Fonctions puissances, exponentielles et logarithmes

Abdellah Bechata

www.mathematiques.fr.st

Préambule

Ce texte a pour but de définir les fonctions puissances d'exposant un nombre réel, les exponentielles et les logarithmes en base quelconque et d'obtenir toutes leurs propriétés en n'utilisant comme prérequis uniquement

- les propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$ (corps commutatif archimédien, théorème de convergence monotone des suites et des fonctions)
- la définition de la notion de limites ainsi que les résultats élémentaires correspondants (somme, produit, inverse, compositions) ainsi que les définition en découlant (continuité, dérivabilité)
- la notion de bijection et le fort utile théorème de bijection continu

J'ai souhaité ne pas utiliser les théorèmes «marteaux-pilons» du type

- existence d'une primitive à une fonction continue sur un intervalle
- la caractérisation des fonctions monotones par le signe de la dérivée

Pour cela, j'ai suivi une progression qui me semble honnête d'un point de vue pédagogique et qui s'intègre volontairement dans un continuum d'enseignement de la primaire au lycée concernant des notions aussi fondamentales que l'écriture décimale d'un nombre réel, les puissances d'un nombre réel, la dichotomie (ont le théorème de bijection continu est une conséquence immédiate) et la notion de bijection. Comme le rappelle si justement Jean-Pierre Demailly, «*il est bien connu (mais mal accepté par les programmes depuis au moins 45 ans !) la fonction* ln *a quelque chose à voir avec la dérivée des exponentielles*».

Ce texte est volontairement trop long car j'ai voulu justifier convenablement chaque étape afin qu'il puisse être enseigné à différents niveaux ou bien exploité par un(e) candidat(e) aux concours de recrutement de l'enseignement (CAPES, Agrégation). Ce texte souffre certainement de nombreux défauts et il sera corrigé au fur et à mesure du temps.

Je tiens à remercier Jean-Pierre Demailly pour son beau texte qui fut mon inspiration «*Puissances, exponentielles, logarithmes, de l'école primaire à la terminale* (ou : les profondes insuffisances et incohérences des programmes de mathématiques en France, depuis l'enseignement des opérations arithmétiques jusqu'à celui de l'analyse)» qui est disponible à la page

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html

1 Fonctions puissances

1.1 Puissances d'exposant entier relatif

Définition 1.1 (puissances entières d'un réel)

1. *Soit x un réel et n un entier naturel, on pose* $x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \quad (\text{y compris lorsque } x = 0 \\ \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$.

2. *Soit x un réel non nul et n un entier relatif négatif, on pose* $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$ *(par exemple,* $x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$*).*

Proposition 1.1
Pour tous réels x, y et tous entiers relatifs n, m, on a

$$1^n = 1,\ x^0 = 1, \quad \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = x^{-n}, \quad (xy)^n = x^n y^n, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, \quad x^{n+m} = x^n x^m, \quad x^{n-m} = \frac{x^n}{x^m}, \quad (x^n)^m = x^{nm}$$

Preuve :
Les deux premières formules résultent de la définition. Pour la troisième, si n est un entier naturel, cela résulte de la définition et de la règle de multiplication des fractions ($\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bc}$) et si n est un entier relatif négatif, $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$ par définition donc

$$\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^{-n}} \underset{-n \geqslant 0}{=} \frac{1}{\frac{1}{x^{-n}}} = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

(pour la dernière égalité, faire le produit en croix dans la définition de x^n).
Pour les autres formules, traitons pour commencer le cas où n et m sont deux entiers naturels. En utilisant l'associativité du produit des réels ($a(bc) = (ab)c$), sa commutativité ($ab = ba$), la règle de distribution des fractions ($\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bc}$) et celles des simplifications ($\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$) ainsi que les faits suivants :

- le regroupement de deux paquets de n objets et de m objets fournit un paquet de $n + m$ objets
- le regroupement de m paquets de n objets fournit un paquet de nm objets,
- l'enlèvement de m objets d'un paquet de n objets fournit un paquet de $n - m$ objets lorsque $m \leqslant n$.

on obtient

$$\begin{aligned}
(xy)^n &= \underbrace{(xy)(xy)\cdots(xy)}_{n \text{ fois}} = (\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}})(\underbrace{y \times y \times \cdots \times y}_{n \text{ fois}}) = x^n y^n \\
y^n \left(\frac{x}{y}\right)^n &= \left(y \cdot \frac{x}{y}\right)^n = x^n \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \\
x^{n+m} &= \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n+m \text{ fois}} = (\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}})(\underbrace{x \times \cdots \times x}_{m \text{ fois}}) = x^n x^m \\
(x^n)^m &= \underbrace{x^n \times \cdots \times x^n}_{m \text{ fois}} = \underbrace{\overbrace{x \times \cdots \times x}^{n \text{ fois}} \times \cdots \times \overbrace{x \times \cdots \times x}^{n \text{ fois}}}_{m \text{ fois}} = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{nm \text{ fois}} = x^{nm}
\end{aligned}$$

On distingue les cas $m \leqslant n$ et $m > n$ pour la formule suivante

$$\begin{aligned}
m &\leqslant n \Leftrightarrow n - m \geqslant 0 : x^m x^{n-m} = x^{m+(n-m)} = x^n \Rightarrow x^{n-m} = \frac{x^n}{x^m} \\
m &\geqslant n \Leftrightarrow m - n \geqslant 0 : x^n x^{m-n} = x^{n+(m-n)} = x^m \Rightarrow \frac{x^n}{x^m} = \frac{1}{x^{m-n}} = x^{-(m-n)} = x^{n-m}
\end{aligned}$$

Pour les dernières formules, on distingue plusieurs cas

- Si n est un entier relatif négatif, alors $-n$ est un entier naturel. En utilisant la définition des puissances entières négatives et la formule précédente valable pour les entiers naturels, on a

$$(xy)^n = \frac{1}{(xy)^{-n}} \underset{-n\geqslant 0}{=} \frac{1}{x^{-n}y^{-n}} = \frac{1}{x^{-n}}.\frac{1}{y^{-n}} = x^n y^n$$

la seconde formule s'obtenant comme dans le cas où n est un entier naturel

- Si n et m sont deux entiers relatifs négatifs, alors $-n$ et $-m$ sont deux entiers naturels et par définition des puissances négatives, on a

$$\begin{aligned} x^{n+m} &= \frac{1}{x^{-(n+m)}} = \frac{1}{x^{-n-m}} = \frac{1}{x^{(-n)+(-m)}} \underset{-n\geqslant 0,-m\geqslant 0}{=} \frac{1}{x^{(-n)}x^{(-m)}} = \frac{1}{x^{-n}}.\frac{1}{x^{-m}} = x^n x^m \\ (x^n)^m &= \frac{1}{(x^n)^{-m}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^{-n}}\right)^{-n}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{x^{-n}}}\right)^{-m} = (x^{-n})^{-m} \underset{-n\geqslant 0,-m\geqslant 0}{=} x^{(-n)(-m)} = x^{nm} \end{aligned}$$

- Si n est un entier naturel et m un entier relatif négatif alors $-m$ est un entier naturel et par définition des puissances négatives, on a

$$\begin{aligned} x^{n+m} &= x^{n-(-m)} \underset{n\geqslant 0,-m\geqslant 0}{=} \frac{x^n}{x^{-m}} = x^n.\frac{1}{x^{-m}} = x^n x^m. \\ (x^n)^m &= \frac{1}{(x^n)^{-m}} \underset{n\geqslant 0,-m\geqslant 0}{=} \frac{1}{x^{n(-m)}} = \frac{1}{x^{-nm}} = x^{nm} \end{aligned}$$

- Si n est un entier relatif négatif et m un entier naturel alors $-n$ est un entier naturel et par définition des puissances négatives, on a

$$\begin{aligned} x^{n+m} &= x^{-(-n)+m} = x^{m-(-n)} \underset{-n\geqslant 0,m\geqslant 0}{=} \frac{x^m}{x^{-n}} = x^m.\frac{1}{x^{-n}} = x^m x^n. \\ (x^n)^m &= \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)^m = \frac{1}{(x^{-n})^m} \underset{-n\geqslant 0,m\geqslant 0}{=} \frac{1}{x^{-nm}} = x^{nm} \end{aligned}$$

■

Corollaire 1.1 (Parité, croissance de $x \mapsto x^n$ et limites aux bornes de l'ensemble de définition)
Soit n un entier relatif non nul.

1. *La fonction $x \mapsto x^n$ a la même parité que n.*
2. *La fonction $x \mapsto x^n$ est*
   - *strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ si n est un entier naturel pair*
   - *croissante sur $\mathbb{R}$ si n est un entier naturel impair*
   - *décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et croissante sur $\mathbb{R}_-$ si n est un entier relatif négatif pair*
   - *décroissante sur $\mathbb{R}_+^\times$ et sur $\mathbb{R}_-^\times$.*
3. *On a les limites suivantes :*

- *Si n est un entier naturel, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.*
- *Si n est un entier naturel pair, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$.*
- *Si n est un entier naturel impair, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$.*
- *Si n est un entier relatif négatif, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n = 0$*

- *Si n est un entier relatif négatif pair, on a* $\lim\limits_{x\to 0} x^n = +\infty$.
- *Si n est un entier naturel impair, on a* $\lim\limits_{x\to 0^-} x^n = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n = +\infty$.

Preuve :

1. Que n soit pair ou impair, le domaine de définition de la fonction $x \mapsto x^n$ est symétrique par rapport à l'origine et l'on a
$$\forall x \in \mathcal{D}_{x\mapsto x^n}, \quad (-x)^n = (-1\times x)^n = (-1)^n x^n.$$
On conclut en remarquant que $(-1)^n = 1$ si n est pair et $(-1)^n = -1$ si n est impair.

2. Si n est un entier naturel, il est immédiat que si $x > 1$ alors $x^n = \underbrace{x\times\cdots\times x}_{n \text{ fois}} > 1$.
   - Si n est un entier naturel pair, Soient x et y deux réels avec $0 \leqslant x < y$ alors
   $$\frac{y}{x} > 1 \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^n > 1 \Leftrightarrow \frac{y^n}{x^n} > 1 \underset{x^n>0}{\Leftrightarrow} y^n > x^n$$
   ce qui démontre la stricte croissance sur $\mathbb{R}_+$. Sur $\mathbb{R}_-$, en utilisant la parité de $x \mapsto x^n$, on a
   $$x < y \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant -y < -x \Rightarrow 0 \leqslant (-y)^n < (-x)^n \Leftrightarrow 0 \leqslant y^n < x^n.$$
   ce qui démontre la stricte décroissance sur $\mathbb{R}_+$.
   - Si n est un entier naturel impair et x, y deux réels tels que $x < y$.
   Si $x \leqslant 0$ et $y > 0$ ou $x < 0$ et $y \geqslant 0$ alors $x^n \leqslant 0$ et $y^n > 0$ ou $x^n < 0$ ou $y^n \geqslant 0$ (d'après la règle des signes) donc $x^n < y^n$.
   Si x et y sont négatifs avec $x < y$, alors
   $$0 \leqslant -y < -x \underset{-x>0}{\Leftrightarrow} \frac{-x}{-y} > 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} > 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^n > 1 \Leftrightarrow \frac{x^n}{y^n} > 1 \underset{y^n<0}{\Leftrightarrow} x^n < y^n$$
   Si x et y sont positifs avec $x < y$, alors
   $$\frac{y}{x} > 1 \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^n > 1 \Leftrightarrow \frac{y^n}{x^n} > 1 \underset{x^n>0}{\Leftrightarrow} y^n > x^n$$
   Par conséquent, dans tous les cas, on a $x < y \Rightarrow x^n < y^n$ ce qui démontre la stricte croissance sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^n$.
   - Les deux autres cas s'obtiennent à partir des précédents en remarquant que $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$ avec $-n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^{-n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et elle est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc son inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Pour $\mathbb{R}_-$, on procède de même (dans le cas impair, la fonction $-x^{-n}$ est positive sur $\mathbb{R}_-$ et sa monotonie est inverse de celle de $x \mapsto x^{-n}$).

3. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x\times\cdots\times x}_{n \text{ fois}} = +\infty$. Les autres limites proviennent de la parité de la fonction $x \mapsto x^n$ ainsi que de la formule $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$ et du changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ dans le cas des limites en 0.

■

Proposition 1.2
Pour tout entier relatif n, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable (donc continue) sur son domaine de définition. En outre, on a
$$\forall x \in \mathcal{D}_{x\mapsto x^n}, \quad (x^n)' = nx^{n-1}.$$
Ce résultat s'étend au cas où $n = 0$ en convenant que $0 \times x^{0-1} = 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Preuve :

Le cas $n=0$ est immédiat. En effet, Soit $a \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{x^0-a^0}{x-a} = \dfrac{1-1}{x-a} = 0 \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ donc la fonction $x \mapsto x^0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad (x^0)' = 0 = 0 \times x^{0-1}$ (par la convention que l'on vient de proposer).
Si n un entier naturel non nul.

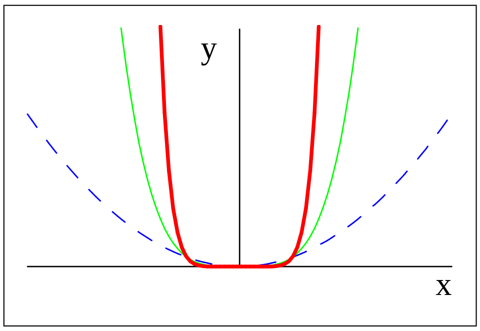
- Dérivabilité en 0. Pour tout réel x non nul, on a
$$\frac{x^n-0^n}{x-0} = \frac{x^n}{x} = x^{n-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases} = n.0^{n-1}$$
avec la convention que nous avons choisi

- Pour tout réel x distinct de 1, on a la classique formule
$$\frac{x^n-1}{x-1} = \underbrace{1+x+\cdots+x^{n-1}}_{n \text{ termes}} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \underbrace{1+1+\cdots+1^{n-1}}_{n \text{ termes}} = n = n.1^{n-1}$$
ce qui démontre la dérivabilité de la fonction $x \mapsto x^n$ en 1 ainsi que la formule attendue.

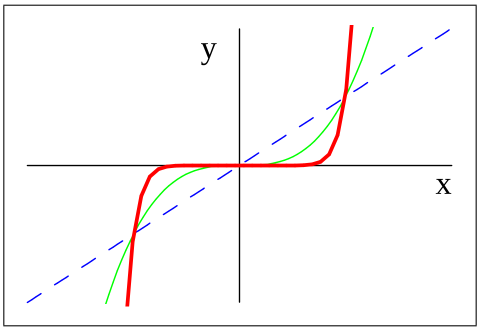
- Soit $x_0 \in \mathbb{R}^\times$, si $x \longrightarrow x_0$ alors $\dfrac{x}{x_0} \longrightarrow 1$ et l'on a
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^n - 1}{\dfrac{x}{x_0}-1} = n \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{x^n}{x_0^n}-1}{\dfrac{x-x_0}{x_0}} = n \Leftrightarrow \frac{x_0}{x_0^n} \lim_{x\to x_0} \frac{x^n-x_0^n}{x-x_0} = n \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{x^n-x_0^n}{x-x_0} = n\frac{x_0^n}{x_0} = nx_0^{n-1}$$
ce qui démontre la dérivabilité de la fonction $x \mapsto x^n$ en tout réel $x_0 \neq 0$.

La fonction $x \mapsto x^n$ est par conséquent dérivable sur $\mathbb{R}^\times$ et la formule attendue est vérifiée sur $\mathbb{R}$. ■

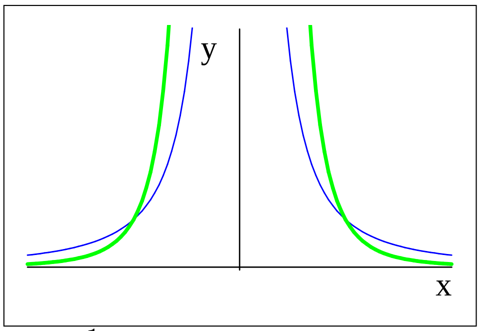
Représentation graphique des fonctions $x \mapsto x^n$. Plus le trait devient épais, plus l'exposant n est grand.



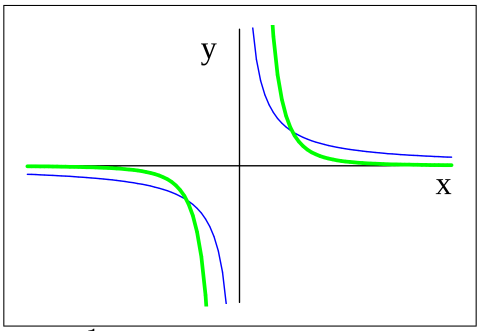
$x \mapsto x^n$ pour n entier naturel pair



$x \mapsto x^n$ pour n entier naturel impair



$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour n entier naturel pair



$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour n entier naturel pair

1.2 Racines n-ième d'un réel

Théorème 1.1 (définition des racines n-ièmes)
Soit n un entier naturel non nul.

- *Si n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.*
  On note $\sqrt[n]{\ }$ sa fonction réciproque. En outre, la fonction $\sqrt[n]{\ }$ est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et l'on a
  $$\left\{\begin{array}{l}\sqrt[n]{0}=0,\\ \sqrt[n]{1}=1\end{array}\right. \quad \forall x\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l}\sqrt[n]{x^n}=x\\ (\sqrt[n]{x})^n=x\end{array}\right., \quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt[n]{x}=-\infty, \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty.$$

- *Si n est pair, la fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.*
  On note $\sqrt[n]{\ }$ sa fonction réciproque. En outre, la fonction $\sqrt[n]{\ }$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a
  $$\left\{\begin{array}{l}\sqrt[n]{0}=0,\\ \sqrt[n]{1}=1\end{array}\right. \quad \forall x\in\mathbb{R}_+,\ \left\{\begin{array}{l}\sqrt[n]{x^n}=x\\ (\sqrt[n]{x})^n=x\end{array}\right., \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty.$$

Preuve :
La fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$. En outre, d'après le corollaire 1.1, on a

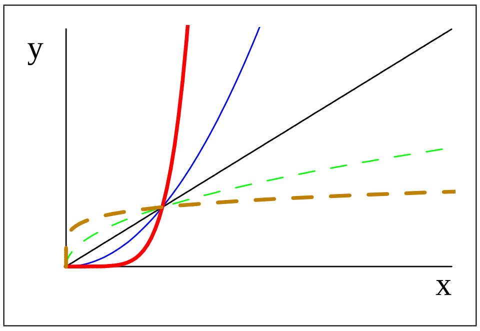
- Si n est impair, a fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et puisque $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, le théorème de bijection continu montre que la fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ qui est également strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
  Montrons la parité de la fonction $\sqrt[n]{\ }$. Pour cela, notons f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n$.
  Elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, sa réciproque $f_n^{-1} = \sqrt[n]{\ }$ vérifie donc
  $$\forall x\in\mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{l}f_n^{-1}(f_n(x))=x\\ f_n(f_n^{-1}(x))=x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sqrt[n]{x^n}=x\\ (\sqrt[n]{x})^n=x\end{array}\right.$$
  (cette relation restant vraie pour $x \in \mathbb{R}_+$ lorsque n est pair). On a donc les équivalences suivantes
  $$\forall x\in\mathbb{R},\quad \sqrt[n]{-x}=-\sqrt[n]{x} \Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{-x}\right)^n=\left(-\sqrt[n]{x}\right)^n \Leftrightarrow -x=(-1)^n\left(\sqrt[n]{x}\right)^n \Leftrightarrow -x=(-1)^n x \underset{n\text{ est impair}}{\Leftrightarrow} -x=-x$$
  Cette dernière égalité étant clairement vérifiée sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la première aussi ce qui démontre l'imparité de la fonction $\sqrt[n]{\ }$..
  En posant le changement de variable $x = \sqrt[n]{t} \Leftrightarrow t = x^n$ et comme $x^n \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{t\to+\infty} t = +\infty$. L'autre limite s'obtenant par imparité.
  Pour finir, on a $f_n(0) = 0^n = 0$ (car n est non nul) et $f_n(1) = 1^n = 1$ donc 0 (resp. 1) est un antécédent de 0 (resp. 1) par f_n. Puisque f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on est assuré de l'unicité de l'antécédent donc $f_n^{-1}(0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{0} = 0$ (resp. $f_n^{-1}(1) = 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{1} = 1$).

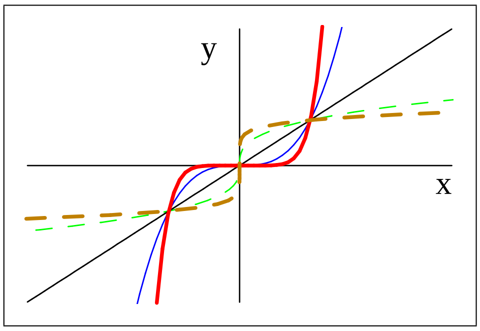
- Si n est pair alors fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle y est continue et puisque $0^n = 0$ (car $n > 0$), $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, le théorème de la bijection continue montre que la fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ qui est également strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
  En posant le changement de variable $x = \sqrt[n]{t} \Leftrightarrow t = x^n$ et comme $x^n \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{t\to+\infty} t = +\infty$.
  Pour finir, on a $f_n(0) = 0^n = 0$ (car n est non nul) et $f_n(1) = 1^n = 1$ donc 0 (resp. 1) est un antécédent de 0 (resp. 1) par f_n. Puisque f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, on est assuré de l'unicité de l'antécédent donc $f_n^{-1}(0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{0} = 0$ (resp. $f_n^{-1}(1) = 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{1} = 1$).

■

Remarque 1.1
Il est immédiat que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt[1]{x} = x$!

Représentation graphique des fonctions $\sqrt[n]{\ }$ En train fin, la fonction $x \mapsto x^n$ et en trait discontinu sa fonction réciproque $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Plus le trait est épais, plus l'exposant n est grand.





Corollaire 1.2 (Résolution des équations $x^n = a$)
Soit $a \in \mathbb{R}$ et n un entier naturel non nul.

1. *Si n est impair, l'équation $x^n = a$ admet une unique solution réelle qui est donnée par $x = \sqrt[n]{a}$, i.e.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}.$$

2. *Si n est pair, l'équation $x^n = a$*

   - *n'admet aucune solution réelle si $a < 0$.*
   - *admet pour solutions $x = \sqrt[n]{a}$ et $x = -\sqrt[n]{a}$ lorsque $a \geqslant 0$.*

   Autrement dit, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad x^n = a \Leftrightarrow (a \in \mathbb{R}_+ \text{ et } x = \pm\sqrt[n]{a})$$

Preuve :
Notons f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n$.

1. La fonction f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc tout réel a possède un et un seul antécédent par f_n i.e. il existe un et un seul réel x tel que $f_n(x) = a \Leftrightarrow x^n = a$. Par définition, cette solution se note $x = f_n^{-1}(a) = \sqrt[n]{a}$.

2. Puisque n est pair, le réel x^n est toujours positif donc si $a < 0$, l'équation $x^n = a$ n'admet aucune solution réelle.
   Si $a = 0$, l'équation $x^n = 0 \Leftrightarrow x \times \cdots \times x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (c'est une équation produit !).
   Si $a > 0$, l'équation $x^n = a$ est équivalente à l'équation $f_n(x) = a$ donc les solutions x sont les antécédents de a par f_n.

   - Si $x \in \mathbb{R}_+$ alors, la fonction f_n réalisant une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, on est assuré de l'existence d'un et d'un seul antécédent à a par f_n appartenant à $\mathbb{R}_+$. Par définition, cet antécédent se note $\sqrt[n]{a}$ donc si $x \geqslant 0$ alors $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$.
   - Si $x \in \mathbb{R}_-$ alors $-x \in \mathbb{R}_+$ et en utilisant le fait que la fonction f_n est paire (car n est pair), on a $f_n(-x) = f_n(x) = x^n = a$ donc $-x \in \mathbb{R}_+$ est un antécédent de a par f_n ce qui entraine que $-x = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow x = -\sqrt[n]{a}$. Ainsi, les seules solutions de l'équation $x^n = a$ sont $\pm\sqrt[n]{a}$. Justifions qu'elles sont distinctes

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{a} \Leftrightarrow 2\sqrt[n]{a} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = 0 \Leftrightarrow f_n^{-1}(a) = 0 \underset{\text{bijectivité de } f_n}{\Leftrightarrow} a = f_n(0) = 0$$

   Puisque cette dernière égalité est impossible (on est dans le cas où $a > 0$), on en déduit que l'on a bien deux racines distinctes.

■

Corollaire 1.3 (racines n-ièmes et inégalités)

1. *Si n est un entier naturel impair, on a les équivalences suivantes :*

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad x^n \leqslant a \Leftrightarrow x \leqslant \sqrt[n]{a}\right), \quad \left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad x^n \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt[n]{a}\right)$$

2. *Si n est un entier naturel pair, on a les équivalences suivantes :*

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad ,\forall a \in \mathbb{R}_+, \quad x^n \leqslant a \Leftrightarrow |x| \leqslant \sqrt[n]{a}\right), \quad \left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+, \quad x^n \geqslant a \Leftrightarrow |x| \geqslant \sqrt[n]{a}\right)$$

Preuve :

1. Supposons que $x^n \leqslant a$: Par croissance la fonction $\sqrt[n]{}$ sur $\mathbb{R}$ et en utilisant l'égalité $\sqrt[n]{x^n} = x$ fournit par la proposition 1.1, on a
$$x^n \leqslant a \Rightarrow \sqrt[n]{x^n} \leqslant \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow x \leqslant \sqrt[n]{a}.$$
Supposons que $x \leqslant \sqrt[n]{a}$: Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ et en utilisant l'égalité $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ fournit par la proposition 1.1, on a
$$x \leqslant \sqrt[n]{a} \Rightarrow x^n \leqslant \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \Leftrightarrow x^n \leqslant a.$$
On procède de même pour l'autre équivalence.

2. Supposons que $x^n \leqslant a$: Si $x \in \mathbb{R}_+$, en utilisant la croissance la fonction $\sqrt[n]{}$ sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que l'égalité $\sqrt[n]{x^n} = x$ fournit par la proposition 1.1, on a
$$x^n \leqslant a \Rightarrow \sqrt[n]{x^n} \leqslant \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow (0 \leqslant)x \leqslant \sqrt[n]{a} \Rightarrow -\sqrt[n]{a} \leqslant x \leqslant \sqrt[n]{a}.$$
Si $x \in \mathbb{R}_-$ alors $-x \in \mathbb{R}_+$ et l'on a $(-x)^n = x^n \leqslant a$ et le raisonnement précédent montre que
$$-x \leqslant \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow (0 \geqslant)x \geqslant -\sqrt[n]{a} \Rightarrow -\sqrt[n]{a} \leqslant x \leqslant \sqrt[n]{a}.$$
Par conséquent, dans tous les cas, on a obtenu que $x^n \leqslant a \Rightarrow -\sqrt[n]{a} \leqslant x \leqslant \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow |x| \leqslant \sqrt[n]{a}$.
Supposons que $|x| \leqslant \sqrt[n]{a}$: Si $x \in \mathbb{R}_+$, on a $|x| = x$ donc $x \leqslant \sqrt[n]{a}$ et en utilisant la croissance la fonction $\sqrt[n]{}$ sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que l'égalité $\sqrt[n]{x^n} = x$ fournit par la proposition 1.1, on obtient
$$x \leqslant \sqrt[n]{a} \Rightarrow x^n \leqslant (\sqrt[n]{a})^n \Leftrightarrow x^n \leqslant a$$
Si $x \in \mathbb{R}_-$ alors $|x| = -x \in \mathbb{R}_+$ et le raisonnement précédent montre que $x^n = (-x)^n \leqslant a$. Par conséquent, dans tous les cas, on a obtenu que $|x| \leqslant \sqrt[n]{a} \Rightarrow x^n \leqslant a$ ce qui démontre l'équivalence.
On procède de même pour l'autre équivalence.

■

Proposition 1.3 (Règles de calculs sur les racines n-ièmes)

1. *Soient n et m deux entiers naturels non nuls. Pour les réels x et y positifs (sauf éventuellement 0 lors des divisions), on a*
$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt[n]{0} = 0, \\ \sqrt[n]{1} = 1 \end{array}\right., \left\{\begin{array}{l} \sqrt[n]{x^n} = x, \\ \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \end{array}\right., \sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}, \quad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}, \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}, \quad \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m, \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x},$$
Lorsque n et m sont impairs, les formules subsistent lorsque x et y sont des réels négatifs.

2. *Soient m, m' deux entiers relatifs et n, n' deux entiers naturels non nuls tels que $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$ alors*
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n']{x^{m'}}.$$

Preuve :
Pour tout entier n, on considère l'ensemble $I_n = \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathbb{R} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ ainsi que la fonction $f_n : \begin{cases} I_n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{cases}$.
D'après la proposition 1.1, la fonction f_n réalise une bijection de I_n sur I_n.

1. Les quatre premières formules sauf la seconde ont été établies dans la preuve de la proposition 1.1
Pour établir les identités restantes, on va établir que l'image par f_n de chaque membre de l'égalité considérée sont égaux et la bijectivité de f_n de I_n sur lui-même entrainera l'égalité de chaque membre (sauf pour la dernière où l'on utilisera f_{nm}).

$$\begin{cases} f_n\left(\sqrt[n]{\dfrac{1}{x}}\right) = \left(\sqrt[n]{\dfrac{1}{x}}\right)^n = \dfrac{1}{x} \\ f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)^n = \dfrac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^n} = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow f_n\left(\sqrt[n]{\dfrac{1}{x}}\right) = f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}\right) \underset{f_n \text{ bijective}}{\Rightarrow} \sqrt[n]{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$$

$$\begin{cases} f_n\left(\sqrt[n]{xy}\right) = \left(\sqrt[n]{xy}\right)^n = xy \\ f_n\left(\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}\right) = \left(\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}\right)^n = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n\left(\sqrt[n]{y}\right)^n = xy \end{cases} \Rightarrow f_n\left(\sqrt[n]{xy}\right) = f_n\left(\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}\right) \underset{f_n \text{ bijective}}{\Rightarrow} \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$$

$$\begin{cases} f_n\left(\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}\right) = \left(\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}\right)^n = \dfrac{x}{y} \\ f_n\left(\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right) = \left(\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right)^n = \dfrac{\left(\sqrt[n]{x}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{y}\right)^n} = \dfrac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow f_n\left(\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}\right) = f_n\left(\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right) \underset{f_n \text{ bijective}}{\Rightarrow} \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$\begin{cases} f_n\left(\sqrt[n]{x^m}\right) = \left(\sqrt[n]{x^m}\right)^n = x^m \\ f_n\left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^m\right) = \left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^m\right)^n = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^n\right)^m = x^m \end{cases} \Rightarrow f_n\left(\sqrt[n]{x^m}\right) = f_n\left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^m\right) \underset{f_n \text{ bijective}}{\Rightarrow} \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

$$\begin{cases} f_{nm}\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}\right) = \left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}\right)^{nm} = \left(\left[\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}\right]^n\right)^m = \left(\sqrt[m]{x}\right)^m = x \\ f_{nm}\left(\sqrt[nm]{x}\right) = \left(\sqrt[nm]{x}\right)^n = x \end{cases} \Rightarrow f_{nm}\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}\right) = f_{nm}\left(\sqrt[nm]{x}\right)$$

$$\underset{f_n \text{ bijective}}{\Rightarrow} \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$$

2. L'égalité $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$ est équivalente à l'égalité $mn' = m'n$.

$$\begin{cases} f_{nn'}\left(\sqrt[n]{x^m}\right) = \left(\sqrt[n]{x^m}\right)^{nn'} = \left[\left(\sqrt[n]{x^m}\right)^n\right]^{n'} = [x^m]^{n'} = x^{mn'} \\ f_{nn'}\left(\sqrt[n']{x^{m'}}\right) = \left(\sqrt[n']{x^{m'}}\right)^{nn'} = \left[\left(\sqrt[n']{x^{m'}}\right)^{n'}\right]^n = \left[x^{m'}\right]^n = x^{m'n} = x^{mn'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f_{nn'}\left(\sqrt[n]{x^m}\right) = f_{nn'}\left(\sqrt[n']{x^{m'}}\right) \underset{f_{nn'} \text{ bijective}}{\Rightarrow} \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n']{x^{m'}}$$

■

Proposition 1.4 (dérivabilité des fonctions $\sqrt[n]{\ }$)

- *Si $n \geqslant 3$ est un entier naturel impair, le domaine de dérivabilité de la fonction $\sqrt[n]{\ }$ est $\mathbb{R}^\times$ et l'on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}.$$

- *Si n est un entier naturel non nul et pair, le domaine de dérivabilité de la fonction $\sqrt[n]{\ }$ est $\mathbb{R}_+^\times$ et l'on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}.$$

Preuve :

- <u>$n \geqslant 3$ est un entier naturel impair</u> : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $t = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = t^n$. Lorsque $x \to a$, $t \to \sqrt[n]{a}$ et l'on a
$$\frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x-a} = \frac{t - \sqrt[n]{a}}{t^n - a} = \frac{t - \sqrt[n]{a}}{t^n - (\sqrt[n]{a})^n} = \frac{1}{\dfrac{t^n - (\sqrt[n]{a})^n}{t - \sqrt[n]{a}}}$$
On reconnait le taux d'accroissement de la fonction $t \mapsto t^n$ au point $\sqrt[n]{a}$ qui tend vers $n(\sqrt[n]{a})^{n-1}$ lorsque $t \to \sqrt[n]{a}$ puisque la dérivée de la fonction $t \mapsto t^n$ vaut nt^{n-1}. Par conséquent, si $a \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} \neq 0$, on a
$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x-a} = \frac{1}{\lim\limits_{t \to \sqrt[n]{a}} \dfrac{t^n - (\sqrt[n]{a})^n}{t - \sqrt[n]{a}}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{a})^{n-1}}$$
ce qui entraine la dérivabilité de la fonction $\sqrt[n]{}$ est dérivable en a et l'on a la formule attendue. Lorsque $a = 0$, en tenant compte que $n-1$ est un entier pair, on a
$$\frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}}{x-0} = \frac{1}{\dfrac{t^n}{t}} = \frac{t}{t^n} = \frac{1}{t^{n-1}} \underset{t \to 0}{\to} +\infty$$
donc la fonction $\sqrt[n]{x}$ n'est pas dérivable en 0.
- <u>n est un entier naturel non nul et pair</u> : On procède de la même façon en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}_+$ et on obtient les résultats escomptés.

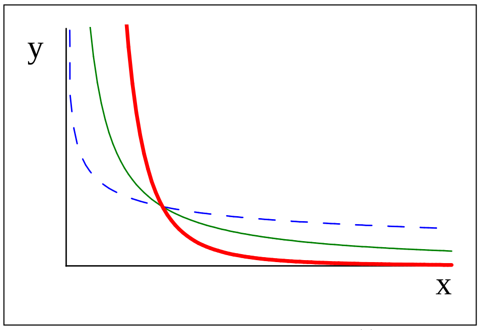
■

1.3 Puissances d'exposant rationnel

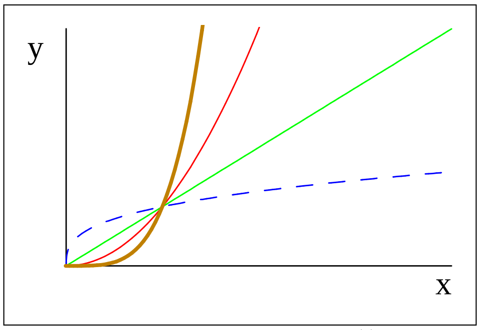
Définition 1.2 (Puissance d'exposant rationnel)
Soit r un rationnel s'écrivant $r = \dfrac{m}{n}$ où m un entier relatif et n un entier naturel non nul, on pose
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^{\times}, \quad x^r \underset{\text{par définition}}{=} \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$
Cette formule s'étendant pour $x = 0$ lorsque $r \geqslant 0$. En particulier, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^{\times}, \quad x^{1/n} = \sqrt[n]{x}.$$

Remarque 1.2
Cette définition a bien un sens c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de l'écriture fractionnaire de ce rationnel (rappelons que cette écriture n'est pas unique, par exemple $\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{6}$!). Supposons que r s'écrit $r = \dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$ avec m, m' deux entiers relatifs et n, n' deux entiers naturels non nuls alors, d'après la proposition 1.5, on a $x^{m/n} = x^{m'/n'}$.
On ne peut définir convenablement x^r lorsque x est réel strictement négatif. Par exemple, si $r = \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{6}$, le réel $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ est bien défini lorsque $x < 0$, le réel $\sqrt[6]{x^2}$ est aussi bien défini (car $x^2 > 0$) par contre le réel $(\sqrt[6]{x})^2$ ne l'est pas (car $\sqrt[6]{x}$ n'est défini que lorsque $x \geqslant 0$) donc l'égalité $\sqrt[6]{x^2} = (\sqrt[6]{x})^2$ n'a aucun sens. Ainsi, l'existence de x^r dépendrait de la façon d'écrire r comme quotient de deux entiers !

Réprésentation graphique des fonctions $x \mapsto x^r$ avec $r \in \mathbb{Q}$. Plus le trait devient épais, plus $|r|$ devient grand.



$x \mapsto x^r$ lorsque $r \in \mathbb{Q}_-^\times$



$x \mapsto x^r$ lorsque $r \in \mathbb{Q}_+^\times$

Proposition 1.5 (Règles de calculs sur les racines n-ièmes)
Pour tous rationnels r, s et pour tous réels strictement positifs x, y, on a

$$\begin{aligned} 0^r &= 0 \text{ si } r > 0, \quad 1^r = 1, \quad x^{-r} = \frac{1}{x^r} = \left(\frac{1}{x}\right)^r, \quad (xy)^r = x^r y^r, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}, \\ (x^r)^s &= x^{rs}, \quad x^r x^s = x^{r+s}, \quad \frac{x^r}{x^s} = x^{r-s} \end{aligned}$$

Preuve :
Supposons que r et s s'écrivent respectivement $r = \dfrac{m}{n}$, $s = \dfrac{m'}{n'}$ avec m, m' deux entiers relatifs et n, n' deux entiers naturels non nuls. Si $r \geqslant 0$, on peut toujours supposer que $m \geqslant 0$ donc $0^r = \sqrt[n]{0^m} = \sqrt[m]{0} = 0$. On ne fait plus cette hypothèse désormais. La formule $\left(\dfrac{1}{x}\right)^r = \dfrac{1}{x^r}$ découle des formules 1^r et $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$. En utilisant la proposition 1.3, on a

$$\begin{aligned} 1^r &= \sqrt[n]{1^m} = \sqrt[n]{1} = 1, \\ x^{-r} &= x^{(-m)/n} = \sqrt[n]{x^{-m}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^m} = \frac{1}{x^r} \\ (xy)^r &= (xy)^{m/n} = \sqrt[n]{(xy)^m} = \sqrt[n]{x^m y^m} = \sqrt[n]{x^m}\,\sqrt[n]{y^m} = x^r y^r \\ y^r \left(\frac{x}{y}\right)^r &= \left(y.\frac{x}{y}\right)^r = x^r \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r} \\ (x^r)^s &= \sqrt[n']{(x^r)^{m'}} = \sqrt[n']{\left(\sqrt[n]{x^m}\right)^{m'}} = \sqrt[n']{\sqrt[n]{(x^m)^{m'}}} = \sqrt[n']{\sqrt[n]{x^{mm'}}} = \sqrt[nn']{x^{mm'}} = x^{(mm')/(nn')} = x^{rs} \\ x^r x^s &= \sqrt[n]{x^m}\,\sqrt[n']{x^{m'}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \left(\sqrt[n']{x}\right)^{m'} = \left(\sqrt[nn']{x^{n'}}\right)^m \left(\sqrt[nn']{x^n}\right)^{m'} = \left[\left(\sqrt[nn']{x}\right)^{n'}\right]^m \left[\left(\sqrt[nn']{x}\right)^{n}\right]^{m'} \\ &= \left(\sqrt[nn']{x}\right)^{n'm} \left(\sqrt[nn']{x}\right)^{nm'} = \left(\sqrt[nn']{x}\right)^{n'm+nm'} = x^{(n'm+nm')/(nn')} = x^{m/n+m'/n'} = x^{r+s} \\ x^s x^{r-s} &= x^{s+(r-s)} = x^r \Rightarrow x^{r-s} = \frac{x^r}{x^s} \end{aligned}$$

■

Proposition 1.6 (Continuité et dérivabilité des fonctions $x \mapsto x^r$ avec $r \in \mathbb{Q}$)
Soit r un rationnel.

1. *La fonction $x \mapsto x^r$ est continue sur son domaine de définition, i.e. sur* $\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{si } r \geqslant 0 \\ \mathbb{R}_+^\times & \text{si } r < 0 \end{cases}$.
   En outre, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ lorsque $r \geqslant 0$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\times$ lorsque $r < 0$.

2. *Le domaine de dérivabilité de la fonction* $x \mapsto x^r$ *est* $\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{si } r \geqslant 1 \\ \mathbb{R}_+^\times & \text{si } r < 1 \end{cases}$ *et pour tout* x *dans ce domaine de dérivabilité, on a*
$$(x^r)' = r.x^{r-1}.$$
(en convenant que $x^0 = 1$ *même pour* $x = 0$*).*

Preuve :
Si $r = \dfrac{m}{n}$ où m est un entier relatif et n un entier naturel non nul, alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad x^r = (\sqrt[n]{x})^m$, la formule restant valable pour $x = 0$ lorsque $r \geqslant 0 \Leftrightarrow m \geqslant 0$.

1. La fonction $x \mapsto x^r$ est la composée de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de la fonction $x \mapsto x^m$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$ si $m \geqslant 0$ ou continue sur $\mathbb{R}^\times$ si $m < 0$ ce qui entraine la continuité de la fonction $x \mapsto x^r$ sur $\mathbb{R}$ si $r \geqslant 0$ et sur $\mathbb{R}_+^\times$ si $r < 0$ (resp. la stricte croissance sur $\mathbb{R}_+$ si $r > 0$
Pour la monotonie, on procède également par composition d'applications strictement monotones.

2. La fonction $x \mapsto x^r$ est la composée de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et de la fonction $x \mapsto x^m$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui entraine la dérivabilité de la fonction $x \mapsto x^r$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ et l'on a
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad (x^r)' = m\left(\sqrt[n]{x}\right)'\left(\sqrt[n]{x}\right)^{m-1} = m.\frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}\left(\sqrt[n]{x}\right)^{m-1} = \frac{m}{n}\left(\sqrt[n]{x}\right)^{m-n} = rx^{(m-n)/n} = rx^{r-1}$$
Il reste à étudier la dérivabilité en 0 lorsque $r \geqslant 0$ (si $r < 0$, la fonction $x \mapsto x^r$ n'est pas définie en 0). On a
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \frac{x^r - 0^r}{x - 0} = \frac{x^r}{x} = x^{r-1} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } r > 1 \end{cases}$$
Par conséquent, la fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable en 0 si et seulement $r \geqslant 1$ et comme $r.0^{r-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } r > 1 \end{cases}$, on obtient bien les résultats escomptés.

■

1.4 Puissances d'exposant réel

Soit x un réel strictement positif et a un réel, on souhaite définir x^a. Pour cela, on va construire une suite de rationnels $(a_n)_{n \geqslant 0}$ convergeant vers a et l'on va montrer que la suite $(x^{a_n})_{n \geqslant 0}$ (qui est bien définie par $a_n \in \mathbb{Q}$ pour tout n) converge dans $\mathbb{R}$. On appelera x^a sa limite.

Définition 1.3
Soit a *un nombre réel dont l'écriture décimale est* $a = \pm\overline{E, a_1 a_2 a_3 \cdots}$ *où* E *est un entier naturel et* $(a_n)_{n \geqslant 1}$ *est une suite d'entiers appartenant à* $[\![0, 9]\!]$.
Pour tout entier n*, on désigne par* α_n *le nombre décimal définie par* $\alpha_n = \overline{E, a_1 \cdots a_n} = \dfrac{\overline{Ea_1 \cdots a_n}}{10^n}$.
La suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 0}$ *s'appelle la suite des parties décimales décimales de* a.

Remarque 1.3
Par exemple,

- si $a = \sqrt{159} = 12.\,609\,520\,212\,92...$ alors
$$\alpha_0 = 12, \quad \alpha_1 = 12.6 = \frac{126}{10}, \quad \alpha_2 = 12.60 = \frac{1260}{100}, \quad \alpha_3 = 12.609 = \frac{12609}{1000}, ...$$
- si $a = -\sqrt{2} = -1.\,414\,213\,562373...$ alors
$$\alpha_0 = -1, \quad \alpha_1 = -1.4 = \frac{-12}{10}, \quad \alpha_2 = -1.41 = \frac{-141}{100}, \quad \alpha_3 = -1.414 = \frac{-1414}{1000}, ...$$

Lemme 1.1
On a l'égalité $0.999\cdots = 1$.

Preuve :
On note $a = 0.999\cdots$ donc $10a = 9.999\cdots = 9 + 0.999\cdots = 9 + a \Rightarrow 9a = 9 \Rightarrow a = 1$. ■

Lemme 1.2 (Tout réel est la limite de ses parties décimales)
Soit a est un réel et $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de ses parties décimales.

- *Si $a \geqslant 0$, on a*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n \leqslant a \leqslant \alpha_n + \frac{1}{10^n}$$
En outre, la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et elle converge vers a.

- *Si $a \leqslant 0$, on a*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n - \frac{1}{10^n} \leqslant a \leqslant \alpha_n.$$
En outre, la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et elle converge vers a.

Preuve :

- Si a est positif et s'il s'écrit $a = \overline{E, a_1a_2a_3\cdots}$ avec $E \in \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \in [\![0, 9]\!]$, en utilisant les propriétés usuelles des nombres décimaux ainsi que le lemme 1.1, on a
$$\begin{aligned}
\forall n &\in \mathbb{N}, \quad \overline{E, a_1\cdots a_n 0} \leqslant \overline{E, a_1\cdots a_n a_{n+1}} \leqslant \overline{E, a_1\cdots a_n\cdots} \Leftrightarrow \alpha_n \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant a \\
a &= \overline{E, a_1\cdots a_n 99\cdots} = \overline{E, a_1\cdots a_n 99\cdots} + \overline{0, \underbrace{0\cdots 0}_{n \text{ fois}} 99\cdots} = \alpha_n + \frac{0.99\cdots}{10^n} = \alpha_n + \frac{1}{10^n} \\
&\Rightarrow \alpha_n \leqslant a \leqslant \alpha_n + \frac{1}{10^n} \Rightarrow 0 \leqslant a - \alpha_n \leqslant \underbrace{\frac{1}{10^n}}_{\to 0} \underset{\text{th. d'encadrement}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty} (a - \alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = a.
\end{aligned}$$

- Si a est négatif alors $-a$ est positif. Si l'on note $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des parties décimales de $-a$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \beta_n = -\alpha_n$. En appliquant les résultats précédents à la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 0} = (-\alpha_n)_{n\geqslant 0}$, on obtient les résultats attendus.

■

Proposition 1.7 (Stricte monotonie de la fonction $r \mapsto x^r$ définie sur $\mathbb{Q}$)
Soit $x \in \mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\}$. La fonction $r \mapsto x^r$ définie sur $\mathbb{Q}$ est

- *strictement croissante sur $\mathbb{Q}$ si $x > 1$*
- *strictement décroissante sur $\mathbb{Q}$ si $0 < x < 1$.*

Preuve :
Soient r, s deux rationnels tels que $r < s$ et $x \in \mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\}$. Le nombre $s - r$ est un rationnel strictement positif donc il peut s'écrire $s - r = \dfrac{m}{n}$ avec m et n deux entiers naturels non nuls. Par stricte croissance sur $\mathbb{R}_+$ des fonctions $\sqrt[n]{}$ et $x \mapsto x^m$ et comme $\sqrt[n]{\mathbb{R}_+} \subset \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto x^{s-r} = \sqrt[n]{x^m}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a
$$\begin{aligned}
x &> 1 : \frac{x^s}{x^r} = x^{s-r} = \sqrt[n]{x^m} > \sqrt[n]{1^m} = \sqrt[n]{1} = 1 \underset{\times x^r > 0}{\Rightarrow} x^s > x^r \\
x &< 1 : \frac{x^s}{x^r} = x^{s-r} = \sqrt[n]{x^m} < \sqrt[n]{1^m} = \sqrt[n]{1} = 1 \underset{\times x^r > 0}{\Rightarrow} x^s < x^r
\end{aligned}$$

■

Théorème 1.2 (Définition de x^a lorsque $x \in \mathbb{R}_+^\times$ et $a \in \mathbb{R}$)
Soient $x \in \mathbb{R}_+^\times$, $a \in \mathbb{R}$ et $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de ses parties décimales de a.
La suite de réels $(x^{\alpha_n})_{n\geqslant 0}$ converge dans $\mathbb{R}$ et sa limite est strictement positive. On note x^a cette limite i.e.

$$\text{si } a = \pm\overline{E, a_1a_2a_3\cdots} \text{ alors } x^a = \lim_{n\to+\infty} x^{\pm\overline{Ea_1\cdots a_n}/10^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[10^n]{x^{\pm\overline{E,a_1\cdots a_n}}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[10^n]{x}\right)^{\pm\overline{E,a_1\cdots a_n}}$$

Ceci s'étend pour $x = 0$ et $a > 0$. Dans ce cas, on a $0^a = 0$ pour tout $a > 0$.

Preuve :
Si $x \in \{0, 1\}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $\quad x^{\alpha_n} = x$ donc $\lim_{n\to+\infty} x^{\alpha_n} = x$.

- Si $x > 1$ et $a \geqslant 0$, en utilisant le lemme 1.2 et la proposition 1.7, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n \leqslant \alpha_{n+1} \underset{x>1}{\Rightarrow} x^{\alpha_n} \leqslant x^{\alpha_{n+1}}$$

  donc la suite $(x^{\alpha_n})_{n\geqslant 1}$ est croissante. Etant donné que $a \leqslant \alpha_0 + 1$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $\quad \alpha_0 \leqslant \alpha_n \leqslant a$, on en déduit que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \alpha_0 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_0 + 1 \Rightarrow x^{\alpha_0} \leqslant x^{\alpha_n} \leqslant x^{\alpha_0+1}.$$

  Par conséquent, la suite $(x^{\alpha_n})_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée donc elle converge dans $\mathbb{R}$. En passant à la limite dans l'encadrement précédent, on obtient que $x^a \geqslant x^{\alpha_0} > 0$.

- Si $x > 1$ et $a \leqslant 0$, en utilisant le lemme 1.2 et la proposition 1.7, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n \underset{x>1}{\Rightarrow} x^{\alpha_{n+1}} \leqslant x^{\alpha_n}$$

  donc la suite $(x^{\alpha_n})_{n\geqslant 1}$ est décroissante et elle est minorée par 0 (car elle est clairement positive) donc elle converge dans $\mathbb{R}$. Etant donné que $\alpha_0 - 1 \leqslant a$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $\quad a \leqslant \alpha_n$, on a

$$\forall n \geqslant 1, \quad \alpha_0 - 1 \leqslant \alpha_n \Rightarrow x^{\alpha_0-1} \leqslant x^{\alpha_n} \Rightarrow \underbrace{x^{\alpha_0-1}}_{>0} \leqslant x^a$$

  ce qui montre que $x^a > 0$.

- Si $0 < x < 1$ et $a \geqslant 0$, en utilisant le lemme 1.2 et la proposition 1.7, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n \leqslant \alpha_{n+1} \underset{x<1}{\Rightarrow} x^{\alpha_n} \geqslant x^{\alpha_{n+1}}$$

  donc la suite $(x^{\alpha_n})_{n\geqslant 1}$ est décroissante et elle est minorée par 0 (car elle est clairement positive) donc elle converge dans $\mathbb{R}$.Etant donné que $a \leqslant \alpha_0 + 1$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $\quad \alpha_n \leqslant a$, on en déduit que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \alpha_n \leqslant \alpha_0 + 1 \Rightarrow x^{\alpha_n} \geqslant x^{\alpha_0+1} \Rightarrow x^a \geqslant x^{\alpha_0+1} > 0$$

- Si $0 < x < 1$ et $a \leqslant 0$, en utilisant le lemme 1.2 et la proposition 1.7, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n \underset{x<1}{\Rightarrow} x^{\alpha_{n+1}} \geqslant x^{\alpha_n}$$

  donc la suite $(x^{\alpha_n})_{n\geqslant 1}$ est croissante. Etant donné que $\alpha_0 - 1 \leqslant a$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $\quad a \leqslant \alpha_n$, on en déduit que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \alpha_0 - 1 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_0 \underset{x<1}{\Rightarrow} x^{\alpha_0-1} \geqslant x^{\alpha_n} \geqslant x^{\alpha_0}.$$

  Par conséquent, la suite $(x^{\alpha_n})_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée donc elle converge dans $\mathbb{R}$. En passant à la limite dans l'encadrement précédent, on obtient que $x^a \geqslant x^{\alpha_0} > 0$.

■

Lemme 1.3
Pour tout réel x strictement positif, la suite $(x^{1/10^n})_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

Preuve :
On procède en trois étapes sucessives :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall h \geqslant 0, \quad (1+h)^n \geqslant 1+nh$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{H}_n)$: «$(1+h)^n \geqslant 1+nh$».
Initialisation $n=0$: On a $(1+h)^0 = 1$ et $1+0.h = 1$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{H}_n)$ soit vraie pour un certain entier n, montrons que $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie.

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)(1+h)^n \underset{1+h\geqslant 0}{\geqslant} (1+h)(1+nh) = 1+(n+1)h + \underbrace{nh^2}_{\geqslant 0} \geqslant 1+(n+1)h$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.
En remplaçant h par $\dfrac{h}{n}$ et en utilisant la croissance de la fonction $\sqrt[n]{\ }$, on obtient

$$\forall h \in \mathbb{R}_+, \quad \left(1+\frac{h}{n}\right)^n \geqslant 1+n.\frac{h}{n} = 1+h \Leftrightarrow 1+\frac{h}{n} \geqslant \sqrt[n]{1+h} = (1+h)^{1/n} \geqslant 1$$

Pour finir, si $x \geqslant 1$, en choisissant $h = x-1 \geqslant 0$ dans l'encadrement précédent et en remplaçant n par 10^n, on a

$$\forall n \geqslant 1, \quad 1 \leqslant x^{1/10^n} \leqslant \underbrace{1+\frac{x-1}{10^n}}_{\to 1} \underset{\text{th. d'encadrement}}{\Rightarrow} x^{1/10^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

Si $0 < x \leqslant 1$ alors $\dfrac{1}{x} \geqslant 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{1/10^n} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x^{1/10^n}} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x^{1/10^n} = \dfrac{1}{1} = 1.$ ∎

Proposition 1.8 (Stricte monotonie de la fonction $a \mapsto x^a$ définie sur $\mathbb{R}$)
Soit $x \in \mathbb{R}_+^\times$.
La fonction $a \mapsto x^a$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *est*

- *strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *si* $x > 1$,
- *strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$ *si* $0 < x < 1$.

Preuve :
Soient a et b deux réels tels que $a < b \Leftrightarrow b-a > 0$. Il existe donc un entier d suffisamment grand tel que $\dfrac{1}{10^d} \leqslant b-a \Leftrightarrow a+\dfrac{1}{10^d} \leqslant b$.
On désigne par $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ les suites des parties décimales respectivement de a et b. D'après le lemme 1.2, quels que soient les signes de a et b, on est assuré que

$$\begin{aligned} \forall n \quad \in \quad \mathbb{N}^\times, \quad & \alpha_n - \frac{1}{10^n} \leqslant a \leqslant \alpha_n + \frac{1}{10^n}, \quad \beta_n - \frac{1}{10^n} \leqslant b \leqslant \beta_n + \frac{1}{10^n} \\ \Rightarrow \quad & \alpha_n + \frac{1}{10^d} - \frac{1}{10^n} \leqslant a + \frac{1}{10^d} \leqslant b \leqslant \beta_n + \frac{1}{10^n} \Rightarrow \alpha_n + \frac{1}{10^d} \leqslant \beta_n + \frac{2}{10^n} \end{aligned}$$

En utilisant les propositions 1.7 et 1.5, on obtient

$$\begin{aligned} x > 1 : \forall n \geqslant 1, \quad & x^{\alpha_n + 1/10^d} \leqslant x^{\beta_n + 2/10^n} \Leftrightarrow x^{\alpha_n} x^{1/10^d} \leqslant x^{\beta_n} (x^2)^{1/10^n} \underset{\lim\limits_{n\to+\infty}}{\Rightarrow} x^a x^{1/10^d} \leqslant x^b \\ & \underset{x^{1/10^d}>1}{\Rightarrow} x^a < x^a x^{1/10^d} \leqslant x^b \Rightarrow x^a < x^b \\ x < 1 : \forall n \geqslant 1, \quad & x^{\alpha_n + 1/10^d} \geqslant x^{\beta_n + 2/10^n} \Leftrightarrow x^{\alpha_n} x^{1/10^d} \geqslant x^{\beta_n} (x^2)^{1/10^n} \underset{\lim\limits_{n\to+\infty}}{\Rightarrow} x^a x^{1/10^d} \geqslant x^b \\ & \underset{x^{1/10^d}<1}{\Rightarrow} x^a > x^a x^{1/10^d} \geqslant x^b \Rightarrow x^a > x^b \end{aligned}$$

∎

Proposition 1.9 (Règles de calculs sur les puissances d'exposant réel)
Pour tous réels a, b et pour tous réels strictement positifs x, y, on a

$$\begin{aligned}
0^a &= 0 \text{ si } a > 0, \quad 1^a = 1, \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a, \quad (xy)^a = x^a y^a, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, \\
(x^a)^b &= x^{ab}, \quad x^a x^b = x^{a+b}, \quad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}
\end{aligned}$$

Preuve :
Les deux premières formules ont été démontrées dans la preuve du théorème 1.2. Pour les autres, on désigne par $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ les suites des parties décimales respectivement de a et b. En utilisant la proposition 1.5, on a

$$\begin{aligned}
(xy)^a &= \lim_{n\to+\infty} (xy)^{\alpha_n} = \lim_{n\to+\infty} (x^{\alpha_n} y^{\alpha_n}) = \left(\lim_{n\to+\infty} x^{\alpha_n}\right)\left(\lim_{n\to+\infty} y^{\alpha_n}\right) = x^a y^a \\
\left(\frac{x}{y}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x^{\alpha_n}}{y^{\alpha_n}}\right) = \frac{\lim_{n\to+\infty} x^{\alpha_n}}{\lim_{n\to+\infty} y^{\alpha_n}} = \frac{x^a}{y^a}
\end{aligned}$$

On remarque ensuite que $(-\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ désigne la suite des parties décimales de a donc

$$x^{-a} = \lim_{n\to+\infty} x^{-\alpha_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha_n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} x^{\alpha_n}} = \frac{1}{x^a} \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^a = \frac{1^a}{x^a} = \frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

D'après le lemme 1.2, quels que soient les signes de a et b, on a

$$\begin{aligned}
\forall n &\in \mathbb{N}^\times, \quad \alpha_n - \frac{1}{10^n} \leqslant a \leqslant \alpha_n + \frac{1}{10^n}, \quad \beta_n - \frac{1}{10^n} \leqslant b \leqslant \beta_n + \frac{1}{10^n} \\
&\Rightarrow \alpha_n + \beta_n - \frac{2}{10^n} \leqslant a + b \leqslant \alpha_n + \beta_n + \frac{2}{10^n}
\end{aligned}$$

On suppose provisoirement que $x > 1$. En utilisant la proposition 1.8), on a

$$\begin{aligned}
x^{\alpha_n+\beta_n-2/10^n} &\leqslant x^{a+b} \leqslant x^{\alpha_n+\beta_n+2/10^n} \Leftrightarrow x^{\alpha_n} x^{\beta_n} (x^{-2})^{1/10^n} \leqslant x^{a+b} \leqslant x^{\alpha_n} x^{\beta_n} (x^2)^{1/10^n} \\
\underset{\lim_{n\to+\infty}}{\Rightarrow} x^a x^b &\leqslant x^{a+b} \leqslant x^a x^b \Leftrightarrow x^{a+b} = x^a x^b
\end{aligned}$$

Si $0 < x < 1$ alors $\dfrac{1}{x} > 1$ donc

$$x^{a+b} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-(a+b)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-a} \left(\frac{1}{x}\right)^{-b} = x^a x^b$$

En remarquant que $x^b x^{a-b} = x^{b+(a-b)} = x^a$, on en déduit que $x^{a-b} = \dfrac{x^a}{x^b}$. Il reste à établir la formule $(x^b)^a = x^{ab}$. On suppose provisoirement que $x > 1$.

- Si a est un réel quelconque et b est un rationnel positif. Si $x > 1$, on a

$$\begin{aligned}
\forall n &\in \mathbb{N}^\times, \quad \alpha_n - \frac{1}{10^n} \leqslant a \leqslant \alpha_n + \frac{1}{10^n} \Rightarrow \alpha_n b - \frac{b}{10^n} \leqslant ab \leqslant \alpha_n b + \frac{b}{10^n} \Rightarrow x^{\alpha_n b - b/10^n} \leqslant x^{ab} \leqslant x^{\alpha_n b + b/10^n} \\
&\Leftrightarrow x^{\alpha_n b} (x^{-b})^{1/10^n} \leqslant x^{ab} \leqslant x^{\alpha_n b} (x^b)^{1/10^n} \Leftrightarrow (x^b)^{\alpha_n} (x^{-b})^{1/10^n} \leqslant x^{ab} \leqslant (x^b)^{\alpha_n} (x^b)^{1/10^n}
\end{aligned}$$

  En appliquant le théorème 1.2 en remplaçant x par x^b puis en passant à la limite dans l'encadrement précédent, on obtient

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall b \in \mathbb{Q}_+, \quad (x^b)^a \leqslant x^{ab} \leqslant (x^b)^a \Leftrightarrow x^{ab} = (x^b)^a$$

- Si a est un réel quelconque et b est un réel positif, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \alpha_n - \frac{1}{10^n} \leqslant a \leqslant \alpha_n + \frac{1}{10^n} \Rightarrow \alpha_n b - \frac{b}{10^n} \leqslant ab \leqslant \alpha_n b + \frac{b}{10^n} \Rightarrow x^{\alpha_n b - b/10^n} \leqslant x^{ab} \leqslant x^{\alpha_n b + b/10^n}$$
$$\Leftrightarrow \quad x^{\alpha_{nb}}(x^{-b})^{1/10^n} \leqslant x^{ab} \leqslant x^{\alpha_n b}(x^b)^{1/10^n} \Leftrightarrow (x^b)^{\alpha_n}(x^{-b})^{1/10^n} \leqslant x^{ab} \leqslant (x^b)^{\alpha_n}(x^b)^{1/10^n}$$

En appliquant le théorème 1.2 en remplaçant x par x^b puis en passant à la limite dans l'encadrement précédent, on obtient

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall b \in \mathbb{Q}_+, \quad (x^b)^a \leqslant x^{ab} \leqslant (x^b)^a \Leftrightarrow x^{ab} = (x^b)^a$$

- Si a est un réel quelconque et b est un réel négatif, alors $-b \geqslant 0$ et l'on a

$$x^{ab} = x^{(-a)(-b)} = (x^{-b})^{-a} = \left(\frac{1}{x^{-b}}\right)^a = (x^b)^a.$$

Si $0 < x < 1$ et a, b sont deux réels quelconques, on a

$$x^{ab} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-ab} = \left[\left(\frac{1}{x}\right)^b\right]^{-a} = [x^a]^b.$$

■

Proposition 1.10
Soit a un réel.

1. *Si $a > 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a = +\infty$.*
   En outre, elle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ dont la réciproque est la fonction $x \to x^{1/a}$.
2. *Si $a < 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ est continue sur $\mathbb{R}_+^{\times}$ et on a $\lim\limits_{x \to 0^+} x^a = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^a = 0$.*
   En outre, elle réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^{\times}$ sur $\mathbb{R}_+^{\times}$ dont la réciproque est la fonction $x \mapsto x^{1/a}$.

Preuve :

1. <u>Continuité</u> : Puisque $a > 0$, il existe deux rationnels r_1 et r_2 strictement positifs tels que $r_1 \leqslant a \leqslant r_2$. Commençons par montrer la continuité en 0. Si $0 < x < 1$, En utilisant la proposition 1.8 on a

$$\forall x \in]0,1[: x^{r_1} \geqslant x^a \geqslant 0$$

   D'après la proposition 1.6, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{r_1} = 0^{r_1} = 0$. Le théorème d'encadrement peut s'appliquer ce qui nous montre que $\lim\limits_{x \to 0} x^a = 0 = 0^a$ ce qui justifie la continuité en 0.
   Montrons la continuité en tout réel $x_0 > 0$. Soit $x > 0$, en remarquant que

$$x > x_0 \Leftrightarrow \frac{x}{x_0} > 1, \quad x < x_0 \Leftrightarrow \frac{x}{x_0} < 1,$$

   la proposition 1.8 appliquée au réel $\frac{x}{x_0}$ nous donne

$$\forall x > x_0 : \left(\frac{x}{x_0}\right)^{r_1} \leqslant \left(\frac{x}{x_0}\right)^a \leqslant \left(\frac{x}{x_0}\right)^{r_2}, \quad \forall x \in]0, x_0[: \left(\frac{x}{x_0}\right)^{r_1} \geqslant \left(\frac{x}{x_0}\right)^a \geqslant \left(\frac{x}{x_0}\right)^{r_2}$$

   Puisque $\lim\limits_{x \to 1} x^r = 1^r = 1$ lorsque $r \in \mathbb{Q}$ (d'après la proposition 1.6), on en déduit que

$$\lim_{x \to x_0^+} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{r_1} = \lim_{x \to x_0^-} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{r_1} = \lim_{x \to x_0^+} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{r_2} = \lim_{x \to x_0^-} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{r_2} = 1$$

En appliquant le théorème d'encadrement aux deux encadrements précédents, on a

$$\lim_{x\to x_0^-}\left(\frac{x}{x_0}\right)^a = \lim_{x\to x_0^+}\left(\frac{x}{x_0}\right)^a = 1$$

ce qui démontre que

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{x}{x_0}\right)^a = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{x^a}{x_0^a} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} x^a = x_0^a.$$

Nous venons donc de justifier la continuité de la fonction $x \mapsto x^a$ en tout réel $x_0 > 0$ et comme elle est continue en 0, on est assuré de sa continuité sur $\mathbb{R}_+$.

Monotonie : Soient x et y deux réels strictement positifs avec $x < y$. Puisque $a > 0$, il existe un rationnel $r > 0$ tel que $a > r$. D'après la proposition 1.8 appliqué au réel $\frac{y}{x} > 1$ et la proposition 1.6, on a

$$1 = 1^r < \left(\frac{y}{x}\right)^r < \left(\frac{y}{x}\right)^a \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^a > 1 \Leftrightarrow \frac{y^a}{x^a} > 1 \Leftrightarrow y^a > x^a$$

$\underline{\lim_{x\to+\infty} x^a}$: Il existe un entier n tel que $na > 1$. En utilsant la proposition 1.8, on a

$$\forall x > 1, \quad x^{na} > x^1 = x \Leftrightarrow (x^a)^n > x \Leftrightarrow x^a > \sqrt[n]{x}$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$, le théorème d'encadrement montre que $\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$.

Bijection : La fonction $x \mapsto x^a$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\left[0, \lim_{x\to+\infty} x^a\right[= [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$.

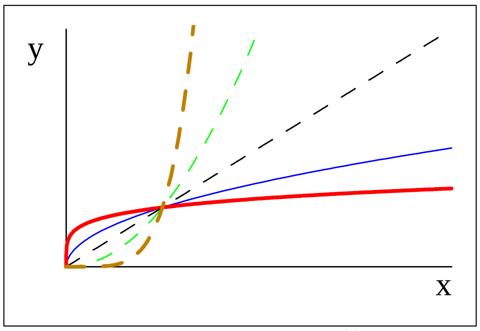
Calcul de la réciproque : Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\left(x^{1/a}\right)^a = x^{a/a} = x^1 = x$ donc $x^{1/a}$ est un antécédent de x par $x \mapsto x^a$ qui appartient à $\mathbb{R}_+$. L'antécédent étant unique, on en déduit que $x^{1/a}$ est cet unique antécédent donc la réciproque de la fonction $x \mapsto x^a$ est la fonction $x \mapsto x^{1/a}$.

2. Si $a < 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad x^a = \frac{1}{x^{-a}}$. Etant donné que $-a > 0$, la fonction $x \mapsto x^{-a}$ réalise une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ donc de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ (en particulier, elle est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^\times$) et comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ réalise une bijection strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\times$, on en déduit que la fonction $x \mapsto x^a = \frac{1}{x^{-a}}$ réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ dont la réciproque est la fonction $x \mapsto \left(\frac{1}{x}\right)^{-1/a} = x^{1/a}$ $((f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1})$.

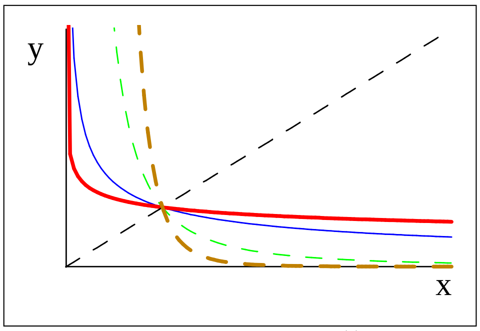
■

Représentation graphique des fonctions $x \mapsto x^a$.

En train fin, la fonction $x \mapsto x^a$ et en trait discontinu sa fonction réciproque $x \mapsto x^{1/a}$. Plus le trait est épais, plus l'exposant a est grand.



$x \mapsto x^a$ pour $a \in \mathbb{R}_+^\times$



$x \mapsto x^a$ pour $a \in \mathbb{R}_-^\times$

Lemme 1.4
Pour tout réel strictement positif, la fonction $a \mapsto \dfrac{x^a - 1}{a}$ *est croissante sur* $\mathbb{R}^\times$.

Preuve :
Notons f_x la fonction $a \mapsto \dfrac{x^a - 1}{a}$.
Si $x = 1$, il s'agit de la fonction $a \mapsto \dfrac{1^a - 1}{a} = 0$ qui est croissante. On suppose désormais $x \in \mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\}$.
Croissance sur $\mathbb{N}$: Soit n un entier naturel. Puisque $x \neq 1$, on a la classique formule

$$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = 1 + x + \cdots + x^n$$

puis en remarquant que

$$\forall x \in]0, 1[, \quad x^n \leqslant \begin{cases} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{cases}, \quad \forall x > 1, \quad x^n \geqslant \begin{cases} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{cases}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
\forall x &> 1, \quad \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \leqslant \underbrace{x^n + x^n + \cdots + x^n}_{n+1 \text{ fois}} = (n+1)x^n \underset{x-1>0}{\Leftrightarrow} x^{n+1} - 1 \leqslant (n+1)x^n(x-1) \\
&\Leftrightarrow \quad x^{n+1} - 1 \leqslant (n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n \\
\forall x &\in]0, 1[, \quad \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \geqslant \underbrace{x^n + x^n + \cdots + x^n}_{n+1 \text{ fois}} = (n+1)x^n \underset{x-1<0}{\Leftrightarrow} x^{n+1} - 1 \leqslant (n+1)x^n(x-1) \\
&\Leftrightarrow \quad x^{n+1} - 1 \leqslant (n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n \\
&\Rightarrow \quad \forall x > 1, \quad x^{n+1} - 1 \leqslant (n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n \Leftrightarrow (n+1)x^n - 1 \leqslant nx^{n+1} \\
&\Leftrightarrow \quad (n+1)x^n - (n+1) \leqslant nx^{n+1} - n \Leftrightarrow (n+1)\left[x^n - 1\right] \leqslant n\left[x^{n+1} - 1\right] \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^n - 1}{n} \leqslant \frac{x^{n+1} - 1}{n+1} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad f_x(n) \leqslant f_x(n+1)
\end{aligned}$$

Croissance sur $\mathbb{Z}^\times$. En remplaçant x par $\dfrac{1}{x}$ dans la majoration précédente, on obtient que

$$\begin{aligned}
\forall x &> 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \frac{\frac{1}{x^n} - 1}{n} \leqslant \frac{\frac{1}{x^{n+1}} - 1}{n+1} \underset{\times x^{n+1}>0}{\Leftrightarrow} \frac{x^{-n} - 1}{n} \leqslant \frac{x^{-n-1} - 1}{n+1} \underset{\times(-1)<0}{\Leftrightarrow} \frac{x^{-n-1} - 1}{-n-1} \leqslant \frac{x^{-n} - 1}{-n} \\
&\Leftrightarrow \quad f_x(-n-1) \leqslant f_x(-n)
\end{aligned}$$

ce qui nous fournit la croissance sur $\mathbb{Z}_-^\times$. Comme on dispose de la croissance sur $\mathbb{N}^\times$, pour justifier la croissance de f_x sur $\mathbb{Z}^\times$, il suffit de montrer que $f_x(-1) \leqslant f_x(1)$ ce qui est vrai en vertu du calcul suivant

$$f_x(1) - f_x(-1) = \frac{x - 1}{1} - \frac{x^{-1} - 1}{-1} = x - 1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0 \Rightarrow f_x(-1) \leqslant f_x(1).$$

Croissance sur $\mathbb{Q}^\times$: Soient r et s deux rationnels non nuls tels que $r \leqslant s$. Quitte à les mettre au même dénominateur, on peut supposer que $r = \dfrac{m}{n}$ et $s = \dfrac{m'}{n}$ avec m, m' deux entiers relatifs tels que $m \leqslant m'$ et n un entier naturel non nul. Puisque $x^{1/n} > 0$, la croissance de la fonction $f_{x^{1/n}}$ sur $\mathbb{Z}^\times$ nous donne

$$\begin{aligned}
f_{x^{1/n}}(m) &\leqslant f_{x^{1/n}}(m') \Leftrightarrow \frac{\left(x^{1/n}\right)^m - 1}{m} \leqslant \frac{\left(x^{1/n}\right)^{m'} - 1}{m'} \Leftrightarrow \frac{x^{m/n} - 1}{m} \leqslant \frac{x^{m'/n} - 1}{m'} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^r - 1}{nr} \leqslant \frac{x^s - 1}{ns} \underset{\times n>0}{\Leftrightarrow} \frac{x^r - 1}{r} \leqslant \frac{x^s - 1}{s}
\end{aligned}$$

<u>Croissance sur $\mathbb{R}^\times$</u> : Soient a et b deux réels non nuls tels que $a < b$. On désigne par $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ les suites des parties décimales respectivement de a et b. D'après le lemme 1.2, quels que soient les signes de a et b, on est assuré que

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad & \alpha_n - \frac{1}{10^n} \leqslant a \leqslant \alpha_n + \frac{1}{10^n}, \quad \beta_n - \frac{1}{10^n} \leqslant b \leqslant \beta_n + \frac{1}{10^n} \\ \Rightarrow \quad & \alpha_n - \frac{1}{10^n} \leqslant a \leqslant b \leqslant \beta_n + \frac{1}{10^n} \Rightarrow \alpha_n - \frac{1}{10^n} \leqslant \beta_n + \frac{1}{10^n}\end{aligned}$$

En utilisant la croissance de la fonction f_x sur $\mathbb{Q}^\times$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad f_x\left(\alpha_n - \frac{1}{10^n}\right) \leqslant f_x\left(\beta_n + \frac{1}{10^n}\right) \Leftrightarrow \frac{x^{\alpha_n}(x^{-1})^{1/10^n} - 1}{\alpha_n - 1/10^n} \leqslant \frac{x^{\beta_n}x^{1/10^n} - 1}{\beta_n + 1/10^n}$$

En utilisant les lemmes 1.2, 1.3 et le théorème 1.2, on peut faire tendre n vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent ce qui nous donne

$$\forall x > 0, \quad \frac{x^a - 1}{a} \leqslant \frac{x^b - 1}{b}$$

■

Proposition 1.11
Le domaine de dérivabilité de la fonction $x \mapsto x^a$ est $\mathbb{R}_+$ si $a \geqslant 1$ et sur $\mathbb{R}_+^\times$ si $a < 1$.
Sur son domaine de dérivabilité, on a $(x^a)' = a.x^{a-1}$.

Preuve :
<u>Dérivabilité en 0</u> : Si $a < 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ n'est pas définie en 0 donc elle ne peut être dérivable en 0 !. Si $a = 0$, il s'agit de la fonction $x \mapsto 1$ que l'on a déjà étudié. Si $a > 0$, on a on a Puisque l'on a $\lim_{x\to 0} x^a =$, on en déduit que

$$\forall x > 0, \quad \frac{x^a - 0^a}{x} = \frac{x^a}{x} = x^{a-1} \underset{x\to 0^+}{\to} \begin{cases} 0 & \text{si } a-1 > 0 \Leftrightarrow a > 1 \\ 1 & \text{si } a-1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \\ +\infty & \text{si } a-1 < 0 \Leftrightarrow a < 1 \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable en 0 si et seulement $a \geqslant 1$ et dans ce cas, on a la formule attendue pour la dérivée puisque $a.0^{a-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$
<u>Dérivabilité en 1</u> : D'après le lemme, on a

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad \forall a \geqslant 1, \quad & \frac{x^a - 1}{a} \geqslant \frac{x^1 - 1}{1} = x - 1 \Leftrightarrow x^a - 1 \geqslant a(x-1) \\ \forall x > 0, \quad \forall a \leqslant 1, \quad & \frac{x^a - 1}{a} \leqslant \frac{x^1 - 1}{1} = x - 1 \Leftrightarrow x^a - 1 \leqslant a(x-1)\end{aligned}$$

En remplaçant x par $\dfrac{1}{x}$ dans les encadrements précédents, on obtient que

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad \forall a \geqslant 1, \quad & \frac{1}{x^a} - 1 \geqslant a\left(\frac{1}{x} - 1\right) \underset{\times x^a > 0}{\Leftrightarrow} 1 - x^a \geqslant ax^{a-1}(1-x) \Leftrightarrow ax^{a-1}(x-1) \geqslant x^a - 1 \\ \Rightarrow \quad & \forall x > 0, \quad \forall a \geqslant 1, \quad ax^{a-1}(x-1) \geqslant x^a - 1 \geqslant a(x-1) \\ \forall x > 0, \quad \forall a \leqslant 1, \quad & \frac{1}{x^a} - 1 \leqslant a\left(\frac{1}{x} - 1\right) \underset{\times x^a > 0}{\Leftrightarrow} 1 - x^a \leqslant ax^{a-1}(1-x) \Leftrightarrow ax^{a-1}(x-1) \leqslant x^a - 1 \\ \Rightarrow \quad & \forall x > 0, \quad \forall a \leqslant 1, \quad ax^{a-1}(x-1) \leqslant x^a - 1 \leqslant a(x-1)\end{aligned}$$

En distinguant les cas $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$ et $x < 1 \Leftrightarrow x - 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\forall a \geqslant 1, \quad & \forall x > 1, \quad a \leqslant \frac{x^a - 1}{x - 1} \leqslant ax^{a-1}, \quad \forall x < 1, \quad ax^{a-1} \leqslant \frac{x^a - 1}{x - 1} \leqslant a \\ \forall a \leqslant 1, \quad & \forall x > 1, \quad ax^{a-1} \leqslant \frac{x^a - 1}{x - 1} \leqslant a, \quad \forall x < 1, \quad a \leqslant \frac{x^a - 1}{x - 1} \leqslant ax^{a-1}\end{aligned}$$

Etant donné que $ax^{a-1} \underset{x\to 1}{\to} a$ (même pour $a=1$ puisque $1.x^{1-1}=1$), on peut appliquer le théorème des gendarmes

$$\begin{aligned}
\forall a &\geqslant 1, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^a-1}{x-1} = a = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^a-1}{x-1} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^a-1}{x-1} = a \\
\forall a &\leqslant 1, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^a-1}{x-1} = a = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^a-1}{x-1} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^a-1}{x-1} = a
\end{aligned}$$

ce qui démontre la dérivabiltié de la fonction $x \mapsto x^a$ en $x=1$ quel que soit a dans $\mathbb{R}$.

Dérivabilité en $x_0 > 0$: Soit $a \in \mathbb{R}$ et $x_0 > 0$. Lorsque $x \to x_0$, on a $\dfrac{x}{x_0} \to 1$ donc $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^a - 1}{\dfrac{x}{x_0} - 1} = 1$, ce qui nous donne

$$\frac{x^a - x_0^a}{x - x_0} = \frac{x_0^a}{x_0} . \frac{\dfrac{x^a}{x_0^a} - 1}{\dfrac{x}{x_0} - 1} = x_0^{a-1} \frac{\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^a - 1}{\dfrac{x}{x_0} - 1} \underset{x\to x_0}{\to} a.x_0^{a-1}.$$

■

2 Exponentielles et logarithmes

2.1 Exponentielles et logarithmes en base a

Définition 2.1 (Exponentielles en base a)
Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times$, on a appelle fonction exponentielle en base a, la fonction $x \mapsto a^x$ définie sur $\mathbb{R}$. On la note parfois $\exp_a$, *i.e.* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x$.

Remarque 2.1
Auparavant, on considérait également les réels x^a mais on étudiait la fonction $x \mapsto x^a$ (i.e. l'exposant est fixé et la base varie) tandis qu'ici on étudie la fonction $x \mapsto a^x$ (i.e. l'exposant varie et la base est fixe).

Proposition 2.1 (Règles de calculs sur les exponentielles)
Pour tous réels a, b strictement positifs, pour tous réels x, y, on a

$$a^0 = 1, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x, \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^x a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

Preuve :
C'est la simple réécriture de la proposition 1.9 ■

Proposition 2.2 ($x \to a^x$ réalise une bijection continue et strictement monotone de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^\times$)
Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times \setminus \{1\}$, la fonction $x \mapsto a^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^\times$. En outre,

- *si $a > 1$, c'est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et* $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0$
- *si $a < 1$, c'est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et* $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = 0, \quad \lim\limits_{x\to -\infty} a^x = +\infty$.

Preuve :
Monotonie : La stricte monotonie de la fonction $x \mapsto a^x$ a été établie à la proposition 1.8.

- **Premier cas** $a > 1$.
  Continuité de $x \mapsto a^x$: Par croissance de la fonction $x \mapsto a^x$, on a

$$\forall x \geqslant 0, \quad a^x \geqslant a^0 = 1, \quad \forall x \leqslant 0, \quad a^x \leqslant a^0 = 1$$

En appliquant ces inégalités ainsi que le lemme 1.4, on obtient que

$$\begin{aligned}
\forall x &\in \,]0,1[\,, \quad \frac{a^0-1}{x} \leqslant \frac{a^x-1}{x} \leqslant \frac{a^1-1}{1} \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{a^x-1}{x} \leqslant a-1 \Leftrightarrow 0 \leqslant a^x-1 \leqslant (a-1)x \\
\forall x &\in \,]-1,0[\,, \quad \frac{a^{-1}-1}{-1} \leqslant \frac{a^x-1}{x} \leqslant \frac{a^0-1}{1} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{a} \leqslant \frac{a^x-1}{x} \leqslant 0 \Leftrightarrow x.\frac{a-1}{a} \leqslant a^x-1 \leqslant 0
\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}(a-1)x = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} x\dfrac{a-1}{a} = 0$, l'application du théorème d'encadrement nous donne $\lim\limits_{x\to 0^+}(a^x-1) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-}(a^x-1)$ donc $\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} a^x = 1 = a^0$ ce qui montre la fonction de $x \mapsto a^x$ en 0.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on a $a^x = a^{(x-x_0)+x_0} = a^{(x-x_0)}a^{x_0} \underset{x\to x_0}{\to} 1 \times a^{x_0} = a^{x_0}$ ce qui démontre la continuité de $x \mapsto a^x$ en x_0 quel que soit x_0 dans $\mathbb{R}$ donc cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.
Limites en $\pm\infty$: En raison de la croissance sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{a^x-1}{x}$, on a

$$\forall x \geqslant 1, \quad \frac{a^x-1}{x} \geqslant \frac{a^1-1}{1} \Leftrightarrow \frac{a^x-1}{x} \geqslant a-1 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} a^x-1 \geqslant x(a-1) \Leftrightarrow a^x \geqslant 1+x(a-1)$$

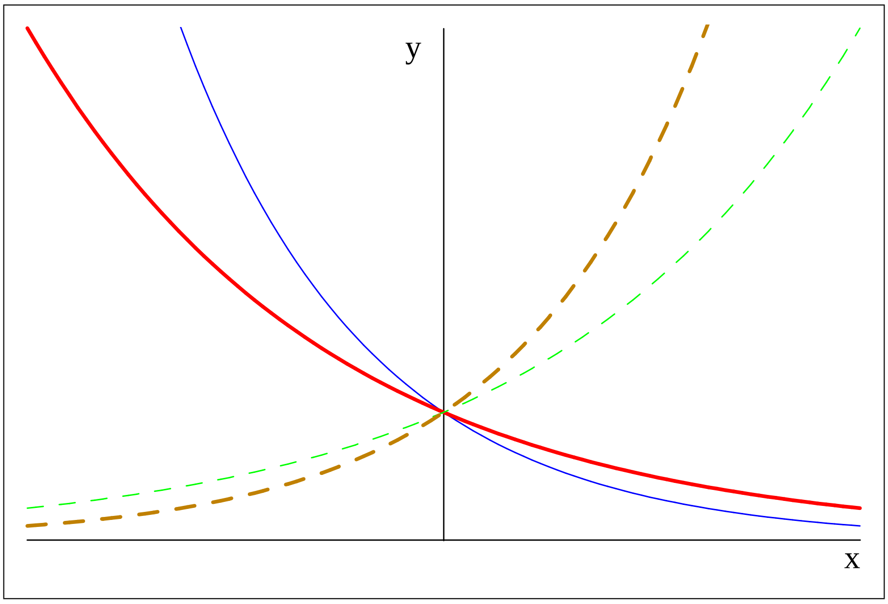
Etant donné que $a-1>0$, on est assuré que $\lim\limits_{x\to+\infty}[1+x(a-1)] = +\infty$ et le théorème d'encadrement entraine que $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. Par conséquent, lorsque $x \to -\infty$, $-x \to +\infty$ donc $a^{-x} \underset{x\to-\infty}{\to} +\infty$ ce qui entraine que $a^x = \dfrac{1}{a^{-x}} \underset{x\to-\infty}{\to} 0$.
Bijectivité : La fonction $x \mapsto a^x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} a^x, \lim\limits_{x\to+\infty} a^x\right[=]0,+\infty[= \mathbb{R}_+^\times$.

- **Second cas** $a \in \,]0,1[$: Etant donné que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-x}$, la fonction $x \mapsto a^x$ est la composée de la fonction $x \mapsto -x$ qui est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et qui réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ par la fonction $x \mapsto \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ qui est continue, strictement croissante (car $\dfrac{1}{a} \in \,]0,1[$) sur $\mathbb{R}$ et qui réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc la fonction $x \mapsto a^x$ est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ avec

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{x} \underset{1/a>1}{=} 0, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{x} \underset{1/a>1}{=} +\infty.$$

■

Représentation graphique de $x \mapsto a^x$. Plus le trait devient épais, plus a est grand. En trait continu, $a \in \,]0,1[$, en trait discontinu $\dfrac{1}{a} > 1$.



$x \mapsto a^x$

Définition 2.2 (Logarithmes en base a)
Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\}$, on appelle fonction logarithme en base a la fonction notée $\log_a$ définie comme étant la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto a^x$.

Corollaire 2.1 (Résolution des équations $a^x = b$, $\log_a(x) = b$ et des inéquations correspondantes)
Soient $a \in \mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\}$ et b, x deux réels. On a les équivalences suivantes

1. ***Equations*** *:*

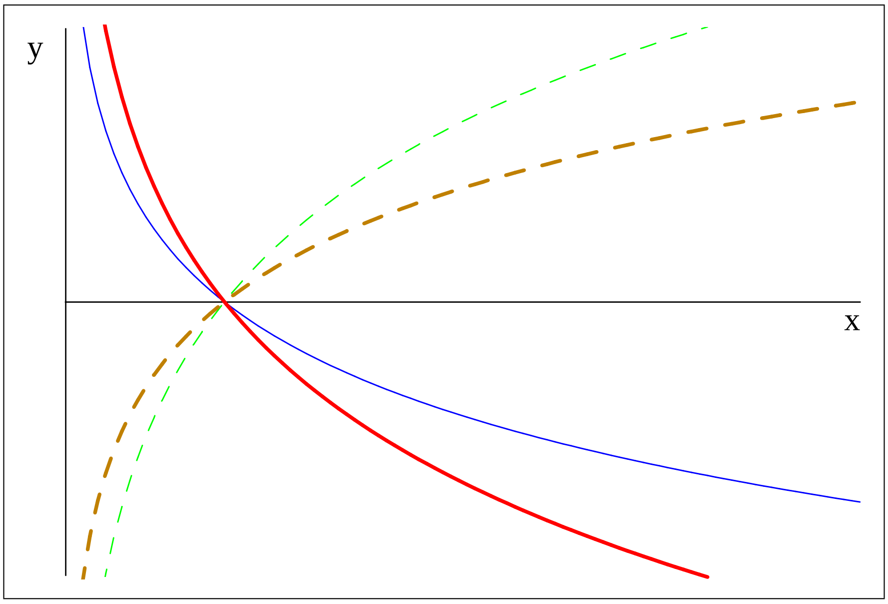
   - *L'équation $a^x = b$ n'admet aucune solution réelle si $b \leqslant 0$ et elle admet une unique solution réelle si $b > 0$ qui est $x = \log_a(x)$.*
     Par conséquent, on a l'équivalence
     $$(a^x = b) \Leftrightarrow (b \in \mathbb{R}_+^\times \text{ et } x = \log_a(b)).$$
   - *L'équation $\log_a(x) = b$ admet une unique solution réelle qui est $x = a^b$. Par conséquent, on a l'équivalence*
     $$(\log_a(x) = b) \Leftrightarrow x = a^x.$$

2. ***Inéquations*** *:*

   - *Si $a > 1$ alors on a les équivalences suivantes*
     $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall b \in \mathbb{R}_+^\times, \quad (a^x < b) \Leftrightarrow (x < \log_a(b)), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \forall b \in \mathbb{R}, \quad (\log_a(x) < b) \Leftrightarrow (x < a^b)$$
   - *Si $a \in \left]0,1\right[$ alors on a les équivalences suivantes*
     $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall b \in \mathbb{R}_+^\times, \quad (a^x < b) \Leftrightarrow (x > \log_a(b)), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \forall b \in \mathbb{R}, \quad (\log_a(x) < b) \Leftrightarrow (x > a^b)$$

Preuve :
Cela résulte immédiatement de la bijectivité de $x \mapsto a^x$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ et de sa stricte monotonie. ■

Représentation graphique de $x \mapsto \log_a(x)$. On a représenter les réciproques des fonctions $x \mapsto a^x$ considérées dans les représentations graphiques ci-dessus. Plus le trait devient épais, plus a est grand. En trait continu, $a \in \left]0,1\right[$, en trait discontinu $\dfrac{1}{a} > 1$.



$x \mapsto \log_a(x)$

Proposition 2.3 (Règles de calculs sur les logarithmes)
On a les formules suivantes

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & \log_a(a^x) = x \\ \forall x > 0, & a^{\log_a(x)} = x \end{cases}, \quad \begin{cases} \log_a(1) = 0 \\ \log_a(a) = 1 \end{cases},$$

En outre, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\}$ et tous réels strictement positifs x, y, on a

$$\log_{1/a}(x) = -\log_a(x) = \log_a\left(\frac{1}{x}\right), \quad \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y).$$

Preuve :
Les deux premières formules résultent du cas général des bijections $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^\times}$. Ensuite, $\log_a(1)$ et $\log_a(x)$ s'obtiennent en choisissant $x = 0$ et $x = 1$ dans la première formule.
Pour les autres, on a .

- $\log_{1/a}(x)$ est l'unique réel b tel que $x = \left(\frac{1}{a}\right)^b \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^{-b} \\ x = \frac{1}{a^b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b = \log_a(x) \\ a^b = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\log_a(x) \\ b = \log_a\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$

  donc $\log_{1/a}(x) = -\log_a(x) = \log_a\left(\frac{1}{x}\right)$.

- $\left.\begin{array}{l} a^{\log_a(xy)} = xy \\ a^{\log_a(x)+\log_a(y)} = a^{\log_a(x)} a^{\log_a(y)} = xy \end{array}\right\} \Rightarrow a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}$
  $\underset{\text{bijectivité de } x \mapsto a^x}{\Leftrightarrow} \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

- $\log_a(y) + \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(y.\frac{x}{y}) = \log_a(x) \Rightarrow \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

- $\left.\begin{array}{l} a^{\log_a(x^y)} = x^y \\ a^{y\log_a(x)} = \left(a^{\log_a(x)}\right)^y = (x)^y = x^y \end{array}\right\} \Rightarrow a^{\log_a(x^y)} = a^{y\log_a(x)} \underset{\text{bijectivité de } x \mapsto a^x}{\Leftrightarrow} \log_a(x^y) = y\log_a(x)$

■

La proposition suivantes montre que la connaissance d'une fonction logarithme dans une base donnée permet de construire les fonctions logarithmes en toute base.

Proposition 2.4 (Formules de changement de base pour les logarithmes)
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \log_b(x) = \log_b(a)\log_a(x)$$

Preuve :
Soit $x \in \mathbb{R}_+^\times$, on a

$$\left.\begin{array}{r} b^{\log_b(a)\log_a(x)} = \left(b^{\log_b(a)}\right)^{\log_a(x)} = (a)^{\log_a(x)} = x \\ b^{\log_b(x)} = x \end{array}\right\} \Rightarrow b^{\log_b(a)\log_a(x)} = b^{\log_b(x)} \underset{\text{bijectivité de } x\mapsto a^x}{\Leftrightarrow} \log_b(a)\log_a(x) = \log_b(x)$$

■

Proposition 2.5 ($x \to \log_a(x)$ réalise une bijection continue et strictement monotone de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $\mathbb{R}$)
Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\}$, la fonction $x \mapsto \log_a(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$, strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^\times$ et elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $\mathbb{R}_+$. En outre,

- *si $a > 1$, c'est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$*
- *si $a < 1$, c'est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty$.*

Preuve :
Cela résulte du théorème de bijection continu. ■

2.2 Dérivabilité des fonctions exponentielles et logarithmes

Théorème 2.1 (Dérivabilité de $x \mapsto a^x$)
Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times$, la fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $\ln(a)$ désigne sa dérivée en 0 alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (a^x)' = \ln(a)a^x$$

En outre, on a

$$\forall a > 0, \quad \frac{a-1}{a} \leqslant \ln(a) \leqslant a - 1.$$

En particulier, $\ln(a) < 0$ si $a < 1$, $\ln(1) = 0$ et $\ln(a) > 0$ si $a > 1$.

Preuve :
Dérivabilité en 0 : Il s'agit de montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{a^x - a^0}{x - 0} = \dfrac{a^x - 1}{x}$ admet une limite finie en 0. En utilisant le lemme 1.4, on est assuré que la fonction $x \mapsto \dfrac{a^x - 1}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^\times$ et elle est bornée sur $[-1, 0[$ et sur $]0, 1]$ puisque l'on a

$$\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \quad \frac{a^{-1} - 1}{-1} \leqslant \frac{a^x - 1}{x} \leqslant \frac{a - 1}{1} \Leftrightarrow \frac{a - 1}{a} \leqslant \frac{a^x - 1}{x} \leqslant a - 1$$

D'après le théorème de monotonie, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{a^x - 1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{a^x - 1}{x}$ existent dans $\mathbb{R}$. En outre, à l'aide du changement de variable $t = -x \Leftrightarrow x = -t$ et le fait que $\lim\limits_{x\to 0} a^x = a^0 = 1$ (par continuité de cette fonction en 0), on en déduit que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{a^{-t} - 1}{-t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{a^{-t}(1 - a^t)}{-t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{a^t}\frac{a^t - 1}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{a^t - 1}{t}$$

Les limites gauche et droite en 0 étant identiques, on peut affirmer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$ existe dans $\mathbb{R}$ ce qui montre la dérivabilité de $x \mapsto a^x$ en 0. On note $\ln(a)$ cette limite.
Dérivabilité sur $\mathbb{R}$: Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = \frac{a^{(x-x_0)+x_0} - a^{x_0}}{x - x_0} = \frac{a^{x-x_0}a^{x_0} - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0}\frac{a^{(x-x_0)} - 1}{x - x_0} \underset{x\to x_0}{\to} a^{x_0}\ln(a)$$

Pour finir, en faisant tendre x vers 0 dans l'encadrement $\dfrac{a-1}{a} \leqslant \dfrac{a^x - 1}{x} \leqslant a - 1$, on en déduit l'encadrement de $\ln(a)$ attendu. ■

Définition 2.3 (Définition de la fonction $\ln$**)**
La fonction est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ *par*

$$\forall a > 0, \quad \ln(a) = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

Théorème 2.2 (Dérivabilité de $x \mapsto \log_a(x)$**)**
Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\}$, *la fonction* $x \mapsto \log_a(x)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^\times$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \log_a'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$$

Preuve :
Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^\times$, il s'agit de montrer que $\lim_{x \to x_0} \dfrac{\log_a(x) - \log_a(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{1}{x_0 \ln(a)}$. Pour cela, on considère le changement de variable $t = \log_a(x) \underset{a \neq 1}{\Leftrightarrow} x = a^t$. Lorsque $x \to x_0$, par continuité de $\log_a$, on a $t \to \log_a(x_0) = t_0$ où t_0 désigne l'unique réel tel que $x_0 = a^{t_0}$. On a donc

$$\frac{\log_a(x) - \log_a(x_0)}{x - x_0} = \frac{t - t_0}{a^t - a^{t_0}} = \frac{1}{\dfrac{a^t - a^{t_0}}{t - t_0}}$$

D'après le théorème 2.1, on a $\lim_{t \to t_0} \dfrac{a^t - a^{t_0}}{t - t_0} = \ln(a) a^{t_0}$ (c'est la définition de la dérivée en t_0 !) qui est non nul puisque a étant différent de 1, on a $\ln(a) \neq 0$. Par conséquent, on obtient que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\log_a(x) - \log_a(x_0)}{x - x_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{\dfrac{a^t - a^{t_0}}{t - t_0}} = \frac{1}{\ln(a) a^{t_0}} = \frac{1}{\ln(a) x_0}$$

ce qui démontre la dérivabilité de $\log_a$ en tout réel strictement positif ainsi que la formule attendue. ■

Proposition 2.6 (Explicitation des fonctions $\log_a$ **à l'aide de la fonction** $\ln$**)**
Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\}$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^\times$, *on a*

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Preuve :
Soient $a \in \mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\}$ et $t \in \mathbb{R}$, en utilisant les règles de calculs sur les exponentielles, on a

$$\ln(a^t) = \lim_{x \to 0} \frac{(a^t)^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{a^{tx} - 1}{x} \underset{u = tx}{=} \lim_{u \to 0} \frac{a^u - 1}{\dfrac{u}{t}} = t \lim_{u \to 0} \frac{a^u - 1}{u} = t \ln(a).$$

En choisissant $t = \log_a(a)$, on obtient

$$\ln(a^{\log_a(x)}) = \log_a(x) \ln(a) \Leftrightarrow \ln(x) = \log_a(x) \ln(a).$$

D'autre part, d'après le théorème 1.11, si $a \neq 1$, on est assuré que $\ln(a) \neq 0$ ce qui nous permet d'effectuer la division par $\ln(a)$. ■

En combinant tous les résultats précédents sur les fonctions exponentielles et logarithmes, on obtient

Théorème 2.3 ($\ln$ **est un logarithme et ses conséquences)**

1. *La fonction* $\ln$ *est continue et elle réalise une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}_+^\times$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Il existe un unique réel* e *tel que* $\ln(e) = 1$ *et* $\ln$ *est la fonction logarithme de base* e, *i.e* $\ln = \log_e$.
   En outre, on a $e \geqslant 2$.

3. *La réciproque de la fonction* $\ln$ *est la fonction* $x \mapsto e^x$ *qui est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (e^x)' = e^x$.
   On note également $\exp$ *la fonction* $x \mapsto e^x$*, i.e.* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x$.

4. *La fonction* $\ln$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^\times$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

5. *On dispose des formules suivantes*

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1, \quad e^0 = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \ln(a^x) = x\ln(a), \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^0 = 1, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad (e^x)^y = e^{xy}, \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\}, \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^\times,, \quad a^x = e^{x\ln(a)}$$

Preuve :
On utilise les propositions 2.2, 2.3, 2.5, 2.6 ainsi que les théorèmes 2.1 et 2.2

1. Fixons $a > 1$, on a $\ln(a) > 0$ et la fonction $\log_a$ est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $\ln = \dfrac{\log_a}{\ln(a)}$ aussi.

2. Etant donné que $1 \in \mathbb{R}$, on est assuré qu'il existe un et un seul antécédent à 1 par ln, i.e. d'une unique solution à l'équation $\ln(x) = 1$. On note e cette solution donc $\ln(e) = 1$ et d'après la proposition précédente, on a immédiatement $\log_e = \ln$. En outre, on a

$$\forall a > 0, \quad \ln(a) \leqslant a - 1 \Rightarrow \ln(e) = 1 \leqslant e - 1 \Leftrightarrow e \geqslant 2$$

   est assuré que $e > 1$ puisque $\ln(e) = 1 > 0$.

3. Toutes les autres formules résultent des résultats cités au début de la preuve avec $a = e > 1$.

■

Méthode 1 (Etude de suites $(u_n)^{v_n}$ et de fonctions $(u(x))^{v(x)}$)

1. *Pour étudier une suite de la forme* $(u_n)^{v_n}$ *(en général, la base* u_n *dépendant de* n *ou bien la base* u_n *et l'exposant* v_n *dépendant de* n*), on écrit* $(u_n)^{v_n}$ *à l'aide des fonctions exponentielles et logarithmes i.e.* $(u_n)^{v_n} = \exp(v_n \ln(u_n))$.

2. *Pour étudier une fonction (domaine de définition, variations, limites, continuité, dérivabilité, asymptotes, etc.) de la forme* $x \mapsto (u(x))^{v(x)}$*, on commence* systématiquement *par l'écrire sous forme exponentielle, i.e. on écrit* $(u(x))^{v(x)} = \exp(v(x)\ln(x))$ *(cette égalité ne modifiant absolument rien à l'étude puisque les fonctions* $x \mapsto a^x$ *et* $x \mapsto \exp(x\ln(a))$ *sont égales !)*

Proposition 2.7 (Explicitation et évaluation numérique de e)

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad e \simeq 2.718\,281\,828 \pm 10^{-9}.$$

Preuve :
On commence par remarquer que $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(\dfrac{1}{n}\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)$. Ensuite, étant donné que

$$\ln'(1) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} \underset{t=x-1}{\Leftrightarrow} \lim_{t\to0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

et comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on est assuré que

$$\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} e^1 = e$$

L'évaluation numérique fournit résulte d'un calcul direct de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ■

2.3 Comparaison de la croissance des fonctions puissances, exponentielles et logarithmes

Proposition 2.8 (Comparaison puissances, exponentielles et logarithmes, cas simple)
On a :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a^x}{|x|} = \lim_{x\to+\infty} a^x, \quad \lim_{x\mapsto\pm\infty} |x|\, a^x = \lim_{x\to-\infty} a^x, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to0^+} x\log_a(x) = 0$$

ce qui l'on peut retenir ainsi : «pour une forme indéterminée concernant un produit ou un quotient, l'exponentielle impose sa limite au logarithme qui l'impose à la puissance».

Preuve :

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{|x|}$. Si $a > 1$: En utilisant le lemme 1.4 avec $a > 1$, on a

$$\forall x \geqslant 1, \quad \Rightarrow \frac{a^x-1}{x} \geqslant \frac{a^1-1}{1} \underset{x>0}{\Leftrightarrow} a^x \geqslant 1 + x(a-1) \geqslant x(a-1)$$

En remplaçant x par $\frac{x}{2}$ dans la majoration précédente (donc en demandant que $x \geqslant 2$ pour $\frac{x}{2} \geqslant 1$ et que l'on puisse faire la substitution) , on a

$$\Rightarrow \forall x \geqslant 2, \quad a^{x/2} \geqslant \frac{x(a-1)}{2} \Leftrightarrow (a^x)^{1/2} \geqslant \frac{x(a-1)}{2} \underset{a^x\geqslant0,x(a-1)\geqslant0}{\Leftrightarrow} a^x \geqslant \left(\frac{x(a-1)}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{a^x}{x} \geqslant x\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$$

En donné que $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = +\infty$, le théorème d'encadrement nous montre que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{|x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty = \lim_{x\to+\infty} a^x.$$

Si $a < 1$ alors $\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|x|} = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \left(a^x \times \frac{1}{|x|}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{|x|} = 0 = \lim_{x\to+\infty} a^x.$$

- $\lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{|x|}$. On effectue le changement de variable $t = -x \Leftrightarrow x = -t$, lorsque $x \to -\infty$, $t \to +\infty$ et l'on a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{|x|} = \lim_{t\to+\infty} \frac{a^{-t}}{|t|} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^t}{|t|} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^t = \lim_{x\to-\infty} a^x$$

- $\lim_{x\to\pm\infty} |x|\, a^x$. On a

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x|\, a^x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{|x|\, a^{-x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{|x|\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \frac{1}{\lim_{x\to\pm\infty} |x|\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \frac{1}{\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \lim_{x\to\pm\infty} a^x$$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \to 0} x \log_a(x)$. On effectue le changement de variable $t = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^t$.
  Lorsque $x \to +\infty$, $t \to +\infty$ si $a > 1$ et $t \mapsto -\infty$ si $a < 1$.
  Lorsque $x \to 0^+$, $t \to -\infty$ si $a > 1$ et $t \to +\infty$ si $a < 1$.

$$\begin{aligned} a &> 1 : \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a(x)}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{a^t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\frac{a^t}{t}} = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} x \log_a(x) = \lim_{t \to -\infty} (ta^t) = 0 \\ a &< 1 : \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a(x)}{x} = \lim_{t \to -\infty} \frac{t}{a^t} = \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{\frac{a^t}{t}} = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} x \log_a(x) = \lim_{t \to +\infty} (ta^t) = 0 \end{aligned}$$

■

Théorème 2.4 (Comparaison puissances, exponentielles et logarithmes)
Pour $a, b \in \mathbb{R}_+^\times$ et $c \in \mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\}$, on a :

$$\lim_{x \to \pm\infty} |x|^b a^x = \lim_{x \to +\infty} a^x, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{|\log_c(x)|^b}{x^a} = 0, \quad \lim_{x \mapsto 0^+} x^a |\log_c(x)|^b = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{|\log_c(x)|^b} = \lim_{x \to \pm\infty} a^x$$

ce qui l'on peut retenir ainsi : «pour une forme indéterminée concernant un produit ou un quotient, l'exponentielle impose sa limite au logarithme qui l'impose à la puissance».

Preuve :
On utilise les règles de calculs sur les puissances, exponentielles et logarithmes.

- $\lim_{x \to \pm\infty} |x|^b a^x$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} |x|^b a^x &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(|x| a^{x/b}\right)^b = \left(\lim_{x \to \pm\infty} |x| \left(a^{1/b}\right)^x\right)^b = \left(\lim_{x \to \pm\infty} \left(a^{1/b}\right)^x\right)^b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\left(a^{1/b}\right)^x\right)^b \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(a^{1/b}\right)^{xb} = \lim_{x \to \pm\infty} a^x \end{aligned}$$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_c x)^b}{x^a}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{|\log_c(x)|^b}{x^a} &= \lim_{x \to +\infty} \left(\left|\frac{\log_c(x)}{x^{a/b}}\right|\right)^b = \left(\left|\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_c(x)}{x^{a/b}}\right|\right)^b \underset{t = x^{a/b}}{=} \left(\left|\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_c(t^{b/a})}{t}\right|\right)^b \\ &= \left(\left|\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{b}{a} \log_c(t)}{t}\right|\right)^b = \left(\frac{b}{a}\right)^b \left(\left|\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_c(t)}{t}\right|\right)^b = 0 \end{aligned}$$

- $\lim_{x \mapsto 0^+} x^a |\log_c(x)|^b$:

$$\lim_{x \mapsto 0^+} x^a |\log_c(x)|^b \underset{t = 1/x}{=} \lim_{t \to +\infty} t^{-a} \left|\log_c(t^{-1})\right|^b = \lim_{t \to +\infty} \frac{|-\log_c(t)|^b}{t^a} = \lim_{t \to +\infty} \frac{|\log_c(t)|^b}{t^a} = 0$$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{|\log_c(x)|^b}$: Si $a < 1$ et $x \mapsto +\infty$, il n'y a pas de forme indéterminée et la limite est nulle qui est celle de a^x en $+\infty$.
  Si $a > 1$ et $x \mapsto +\infty$. On a

$$\frac{a^x}{|\log_c(x)|^b} = \frac{a^x}{x} \times \frac{x}{|\log_c(x)|^b} = \frac{a^x}{x} \times \frac{1}{\frac{|\log_c(x)|^b}{x}}$$

Puisque l'on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|\log_c(x)|^b}{x}=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{|\log_c(x)|^b}=+\infty$, la forme indéterminée est levée et l'on

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{|\log_c(x)|^b}=+\infty=\lim_{x\to+\infty}a^x$$

■

3 Petite histoire des logarithmes

Les fonctions exponentielles $x\mapsto a^x$ sont anciennes (via leurs tables de calculs) et leurs fonctions réciproques (les tables de calculs lus à «l'envers», les fonctions logarithmes $\log_a$ ont été inventées au cours du Moyen-Age par le mathématicien **Mohamed Ybn Moussa Al-KHAWAREZMI**, un savant arabe issu de la ville persane appelée « Khawarezm ». Ce savant développa par ailleurs l'Algèbre, terme provenant de l'arabe « Al-Jabr », qui signifie compensation, sous-entendu « la compensation par la recherche de la variable inconnue X afin d'équilibrer les résultats des calculs ».

La fonction ln s'appelle traditionnellement logarithme népérien (originellement, il s'agit du logarithme naturel) en l'honneur de **John Napier** (qui se traduit par **Neper** en latin) qui découvrit cette fameuse fonction (en langage moderne car il faudra près d'un siècle pour définir la notion de fonction !) au début du XVII-ième siècle en étudiant l'erreur commise en changant l'exposant sans toucher à la base a est-il proportionnel à l'erreur commise (en langage monderne, il étudie le taux d'accroissement de la fonction $x\mapsto a^x$ en 0). ? La réponse est positive et le coefficient de proportionnalité est une fonction de la base a, c'est notre fameux $\ln(a)$.

Sa découverte a lieu 50 ans avant la naissance du calcul différentiel (la fameuse dérivée) donc il n'a jamais pensé à la définir comme «l'unique primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ s'annulant en 1» comme on le considère parfois dans certains livres d'enseignement. En fait, ce point de vue semble au premier abord plus rapide mais il repose sur l'utilisation de théorèmes puissants (existence de primitives aux fonctions continues, une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle, etc.) dont la justification nécessite des outils de l'enseignement supérieur alors que la démarche suivie par ce texte permet d'utiliser uniquement des résultats accessibles (et démontrables) au niveau Lycée.

Dans Wikipédia, on peut lire : «En 1588, pour faciliter ses calculs, l'astronome suisse **Jost Bürgi** développa le premier système logarithmique connu.

Lorsqu'en 1614, **John Napier** ou **Neper** publie son traité *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, il ne songe pas qu'il est en train de créer de nouvelles fonctions, mais seulement des tables de correspondances (logos = rapport, relation, arithmeticos = nombre) entre deux séries de valeurs possédant la propriété suivante : à un produit dans une colonne, correspond une somme dans une autre. Ces tables de correspondances ont été créées initialement pour simplifier les calculs trigonométriques apparaissant dans les calculs astronomiques et seront utilisées quelques années plus tard par **Kepler**. En 1619, apparaît une œuvre posthume de **Neper** *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*, où il explique comment construire une table logarithmique (voir l'article table de logarithmes pour en comprendre le principe). Son travail sera poursuivi et prolongé par le mathématicien anglais **Henry Briggs** qui publie les tables de logarithmes décimaux et précise les méthodes d'utilisation des tables pour calculer des sinus, retrouver des angles de tangentes... Le logarithme décimal est parfois appelé logarithme de **Briggs** en son honneur.
En 1647, lorsque **Grégoire de Saint-Vincent** travaille sur la quadrature de l'hyperbole, il met en évidence une nouvelle fonction qui se trouve être la primitive de la fonction $x\mapsto 1/x$ s'annulant en 1 mais c'est seulement **Huygens** en 1661 qui remarquera que cette fonction se trouve être une fonction logarithme particulière : le logarithme naturel.

La notion de fonction, la correspondance entre les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmes n'apparaissent que plus tardivement après le travail de **Leibniz** sur la notion de fonction (1697).»