2e^{i\pi/8}$.

Solution 11
$\underbrace{-2}_{\in\mathbb{R}_-^\times} e^{i\pi/8} = 2e^{i\pi}e^{i\pi/8} = 2e^{i(\pi+\pi/8)} = \underbrace{2}_{\in\mathbb{R}_+^\times} e^{i9\pi/9}$ donc le module est 2 et un argument est $\dfrac{9\pi}{8}$.

Exercice 13
Calculer :

$$(1)\quad (1-i)^6 \quad (2)\quad (1+i)^7 \quad (3)\quad (1+\sqrt{3}i)^{33}$$

Solution 12
Dans le cas présent, la forme algébrique est particulièrement lourde. Cherchons la forme polaire de $1 - i$ et $1 + i$. Le module de $1 - i$ vaut $\sqrt{2}$ et

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left[-\frac{\pi}{4}\right] + i\sin\left[-\frac{\pi}{4}\right]\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

Il est alors immédiat que

$$\begin{aligned}
(1-i)^6 &= \left[\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right]^6 = \sqrt{2}^6 e^{-i6\pi/4} = 2^3 e^{-i3\pi/2} = 8(-i) = -8i \\
(1+i)^7 &= (\overline{1-i})^7 = \overline{(1-i)^7} = \overline{(1-i)^6(1-i)} = \overline{(-8i)(1-i)} = \overline{-8i-8} = -8+8i
\end{aligned}$$

Le module $1 + \sqrt{3}i$ vaut 2 et

$$1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{i\pi/3}$$

donc

$$(1+\sqrt{3}i)^{33} = \left(2e^{i\pi/3}\right)^{33} = 2^{33}e^{11i\pi} = 2^{33}e^{i\pi} = -2^{33}$$

7 Résolution d'équations

7.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 4
On appelle racine carrée d'un complexe z toute solution de l'équation $w^2 = z$.

Proposition 13 (Racines carrées)
Un nombre complexe non nul z possède deux racines carrées, distinctes et opposées. Si on écrit sous forme exponentielle $z = \rho e^{i\theta}$, ces racines sont $\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$ (ou, de manière équivalente, $\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $\sqrt{\rho}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$).

Preuve :
Soit $z \in \mathbb{C}^{\times}$, noté sous la forme $z = |z|\, e^{i\theta}$. Les racines carrées de z sont nécessairement non nulle, on les cherche donc sous la forme $\rho e^{i\phi}$ (avec $\rho \in \mathbb{R}^{+\times}$). De $(\rho e^{i\phi})^2 = \rho^2 e^{2i\phi} = |z|\, e^{i\theta}$, on déduit :

$$\rho^2 = |z|\,, \quad 2\phi = \theta \operatorname{mod}[2\pi]$$

Comme ρ et $|z|$ sont positifs, on doit avoir $\rho = \sqrt{|z|}$. Par ailleurs, la deuxième équation s'écrit $2\phi = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, autrement dit $\phi = \dfrac{\theta}{2} + k\pi$. Les réels ϕ qui conviennent sont donc congrus à $\dfrac{\theta}{2}$ modulo π, autrement dit congrus à $\dfrac{\theta}{2}$ ou $\dfrac{\theta}{2} + \pi$ modulo 2π. ■

Remarque 5 (Z)
Il n'y a pas, dans $\mathbb{C}$, de notation particulière pour les racines carrées (on ne saurait d'ailleurs pas choisir *a priori* une des deux racines).

Méthode 2 (Calcul des racines carrées)
Si le nombre complexe considéré est noté sous forme exponentielle, il suffit d'appliquer le résultat de la proposition précédente. Si $z = a + ib$ est sous forme algébrique, on cherche une racine carrée ω de z sous forme algébrique également, $\omega = x + iy$. L'équation $\omega^2 = z$ conduit à :

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b.$$

Il est possible de résoudre directement ce système mais on préfère en général utiliser une troisième équation obtenue en écrivant que $|\omega|^2 = |z|$, d'où l'équation :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

On obtient ainsi un système de deux équations en les deux inconnues x^2 et y^2 $\begin{cases} x^2 + y^2 &= \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2 - y^2 &= a \end{cases}$. Ceci nous fournit un seul choix pour le couple (x^2, y^2) donc, en général, 2 possibilités pour x et 2 pour y soit 4 possibilités pour le couple (x, y). En y ajoutant la contrainte supplémentaire $2xy = b$, on voit qu'en général, il ne reste que 2 possibilités pour le couple (x, y), ce qui est logique puisqu'en général, un complexe admet deux racines carrées.

Remarque 6 (Z)
Dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas de choix préférentiel pour sélectionner une racine carrée plutôt qu'une autre, contrairement à $\mathbb{R}$ (il n'y a pas de notion de signe satisfaisante dans $\mathbb{C}$). En particulier, la notation $\sqrt{z}$ sera à proscrire dans $\mathbb{C}$ puisqu'elle ne saurait rien définir.

Exercice 14
Déterminer les racines carrées de i, $-7 - 24i$ et $-2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Solution 13
$i = (\pm e^{i\frac{\pi}{4}})^2 = \left(\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad -7 - 24i = (\pm(3-4i))^2, \quad -2e^{i\pi/6} = 2e^{7i\pi/6} = (\pm\sqrt{2}e^{7i\pi/12})^2$

7.2 Équations du second degré

Proposition 14 (Équation du second degré dans $\mathbb{C}$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. L'équation du second degré :

$$az^2 + bz + c = 0$$

est équivalente à l'équation :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Si on désigne par δ une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$, alors les solutions de cette équations sont :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

Ces racines sont confondues si et seulement si $\Delta = 0$ (on dit alors que l'équation possède une racine double).

Remarque 7 (Z)
Notons que les coefficients a, b, c sont ici des nombres complexes. Les solutions de l'équation, même si elles sont complexes et distinctes, ne sont en général pas conjuguées (elles le sont si les coefficients a, b, c sont réels).

Exercice 15
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1-i)z + 4 + 7i = 0$.

Solution 14
Le discriminant Δ vaut $-16 - 30i = (3-5i)^2$ de sorte que les solutions sont :

$$z_0 = -2 + 3i, \quad z_1 = 1 - 2i$$

Remarque 8 (Z)
Ces formules ne s'appliquent pas lorsque $a = 0$ et il n'est pas possible dans ce cas de raisonner sur le discriminant.

Exercice 16
Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation $m^2x^2 + 2x + 1 = 0$ n'admet qu'une seule solution.

Solution 15
Le discriminant réduit est $\delta = 1 - m^2 = (1-m)(1+m)$ et est nul si et seulement si $m = \pm 1$. Dans ce cas, l'équation est du second degré et n'admet qu'une solution. Ceci n'est valable que pour $m \neq 0$, *i.e.* lorsque l''équation est de degré 2. Si $m = 0$, l'équation est $2x + 1 = 0$ qui admet pour unique solution $x = -\frac{1}{2}$. Par conséquent, les valeurs de m qui conviennent sont 0 et ± 1.

Proposition 15 (Somme et produit des racines)
Soient $s, p \in \mathbb{C}$, on a équivalence entre :

1. *z_1 et z_2 sont solutions du système :*
$$\begin{cases} z_1 + z_2 &= s \\ z_1 z_2 &= p \end{cases}$$
2. *z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $z^2 - sz + p = 0$.*

Exercice 17
Trouver les nombres complexes x et y tels que $x + y = 2 + 3i$ et $xy = -1 + 3i$.

Solution 16
Il suffit de résoudre l'équation $z^2 - (2+3i)z + (-1+3i) = 0$. Son discriminant Δ vaut $-1 = i^2$ et ses racines sont :

$$z_0 = 1 + 2i, \quad z_1 = 1 + i$$

7.3 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Proposition 16 (Racines n-ièmes)
Soit $n \geqslant 1$. Tout nombre complexe z non nul possède n racines n-ièmes distinctes. Si on note sous forme exponentielle $z = \rho e^{i\theta}$, ces racines sont les éléments de l'ensemble :

$$\left\{ \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad | \quad k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}$$

Preuve :
On cherche les racines n-ièmes de z sous la forme $z' = \rho e^{i\phi}$. On doit donc avoir :

$$\rho^n = |z|\,, \quad n\phi = \theta \bmod 2\pi$$

Comme $|z|$ est strictement positif et que ρ doit également l'être, l'unique solution de la première équation est donnée par $\rho = \sqrt[n]{|z|}$. La seconde équation est équivalente à :

$$\exists k \in \mathbb{Z}. \quad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

ϕ doit donc être congru à $\dfrac{\theta}{n}$ modulo $\dfrac{2\pi}{n}$, autrement dit, ϕ doit être congru à l'un des nombres :

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

modulo 2π. Les n racines n-ièmes de z sont donc les éléments de l'ensemble :

$$\left\{ \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad | \quad k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}$$

■

Exercice 18
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$$(1) \quad z^3 = \frac{i-1}{4} \qquad (2) \quad z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

Remarque 9
Si z_0 est une racine n-ième de $z \in \mathbb{C}^\times$, alors pour toute autre racine n-ième z' de z, on a :

$$\left(\frac{z'}{z_0}\right)^n = \frac{(z')^n}{z_0^n} = 1$$

et par conséquent, $\dfrac{z'}{z_0}$ est une racine n-ième de 1 et tout racine n-ième de z peut s'écrire ωz_0 où ω est une racine n-ième de 1. Ceci justifie une étude plus approfondie des racines n-ièmes de 1.

7.4 Racines n-ièmes de l'unité

Notation 4
Pour $n \geqslant 1$, on note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de 1. D'après ce qui précède, cet ensemble est de cardinal n et s'écrit :

$$\mathbb{U}_n = \{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad | \quad k \in \{0, \ldots, n_1\}\}$$

Exercice 19
Décrire (en donnant leurs éléments sous forme algébrique puis exponentielle) les ensembles $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_4$.

Solution 17

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_2 &= \{1, -1\} = \{1, e^{i\pi}\} \\
\mathbb{U}_3 &= \{1, e^{2i\frac{\pi}{3}}, e^{-2i\frac{\pi}{3}}\} = \{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\} \\
\mathbb{U}_4 &= \{1, i, -1, -i\} = \{1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{3i\frac{\pi}{4}}\}
\end{aligned}$$

Proposition 17
Soit $n \geqslant 1$, on a les résultats suivants :

1. *L'ensemble $\mathbb{U}_n$ est contenu dans $\mathbb{U}$;*
2. *Si $z, z' \in \mathbb{U}_n$, alors $zz', \overline{z}, \dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$;*
3. *Si $z_0 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors on peut écrire :*

$$\mathbb{U}_n = \{z_0^k \quad | \quad k \in \{0, \dots, n-1\}\}, \quad \sum_{k=0}^{n} z_0^k = 0$$

(la deuxième égalité n'étant valable que pour $n \geqslant 2$).

Preuve :
Pour le quatrième point, notons que $z_0 \neq 1$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n} z_0^k = \frac{1 - z_0^n}{1 - z_0} = 0$$

■

Méthode 3 (Résoudre une équation polynomiale dans $\mathbb{C}$)
Les différentes équations polynomiales qu'il faut savoir résoudre :

- *les équations du premier degré $az + b = 0$: si $a \neq 0$, cette équation admet un unique solution $z = -\dfrac{b}{a}$. Dans le cas où $a = 0$, alors soit il n'y a aucune solution (si $b \neq 0$) soit tout nombre complexe est solution (si $b = 0$);*
- *les équations du second degré $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$: on applique les résultats classiques. Notons que lorsque l'équation est de la forme $az^2 + 2b'z + c = 0$, il est possible d'utiliser le discriminant réduit $\delta = {b'}^2 - ac$ et les solutions sont alors $\dfrac{(-b' - \omega)}{a}$ et $\dfrac{(-b' + \omega)}{a}$ où ω est une racine carrée de δ;*
- *les équations de la forme $z^n = a$: si $a = 0$ alors la seule solution est $z = 0$. Sinon, on désigne par a_0 une racine n-ième de a et les solutions de cette équation sont alors les nombres complexes $a_0\omega$ où ω est une racine n-ième de l'unité.*

Remarque 10
Ces cas sont les seuls pour lesquels il y ait une méthode générale à connaître. Notons qu'il existe des formules analogues à celles permettant de résoudre les équations de degré 2 pour les équations de degré 3 ou 4 mais elles sont peu utilisées en pratiques. Au delà du degré 5, il n'y a plus de formules générales.

Méthode 4 (Résoudre une équation de degré $n \geqslant 3$)
Plusieurs cas sont envisageables :

- *l'équation est bicarrée, autrement dit de la forme $az^4 + bz^2 + c = 0$ avec $a \neq 0$. On pose alors $Z = z^2$ et on résout l'équation $aZ^2 + bZ + c = 0$ ce qui donne deux solutions, éventuellement confondues, Z_1 et Z_2. Les solutions de l'équation de départ sont alors les racines carrées de Z_1 et Z_2;*
- *l'équation possède une racine évidente z_0. On met alors $z - z_0$ en facteur dans l'équation, de manière à obtenir une équation de degré inférieur, que l'on résout avec les techniques habituelles;*
- *on sait par ailleurs que l'équation possède une racine réelle (ou imaginaire pure) : on détermine cette racine particulière puis on factorise de la même manière que pour une racine évidente.*

Exercice 20
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 8(1+i)z^2 + 16i - 12 = 0$.

Solution 18
On commence par poser $Z = z^2$ et on résout $Z^2 - 8(1+i)Z + 16i - 12 = 0$. On trouve :

$$Z_0 = 2i, \quad Z_1 = 8 + 6i$$

Les solutions de l'équation de départ sont les racines carrées de Z_0 et Z_1, on trouve :

$$z_0 = 1 + i, \quad z_1 = -1 - i, \quad z_2 = 3 + i, \quad z_4 = -3i$$

Exercice 21
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^3 - (3+4i)z^2 - (4-7i)z + 4 + 2i = 0$ en supposant qu'elle possède une racine réelle.

Solution 19
Une racine réelle λ de cette équation doit vérifier $-4\lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0$. on trouve donc $\lambda = 2$ ou $\lambda = \frac{1}{4}$. Comme λ doit également vérifier $2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, on a finalement $z_0 = \lambda = 2$. On factorise ensuite :

$$2z^3 - (3+4i)z^2 - (4-7i)z + 4 + 2i = (z-2)(2z^2 + (1-4i)z - 2 - i)$$

Les racines de l'équation du second degré obtenue sont :

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i, \quad z_2 = i$$

Exercice 22
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$).

Solution 20
Comme $z = 1$ n'est visiblement pas solution de cette équation, on peut écrire :

$$(z+1)^n = (z-1)^n \text{si et seulement si } \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \text{ si et seulement si } \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n \in \mathbb{U}_n$$

Ainsi, z est solution de l'équation proposée si et seulement si il est possible d'écrire $\frac{(z+1)}{(z-1)} = \omega$ avec $\omega = e^{2i\frac{k\pi}{n}}$ et $k \in \{0, \dots, n-1\}$. On peut en fait même supposer $k \neq 0$ (autrement dit $\omega \neq 1$) car il est impossible d'avoir $z + 1 = z - 1$. On écrit ensuite :

$$\frac{z+1}{z-1} = \omega \text{si et seulement si } z + 1 = \omega z - \omega \text{si et seulement si } z(1-\omega) = -\omega - 1 \text{ si et seulement si } z = \frac{\omega+1}{\omega-1}$$

Les solutions s'écrivent alors :

$$z = \frac{e^{2ik\frac{\pi}{n}} + 1}{e^{2ik\frac{\pi}{n}} - 1} = \frac{e^{ik\frac{\pi}{n}}}{e^{ik\frac{\pi}{n}}} \times \frac{e^{ik\frac{\pi}{n}} + e^{-ik\frac{\pi}{n}}}{e^{ik\frac{\pi}{n}} - e^{-ik\frac{\pi}{n}}} = \frac{2\cos(\frac{k\pi}{n})}{2i\sin(\frac{k\pi}{n})} = -i\frac{\cos(\frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})}$$

8 Application à la trigonométrie

8.1 Binôme de Newton

Notation 5
Pour $n \geqslant 0$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, la notation $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de parties à k éléments dans un ensemble de n éléments (appelé aussi coefficient binômial). Rappelons que :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Proposition 18 (Relation de Pascal)
Pour $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Preuve :
On utilise la formule donnée plus haut :

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!k + (n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

■

Remarque 11
Compte tenu du fait que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$ quel que soit n, cette relation permet de calculer les $\binom{n}{k}$ connaissant les $\binom{n-1}{k}$ en utilisant le triangle de pascal :

$$
\begin{array}{rr|ccccccc}
 & & & & (k-1) & (k) & & & \\
 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
\hline
 & 0 & 1 & & & & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & & & & & \\
 & 2 & 1 & 2 & 1 & & & & \\
 & 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
(n-1) & 4 & 1 & 4 & \boxed{6} & \boxed{4} & 1 & & \\
(n) & 5 & 1 & 5 & 10 & \boxed{10} & 5 & 1 & \\
 & \vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

Proposition 19 (Binôme de Newton)
Pour $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 0$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Preuve :
On procède par récurrence en posant $\mathcal{H}_n$: « $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ »

Initialisation $n = 0$. $(a+b)^0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{0} a^0 b^{0-0} = 1$ donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
Hérédité : Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

On fait le changement d'indice $k' = k+1$ dans la première somme :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} a^{k'} b^{n+1-k'} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Le nom de l'indice étant sans importance, on peut remplacer k' par k dans la première somme. On isole ensuite $k = n+1$ dans cette somme et $k = 0$ dans la seconde :

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}$$

Tenant compte du fait que $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ et regroupant les deux sommes, il vient :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$$

Ensuite, on écrit $1 = \binom{n+1}{n+1} = \binom{n+1}{0}$ et on rappelle la formule du triangle de Pascal $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$, on a alors :

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

ce qui démontre $\mathcal{H}_{n+1}$ et achève la récurrence. ■

8.2 Linéarisation de $\cos^n\theta\sin^m\theta$

Exemple 5
Linéarisons $\cos^3\theta\sin^2\theta$:

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta\sin^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2\\
&= \frac{1}{2^5i^2}(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta})(e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta})\\
&= \frac{1}{2^5i^2}\Big(\ e^{5i\theta}-2e^{3i\theta}+e^{i\theta}+3e^{3i\theta}-6e^{i\theta}+3e^{-i\theta}\\
&\qquad +3e^{i\theta}-6e^{-i\theta}+3e^{-3i\theta}+e^{-i\theta}-2e^{-3i\theta}+e^{-5i\theta}\ \Big)\\
&= \frac{1}{2^5i^2}(e^{5i\theta}+e^{-5i\theta}+e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}-2e^{i\theta}-2e^{-i\theta})\\
&= \frac{1}{2^4i^2}(\cos(5\theta)+\cos(3\theta)-2\cos\theta)\\
&= \frac{1}{16}(2\cos\theta-\cos(3\theta)-\cos(5\theta))
\end{aligned}$$

8.3 Développement de $\cos(n\theta),\sin(n\theta)$

Exemple 6
Développons $\cos(4\theta)$:

$$\begin{aligned}
\cos(4\theta)+i\sin(4\theta) &= (\cos\theta+i\sin\theta)^4\\
&= \cos^4\theta+4i\cos^3\theta\sin\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta-4i\cos\theta\sin^3\theta+\sin^4\theta\\
&= (\cos^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta)+4i(\cos^3\theta\sin\theta-\cos\theta\sin^3\theta)
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos(4\theta) &= \cos^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta\\
\sin(4\theta) &= 4(\cos^3\theta\sin\theta-\cos\theta\sin^3\theta)
\end{aligned}$$

On obtient un développement de $\tan(4\theta)$ en divisant les deux expressions obtenues, puis en divisant numérateur et dénominateur par $\cos^4\theta$:

$$\tan(4\theta)=\frac{\sin(4\theta)}{\cos(4\theta)}=\frac{1}{4}\times\frac{\cos^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta}{\cos^3\theta\sin\theta-\cos\theta\sin^3\theta}=\frac{1}{4}\times\frac{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}{\tan\theta-\tan^3\theta}$$

Méthode 5 (Linéarisations et développements)

- *Pour linéariser $\cos^n\theta\sin^m\theta$ avec $n\geqslant 0$ et $m\geqslant 0$ (éventuellement $n=0$ ou $m=0$), on commence par écrire écrire $\cos\theta$ et $\sin\theta$ au moyen des formules d'Euler, ce qui donne :*

$$\cos^n\theta\sin^m\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^m=\frac{1}{2^n2^mi^m}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^m$$

  On développe ensuite $(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n$ et $(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^m$ en utilisant le binôme de Newton, on effectue le produit puis on regroupe les termes de la forme $e^{ik\theta}$ et $e^{-ik\theta}$ de manière à former des termes en $\cos(k\theta)$ ou $\sin(k\theta)$.

- *Pour développer $\cos(n\theta)$, on utilise tout d'abord la formule de Moivre :*

$$\cos(n\theta)=\mathrm{Re}(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))=\mathrm{Re}((\cos\theta+i\sin\theta)^n)$$

  On développe alors le membre de droite à l'aide du binôme de Newton puis on en extrait la partie réelle. On procède de même pour développer $\sin(k\theta)$.

Exercice 23
Linéariser $\cos\theta\sin^2\theta$. Développer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$.

Solution 21
On trouve :

$$\cos\theta\sin^2\theta=\frac{\cos\theta-\cos(3\theta)}{4},\quad \cos(3\theta)=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta,\quad \sin(3\theta)=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$$

9 Applications géométriques

Par rapport à un passage en coordonnées cartésiennes, l'utilisation des nombres complexes permet d'utiliser toute la puissance de la structure de corps définie sur $\mathbb{C}$ (en quelque sorte, on peut, à l'aide des nombres complexes, diviser des vecteurs du plan). C'est particulièrement flagrant pour les considérations géométriques qui concernent les angles. Dans tout ce qui suit, on suppose que le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}))$.

9.1 Interprétation géométriques des différentes opérations

Il est naturel de vouloir interpréter un nombre complexe $z = x + iy$, c'est à dire un couple (x, y) de réels, comme un point du plan. Notons que ceci ne peut se faire que si on a, au préalable, fixé un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, que nous supposerons orthonormé et direct. On peut alors établir une bijection entre nombre complexes et points du plan en associant à chaque nombre complexe $z = x + iy$ le point M tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ (on dira que le nombre complexe z est l'affixe du point M).
Regardons tout d'abord comment agit l'addition d'un nombre complexe $t = a + ib$. Partant d'un nombre complexe z, associé au point M, on obtient le nombre complexe $z' = z + t$ associé au point M'. On a alors $\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$, autrement dit ajouter t correspond, dans le plan, à réaliser une translation de vecteur $a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$.

La multiplication complexe est un peu plus difficile à interpréter géométriquement. Commençons donc par traiter deux cas particuliers : la multiplication par un nombre réel et la multiplication par i. Si l'on multiplie un nombre complexe z par un nombre réel λ, alors le point M d'affixe z est envoyé sur le point M' d'affixe λz, de sorte que $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$. Autrement dit la multiplication d'un nombre complexe par $\lambda \in \mathbb{R}$ agit comme une homothétie de rapport λ et de contre O sur les points. Si l'on multiplie $z = x + iy$ par le nombre complexe i, on obtient le nombre complexe $z' = iz = -y + ix$ et le point M' associé à z' est tel que $\overrightarrow{OM'} = -y\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{i}$. Le point M' se déduit donc de M par la rotation d'un quart de tour dans le sens direct et de centre O. On en déduit que la multiplication d'un nombre complexe par i agit comme une rotation de centre O et d'un quart de tour dans le sens direct. Plus généralement, la multiplication par un nombre complexe noté sous forme exponentielle $\rho e^{-i\theta}$ s'interprète géométriquement comme une rotation de centre O et d'angle θ suivie d'une homothétie de centre O et de rapport ρ.

9.2 Distances et angles

Au module des nombres complexes correspond bien évidemment la norme des vecteurs du plan et si M est un point du plan d'affixe z, alors $|z|$ représente la distance du point M à l'origine du repère. L'inégalité triangulaire s'interprète particulièrement bien dans ce contexte, puisqu'elle correspond à l'inégalité naturelle $OM \leqslant OM' + M'M$. Si M est un point du plan d'affixe z, alors un argument de z s'interprète géométriquement comme une mesure de l'angle orienté entre le vecteur $\overrightarrow{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Proposition 20
Soient A, B et C trois points distincts, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. On note $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ une mesure de l'angle orienté entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On a alors :

$$\begin{aligned} AB &= |z_A - z_B| \\ (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) &\equiv \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \bmod[2\pi] \equiv \arg((z_C - z_A)\overline{(z_B - z_A)}) \bmod[2\pi] \end{aligned}$$

Remarque 12
On en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (respectivement orthogonaux) si et seulement si $(z_C - z_A)\overline{(z_B - z_A)}$ est réel (respectivement imaginaire pur).

9.3 Similitudes directes

Une fois fixé un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, il est possible de faire correspondre à toute transformation du plan une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Parmi ces applications, les similitudes directes jouent un rôle particulier. Une similitude directe est une application du plan correspondant à une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \mapsto & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az + b \end{array}$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. Nous allons montrer qu'une telle application peut toujours s'écrire comme composée de transformations plus simples (translations, homothéties et rotations).

Proposition 21
Une similitude directe conserve les rapports de longueur ainsi que les angles orientés.

Théorème 2 (Classification des similitudes directes)
On considère une similitude directe associée à l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \mapsto & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az+b \end{array}$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. Alors :

- *Si $a = 1$, la similitude est la translation de vecteur d'affixe b;*
- *Si $a \neq 1$, la similitude possède un unique point fixe Ω qui est le point d'affixe $\dfrac{b}{(1-a)}$ et la similitude est la composée de la rotation de centre Ω et d'angle $\arg a$ par l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.*

Preuve :
L'application f admet ω pour point fixe si et seulement si $f(\omega) = \omega$, autrement dit si et seulement si ω est solution de l'équation :

$$a\omega + b = \omega \quad \text{si et seulement si} \quad (1-a)\omega = b$$

Donc si $a \neq 1$, f admet pour unique point fixe $\omega = \dfrac{b}{(1-a)}$. On a alors pour $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) - \omega = az + b - a\omega - b = a(z - \omega)$$

Ceci fournit une autre écriture pour f :

$$f(z) = a(z - \omega) + \omega$$

Or le vecteur d'affixe $a(z-\omega)$ se déduit du vecteur d'affixe $z - \omega$ par une rotation d'angle $\arg a$ suive d'une multiplication par $|a|$. On en déduit que la transformation considérée est la composée de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle $\arg a$ par l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$. Si maintenant $a = 1$, alors la transformation associe au point d'affixe z le point d'affixe $z + b$. Ce point se déduit du précédent par une translation de vecteur d'affixe b. ■

Remarque 13
On peut ainsi classifier les similitudes directes suivant leurs points fixes :

- si tout point est invariant, la similitude est l'identité (translation de vecteur nul);
- si il y a un seul point invariant, ce point est appelé centre de la similitude et celle-ci est la composée d'une rotation et d'une homothétie, toutes deux centrées sur ce point invariant;
- si il n'y a aucun point invariant, la similitude est une translation de vecteur non nul.

Exercice 24
Étudier la similitude directe $z \mapsto (1 + i\sqrt{3})z + 2 + i$.

Solution 22
Centre d'affixe $\dfrac{(2i-1)}{\sqrt{3}}$, angle $\dfrac{\pi}{3}$ et rapport 2.

9.4 Transformations $z \mapsto \overline{z}$ et $z \neq 0 \mapsto z^{-1}$

Proposition 22 (Application $z \mapsto \overline{z}$)
La transformation du plan correspondant à l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \mapsto & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array}$$

est la réflexion d'axe l'axe des abscisses.

Proposition 23 (Application $z \mapsto \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$)
La transformation du plan correspondant à l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \mapsto & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z}{|z|^2} \end{array}$$

associe à un point $M \neq 0$ l'unique point M' de la demi droite d'origine O passant par M tel que $OM \times OM' = 1$.

Preuve :
Le vecteur d'affixe z et $\dfrac{z}{|z|^2}$ sont colinéaires et de même sens puisque $|z|^2$ est strictement positif. Le point M' est donc situé sur la demi droite d'origine O passant par M. On remarque ensuite que :

$$OM \times OM' = |z| \left| \frac{z}{|z|^2} \right| = \left| \frac{z^2}{|z|^2} \right| = 1$$

d'où le résultat. ■

Proposition 24 (Application $z \mapsto z^{-1}$)
La transformation du plan correspondant à l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \mapsto & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^{-1} \end{array}$$

associe à un point $M \neq 0$ le point M', symétrique par rapport de l'axe des abscisses de l'unique point M'' de la demi droite d'origine O passant par M tel que $OM \times OM'' = 1$.

Preuve :
Il suffit de constater que l'application f est la composée des applications :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \mapsto & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z}{|z|^2} \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \mapsto & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z}{|z|^2} \end{array}$$

■

9.5 Deux exercices classiques

Exercice 25
Soient $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq b$ et $n \geqslant 2$. Résoudre $(z-a)^n = (z-b)^n$. Montrer que les solutions sont alignées.

Solution 23
Comme $z = b$ n'est pas solution, on a :

$$(z-a)^n = (z-b)^n \text{si et seulement si } \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n = 1 \text{si et seulement si } \frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{U}_n$$

On peut donc écrire $\dfrac{(z-a)}{(z-b)} = \omega$ avec $\omega \in \mathbb{U}_n$ et $\omega \neq 1$. On en déduit que les solutions sont les nombres complexes :

$$z = \frac{a - b\omega}{1-\omega}$$

où $\omega \in \mathbb{U}_n$, $\omega \neq 1$. Écrivons $\omega = e^{\dfrac{2ik\pi}{n}}$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $\theta = \dfrac{k\pi}{n}$, alors :

$$\begin{aligned} z = \frac{a - be^{2i\theta}}{1 - e^{2i\theta}} &= \frac{ae^{-i\theta} - be^{i\theta}}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} = \frac{1}{-2i\sin\theta}(a\cos\theta - ia\sin\theta - b\cos\theta - ib\sin\theta) \\ &= \operatorname{cotan}\theta \frac{i(a-b)}{2} + \frac{a+b}{2} \in \frac{a+b}{2} + \frac{i(a-b)}{2}\mathbb{R} \end{aligned}$$

et les solutions z sont donc situées sur une droite de $\mathbb{C}$. On peut également remarquer que si z est solution, alors $|z-a| = |z-b|$ ce qui fait que z appartient à la médiatrie des points d'affixe a et b.

Exercice 26
Soient A, B, C trois point du plan d'affixes respectives a, b, c. Montrer que (ABC) est équilatéral si et seulement si j ou $\overline{j}$ est solution de $az^2 + bz + c = 0$.

Solution 24
Le triangle (ABC) est équilatéral si et seulement si $\overrightarrow{AC}$ se déduit de $\overrightarrow{AB}$ par rotation d'angle $\pm\dfrac{\pi}{3}$. Par conséquent, (ABC) est équilatéral si et seulement si :

$$c - a = e^{i\dfrac{\pi}{3}}(b-a) \quad \text{ou} \quad c - a = e^{-i\dfrac{\pi}{3}}(b-a)$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned}
c-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) &\text{si et seulement si } a(e^{i\frac{\pi}{3}}-1)-be^{i\frac{\pi}{3}}+c=0 \text{si et seulement si } aj+b\overline{j}+c=0\\
&\text{si et seulement si } aj^2+b+cj=0 \text{si et seulement si } a\overline{j}+b+cj=0\\
&\text{si et seulement si } a\overline{j}^2+b\overline{j}+c=0\\
c-a=e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a) &\text{si et seulement si } a(e^{-i\frac{\pi}{3}}-1)-be^{-i\frac{\pi}{3}}+c=0 \text{si et seulement si } a\overline{j}+bj+c=0\\
&\text{si et seulement si } a\overline{j}j^2+bj^3+cj^2=0 \text{si et seulement si } aj+b+cj^2=0\\
&\text{si et seulement si } aj^2+bj+c=0
\end{aligned}$$

On en déduit (ABC) équilatéral si et seulement si $aj^2+bj+c=0$ ou $a\overline{j}^2+b\overline{j}+c=0$.

9.6 Formules trigonométriques

Formules d'addition

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\cos b-\sin a\sin b & \cos(a-b) &= \cos a\cos b+\sin a\sin b\\
\sin(a+b) &= \sin a\cos b+\sin b\cos a & \sin(a-b) &= \sin a\cos b-\sin b\cos a\\
\tan(a+b) &= \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b} & \tan(a-b) &= \frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}
\end{aligned}$$

Formules de linéarisation

$$\begin{aligned}
\sin a\sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))\\
\sin a\cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))\\
\cos a\cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b)+\cos(a+b))
\end{aligned}$$

Transformation de sommes en produits

$$\begin{aligned}
\cos p+\cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} & \cos p-\cos q &= -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}\\
\sin p+\sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} & \sin p-\sin q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}\\
\tan p+\tan q &= \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q} & \tan p-\tan q &= \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}
\end{aligned}$$

Formules de duplication

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= \cos^2\theta-\sin^2\theta & \sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta\\
&= 2\cos^2\theta-1 & \tan(2\theta) &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\\
&= 1-2\sin^2\theta
\end{aligned}$$

Formules utilisant $t=\tan\frac{\theta}{2}$

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}$$