Notions fondamentales sur les fonctions

Abdellah Bechata

www.mathematiques.fr.st

1 Généralités sur les fonctions numériques d'une variable réelle

Définition 1.1 (fonction numérique d'une variable réelle)

1. *Une fonction numérique d'une variable réelle est la donnée*

   - *d'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$*
   - *d'un processus f qui à tout élément x de D associe un unique nombre réel noté $f(x)$.*

   Une telle fonction numérique d'une variable réelle se note traditionnellement $f:\left\{\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)\end{array}\right.$ et l'on prononce «f va de D dans $\mathbb{R}$ et à tout x associe (le réel) $f(x)$» (voire par abus de notation f) et l'ensemble D s'appelle son domaine de définition et on le note traditionnellement $\mathcal{D}_f$, i.e. $\mathcal{D}_f \underset{\text{par définition}}{=} D$.

   Deux fonctions $f:\left\{\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)\end{array}\right.$ et $g:\left\{\begin{array}{ccc} D' & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x)\end{array}\right.$ sont égales si et seulement si elles ont même ensemble de définition et elles suivent le même processus. Autrement dit, on a

   $$\boxed{f = g \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} D = D' \\ \forall x \in D = D', \quad f(x) = g(x)\end{array}\right.}$$

   Par conséquent, on a

   $$\boxed{f \neq g \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} D \neq D' \\ \text{ou} \\ \text{il existe } x_0 \in D \cap D' \text{ tel que } f(x_0) \neq g(x_0)\end{array}\right.}$$

   Par la suite, afin de simplifier l'exposé, on désignera par «fonction» toute «fonction numérique d'une variable réelle».

2. *Il est fréquent que l'on dispose à priori d'un processus $x \mapsto f(x)$ sans pour autant que l'ensemble D soit donné (donc ne dispose pas d'une fonction au sens de la définition 1), ceci est fréquent en géométrie, en physique, en chimie, en économie, etc. Dans ce cas, on appelle ensemble de définition du processus $x \mapsto f(x)$ l'ensemble des nombres réels x pour lesquels $f(x)$ existe.*

   Cet ensemble est noté traditionnellement $\mathcal{D}_f$ et l'on désigne alors par f la fonction $f:\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)\end{array}\right.$.

   Ainsi $\mathcal{D}_f$ est tout à la fois le domaine de définition de la fonction f et du processus $x \mapsto f(x)$.

3. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.*

   - *On dit qu'une fonction f est définie sur A si son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ contient A.*
   - *Soit f est une fonction définie sur A,*
     - *on appelle restriction de f à A la fonction $f_{|A}$ dont le domaine de définition est A et qui est définie par $\forall x \in A, \quad f_{|A}(x) = f(x)$. Autrement dit, on a*

       $$f_{|A}:\left\{\begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)\end{array}\right.$$

     - *on note $f(A)$ l'ensemble des images des éléments de A par f, autrement dit*

       $$f(A) = \{f(x), \quad x \in A\}$$

Remarque 1 (sur les pièges classiques)

1. Contrairement à une idée fort répandue auprès des étudiants, une fonction n'est pas la donnée d'une expression $f(x)$! Par exemple,

- l'expression «$f(x) = x^2$» ne désigne pas une fonction (personnellement, je ne sais pas ce que cela désigne mais les étudiants adorent !)
- les expressions «$x \mapsto x^2$» ou «$f : x \mapsto x^2$» ne désignent par une fonction mais un processus (c'est déjà mieux qu'auparavant, on progresse :-))
- les expressions «la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $[0,1]$» (on y est presque) ou «la fonction f définie sur $[0,1]$ par $\forall x \in [0,1]\,,\quad f(x) = x^2$» (c'est parfait) ou «la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ » (c'est parfait ... puisque c'est la définition !) désignent la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$

2. La variable x dans l'expression $f : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ est muette, c'est-à-dire que les fonctions
$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & f(a) \end{array} \right. ,\quad h : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & f(z) \end{array} \right. ,\quad k : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & f(\theta) \end{array} \right.$$
sont toutes égales à la fonction f (une fonction est la donnée d'un ensemble et d'un processus, le nom de la variable d'entrée du processus n'ayant aucune influence sur le processus lui-même)

3. Une fonction n'est pas définie nécessairement par une unique formule algébrique. Par exemple, les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par
$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x < 0 \\ x & \text{si} & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} & x > 1 \end{array} \right. ,\quad g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \end{array} \right.$$
est ... une fonction définie par plusieurs expressions selon certaines conditions vérifiées par x.
En outre, une fonction n'est pas nécessairement définie par une (ou plusieurs) expressions algébriques. Par exemple, on peut considérer la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{array}{rcl} \forall x & \in & \mathbb{R}, \\ h(x) & = & \text{la plus grande solution réelle de l'équation } t^7 + t = x \end{array}$$
bien que l'on ne sache pas calculer effectivement $h(x)$ à l'aide d'expressions connues.

4. Le domaine de définition de la fonction $a : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$ est $]0,2]$ et celui de la fonction $b : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$ est $]0,+\infty[$. Par conséquent, les fonctions a et b sont distinctes puisqu'elles ne possèdent pas le même domaine de définition bien qu'elles suivent le même processus. Par contre, on peut affirmer que a est la restriction de b à l'ensemble $]0,2]$, i.e. $a = b_{|]0,2]}$.
Le processus $c : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}^\times$ et l'on désigne par c la fonction $c : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\times & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$.

5. Si l'on dispose d'une fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$, son domaine de définition est D (cf. 1) alors que le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ du processus $x \mapsto f(x)$ contient D (puisqu'il est bien défini sur D par définition d'une fonction) et il est en général strictement plus grand que D (cf. 2).

Définition 1.2 (Image, antécédent et représentation graphique d'une fonction)
Soit f une fonction dont le domaine de définition est $\mathcal{D}_f$.

1. *Pour tout réel a appartenant à $\mathcal{D}_f$, le réel $f(a)$ s'appelle l'image de a par f.*
2. *Si b est un réel, on appelle antécédent de b par f tout réel a tel que $f(a) = b$ (bien entendu, il est nécessaire que $a \in \mathcal{D}_f$). Autrement dit, a est un antécédent de b par f si et seulement b est l'image de a par f.*
3. *Soit $\mathcal{R}$ un repère du plan (non nécessairement orthonormé).*
   - *On appelle représentation graphique de f dans le repère $\mathcal{R}$ l'ensemble noté $\mathcal{C}_f$ constitué des points du plan dont l'ordonnée est l'image par f de son abscisse. Autrement dit*
$$\mathcal{C}_f = \{M(x,y),\quad x \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = f(x)\}$$

- *Par un abus de langage courant, si f est définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, on appelle représentation graphique de f sur A dans le repère $\mathcal{R}$ l'ensemble constitué des points du plan dont l'abscisse appartient à A et l'ordonnée est l'image par f de cette abscisse. Autrement dit, il s'agit de l'ensemble $\{M(x,y), \quad x \in A \text{ et } y = f(x)\}$*

Définition 1.3 (Opérations sur les fonctions numériques)

1. *Soient f et g deux fonctions, α et β deux réels.*
   On désigne par $\alpha.f + \beta.g$ et $f.g$ les fonctions définies sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par
   $$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g, \quad (\alpha.f+\beta.g)(x) \underset{\text{par définition}}{=} \alpha.f(x) + \beta.g(x), \quad (f.g)(x) \underset{\text{par définition}}{=} f(x).g(x)$$
   On désigne par $\dfrac{f}{g}$ la fonction définie sur $\mathcal{D}_f \cap \{x \in \mathcal{D}_g \quad / \quad g(x) \neq 0\}$ par
   $$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \{x \in \mathcal{D}_g \quad / \quad g(x) \neq 0\}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) \underset{\text{par définition}}{=} \frac{f(x)}{g(x)}.$$
2. *Soient f, g deux fonctions. Si l'ensemble $\{x \in \mathcal{D}_f \quad / \quad f(x) \in \mathcal{D}_g\}$ est non vide, on désigne par $g \circ f$ la fonction définie sur $\{x \in \mathcal{D}_f \quad / \quad f(x) \in \mathcal{D}_g\}$ par*
   $$\forall x \in \{x \in \mathcal{D}_f \quad / \quad f(x) \in \mathcal{D}_g\}, \quad (g \circ f)(x) \underset{\text{par définition}}{=} g(f(x))$$

Exercice 1.1
Donner le domaine de définition des fonctions $f+g$, $\dfrac{f}{g}$, $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivants :

1. (*on admet, provisoirement, les propriétés usuelles de la fonction* $\sqrt{}$) $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -1-x^2 \end{array}\right.$ et $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}\right.$
2. $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\times & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$ et $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}\right.$
3. $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}\right.$ et $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-1 \end{array}\right.$

Solution 1.1

1. Etant donné que l'on a
   $$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g & = & \mathbb{R} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+ \\ \mathcal{D}_f \cap \{x \in \mathcal{D}_g \quad / \quad g(x) \neq 0\} & = & \mathbb{R} \cap \left\{x \in \mathbb{R}_+ \quad / \quad \sqrt{x} \neq 0\right\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}_+^\times = \mathbb{R}_+^\times \\ \{x \in \mathcal{D}_f \quad / \quad f(x) \in \mathcal{D}_g\} & = & \left\{x \in \mathbb{R} \quad / \quad -1-x^2 \in \mathbb{R}_+\right\} = \emptyset \\ \{x \in \mathcal{D}_g \quad / \quad g(x) \in \mathcal{D}_f\} & = & \left\{x \in \mathbb{R}_+ \quad / \quad \sqrt{x} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R} \end{array}$$
   les fonctions $f+g$, $\dfrac{f}{g}$ et $f \circ g$ ont pour domaine de définition respectifs $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^\times$ et $\mathbb{R}_+$ tandis que la fonction $g \circ f$ n'est pas définie car son domaine de définition est vide.
2. Etant donné que l'on a
   $$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g & = & \mathbb{R}^\times \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^\times \\ \mathcal{D}_f \cap \{x \in \mathcal{D}_g \quad / \quad g(x) \neq 0\} & = & \mathbb{R}^\times \cap \left\{x \in \mathbb{R} \quad / \quad x^2+1 \neq 0\right\} \underset{x^2+1 \geqslant 1 > 0}{=} \mathbb{R}^\times \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^\times \\ \{x \in \mathcal{D}_f \quad / \quad f(x) \in \mathcal{D}_g\} & = & \left\{x \in \mathbb{R}^\times \quad / \quad \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^\times \\ \{x \in \mathcal{D}_g \quad / \quad g(x) \in \mathcal{D}_f\} & = & \left\{x \in \mathbb{R} \quad / \quad x^2+1 \in \mathbb{R}^\times\right\} \underset{x^2+1 \geqslant 1 > 0}{=} \mathbb{R} \end{array}$$
   les fonctions $f+g$, $\dfrac{f}{g}$ et $f \circ g$ ont toutes pour domaine de définition $\mathbb{R}^\times$ tandis que la fonction $g \circ f$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}$.
3. Etant donné que l'on a
   $$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g & = & \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \\ \mathcal{D}_f \cap \{x \in \mathcal{D}_g \quad / \quad g(x) \neq 0\} & = & \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R}\backslash\{1\}) = \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ \{x \in \mathcal{D}_f \quad / \quad f(x) \in \mathcal{D}_g\} & = & \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad 2x+1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \\ \{x \in \mathcal{D}_g \quad / \quad g(x) \in \mathcal{D}_f\} & = & \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad x-1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \end{array}$$
   les fonctions $f+g$, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont toutes pour domaine de définition $\mathbb{R}^\times$ tandis que la fonction $\dfrac{f}{g}$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}\backslash\{1\}$..

Remarque 2 (Pièges à éviter)

- Le domaine de définition de $f \circ g$ est distinct de celui de $g \circ f$, comme le montre le cas numéro 2 de l'exercice précédent, donc les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ ne peuvent être égales.
- La fonction $g \circ f$ être défini (i.e. posséder un domaine de définition non vide) sans que la fonction $f \circ g$ ne soit pas définie (i.e. un domaine de définition vide) comme nous le montre le cas numéro 1. de l'exercice précédent.
- Si les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont toutes deux définies, elles ne sont pas nécessairement égales sur l'intersection de leurs domaines de définition respectifs. Par exemple, en considérant la cas numéro 3 de l'exercice précédent, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-1) = 2(x-1)+1 = 2x-1 \\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-1) = (2x-1)+1 = 2x \end{cases}$$

  donc $(g \circ f)(0) = -1 \neq 0 = (f \circ g)(0)$.

Définition 1.4 (parité, périodicité, monotonie)
Soit f une fonction et A un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$. On dit que

- *f est paire (resp. impaire) si*

$$\begin{cases} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad -x \in \mathcal{D}_f & \textit{(domaine de définition symétrique par rapport à } 0) \\ \textit{et} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(-x) = f(x) & \textit{(resp.} f(-x) = -f(x). \end{cases}$$

- *f est T-périodique si et seulement si*

$$\begin{cases} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x+T \in \mathcal{D}_f & \textit{(domaine de définition stable par translation de pas } T) \\ \textit{et} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

- *f est croissante (resp. décroissante) sur A lorsque*

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad \textit{(resp. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

- *f est strictement croissante (resp. décroissante) sur A lorsque*

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \textit{(resp. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

- *f est monotone sur A si elle est soit croissante sur A, soit décroissante sur A.*

Définition 1.5 (fonction minorée, majorée, bornée, extremum d'une fonction)
Soit f une fonction définie sur un ensemble A. On dit que

- *f est minorée sur A s'il existe un réel m tel que $\forall x \in A, \quad m \leqslant f(x)$.*
- *f est majorée sur A s'il existe un réel M tel que $\forall x \in A, \quad f(x) \leqslant M$.*
- *f est bornée sur A si elle est minorée et majorée sur A.*
- *f admet un minimum global (resp. local) sur A s'il existe $x_0 \in A$ (resp. $x_0 \in A$ et $\alpha > 0$) tel que*

$$\forall x \in A \textit{ (resp. } \forall x \in A \cap]x_0 - a, x_0 + a[), \quad f(x_0) \leqslant f(x).$$

  Dans ce cas, on dit que f admet un minimum global (resp. local) de f sur A qui est $f(x_0)$.
  Lorsqu'il s'agit d'un minimum global sur A, on note soit $\min\limits_{x \in A} f(x) = f(x_0)$, soit $\min\limits_{A} f = f(x_0)$,

- *f admet un maximum global (resp. local) sur A s'il existe $x_0 \in A$ (resp. $x_0 \in A$ et $\alpha > 0$) tel que*

$$\forall x \in A \textit{ (resp. } \forall A \in A \cap]x_0 - a, x_0 + a[), \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

  Dans ce cas, on dit que f admet un maximum global (resp. local) sur A qui est $f(x_0)$.
  Lorsqu'il s'agit d'un maximum global sur A, on note soit $\max\limits_{x \in A} f(x) = f(x_0)$, soit $\max\limits_{A} f = f(x_0)$.

- *f admet un extremum global (resp. local) sur A si elle admet un minimum ou un maximum global (resp. local) sur A.*

Les propositions suivantes résultent immédiatement des définitions précédentes.

Proposition 1.1 (Interprétation géométrique de la parité et de la périodicité)
Soit $\mathcal{R}$ un repère (non nécessairement orthonormé) du plan, f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $\mathcal{R}$.

1. *La fonction f est paire (resp. impaire) si et seulement $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (resp. par rapport à l'origine du repère).*
2. *La fonction f est T-périodique si et seulement l'image de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(T, 0)$ est $\mathcal{C}_f$.*

Proposition 1.2 (Opérations sur les fonctions possédant une parité)

1. *Soient f et g deux fonctions, α et β deux réels.*
   - *Si f et g sont deux fonctions paires (resp. impaires) alors $\alpha.f + \beta.g$ est une fonction paire (resp. impaire).*
   - *Si f et g admettent une parité alors $f.g$ admet également une parité qui est donnée par le tableau suivant :*

$f.g$	*paire*	*impaire*	$\leftarrow g$
paire	*paire*	*impaire*	
impaire	*impaire*	*paire*	
$\uparrow$ f			

   - *Si f et g admettent une parité alors $\dfrac{f}{g}$ admet également une parité qui est donnée par le tableau suivant :*

$\dfrac{f}{g}$	*paire*	*impaire*	$\leftarrow g$
paire	*paire*	*impaire*	
impaire	*impaire*	*paire*	
$\uparrow$ f			

2. *Soient f et g deux fonctions possédant une parité et si $g \circ f$ a un domaine de définition non vide, alors $g \circ f$ admet également une parité qui est donnée par le tableau suivant*

$g \circ f$	*paire*	*impaire*	$\leftarrow g$
paire	*paire*	*impaire*	
impaire	*impaire*	*paire*	
$\uparrow$ f			

Proposition 1.3 (Opérations sur les fonctions périodiques)

1. *Soient f et g deux fonctions de même période T et α, β deux réels alors*
   - *quel que soit l'entier relatif n la fonction f est $n.T$ périodique, i.e. $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in A, \quad f(x + n.T) = f(x)$.*
   - *les fonctions $\alpha.f + \beta.g$ et $f.g$ sont T-périodiques.*
   - *la fonction $\dfrac{f}{g}$ est T-périodique*
2. *Soient f et g deux fonctions telles que $g \circ f$ ait un domaine de définition non vide.*
   Si f est T-périodique alors $g \circ f$ est également T-périodique.
3. *Si f est T-périodique alors pour tout réel a non nul, alors la fonction $x \mapsto f(a.x)$ est $\dfrac{T}{a}$-périodique et la fonction $x \mapsto f\left(\dfrac{x}{a}\right)$ est $a.T$-périodique.*

Méthode 1.1 (Réduction du domaine d'étude d'une fonction)
Pour l'étude d'une fonction f définie sur un ensemble A, on commence par réduire l'intervalle d'étude en utilisant les symétries induite par parité et / ou périodicité.

- lorsque la fonction f est paire, on peut faire son étude sur $A \cap \mathbb{R}_+$, en complétant ensuite par symétrie (par rapport à l'axe des ordonnées);
- lorsque la fonction f est impaire, on peut également faire son étude sur $A \cap \mathbb{R}_+$, en complétant ensuite par symétrie centrale par rapport à l'origine du reprère;

- lorsque la fonction f est T-périodique, on peut se contenter de faire son étude sur $A \cap [0, T]$ ou $A \cap \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.
- lorsque la fonction f possède à la fois une parité et une périodicité T, on pourra alors réduire son intervalle d'étude à $A \cap \left[0, \frac{T}{2}\right]$.

2 Continuité, dérivabilité, tangentes.

Définition 2.1 (continuité, dérivabilité)
Soit une fonction f définie sur un ensemble A.
***On suppose que pour tout point** a **de** A, **il existe un réel** $\alpha > 0$ **tel que l'intervalle** $[a - \alpha, a]$ **ou** $[a, a + \alpha]$ **soit contenu dans** A (nous verrons dans un autre chapitre la nécessité d'une telle condition pour éviter les cas pathologiques). Dans la pratique, les ensembles A que l'on considéra vérifieront cette condition.*

- *On dit que f est continue en $a \in A$ si et seulement $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*
- *On dit que f est continue sur A si et seulement si elle est continue en tout élément a de A.*
- *On dit que f est dérivable en $a \in A$ si et seulement si le quotient $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a. Dans ce cas, on note $f'(a)$ cette limite, que l'on nomme nombre dérivée de f au point a. Par conséquent, lorsque cette limite existe et est finie, on a par définition*
$$f'(a) = \lim_{x \mapsto a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$
- *On dit que f est dérivable sur A si et seulement f est dérivable en tout élément a de A.*
Dans ce cas, on appelle fonction dérivée de f la fonction notée f' définie par $a \mapsto f'(a)$.
- *Soit $\mathcal{R}$ un repère (non nécessairement orthonormé) du plan. Lorsque f est dérivable en a, on appelle tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a (i.e. au point $M(a, f(a))$) la droite d'équation*
$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Proposition 2.1 (La dérivabilité entraine la continuité)
Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Preuve :
Il suffit d'utiliser l'égalité algébrique suivante
$$f(x) = f(a) + (x - a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\to} f(a) + (a - a)f'(a) = f(a)$$

■

Remarque 3
La réciproque est fausse, i.e. si f est continue en a alors f n'est pas nécessairement dérivable en a. Il est impératif que le lecteur n'énonce jamais cette propriété comme une vérité .... puisqu'elle est fausse !! Pour s'en convaincre, le lecteur étudiera la continuité et la dérivabilité en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ (que l'on définira rigoureusement dans la prochaine section)

Proposition 2.2 (opérations sur les fonctions continues)

1. *Soient f et g sont deux fonctions continues sur un ensemble A, α et β deux réels. Alors les fonctions $\alpha.f + \beta.g$ et $f.g$ sont continues sur A.*
Plus généralement, une somme finie ou un produit finie de fonctions continues sur A est une fonction continue sur A.
2. *Soient f et g sont deux fonctions continues sur un ensemble A avec g ne s'annulant pas sur A (i.e. $\underline{\forall} a \in A, \quad g(a) \neq 0$) alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur A.*
3. *Soient f et g sont des fonctions continues respectivement sur A et sur $f(A)$. Alors la fonction $g \circ f$ est continue sur A.*

Preuve :
admis (la preuve sera effectuée dans un chapitre ultérieur) ■

Exercice 2.1 (Continuité des fonctions $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$)
Pour tout entier relatif n, montrer que la fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur son domaine de définition.

Solution 2.1
Il est immédiat que pour tout réel a, on a $\lim\limits_{x \to a} x = a$ et $\lim\limits_{x \to a} 1 = 1$ donc les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
Si $n \in \mathbb{N}^\times$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$ donc la fonction $x \mapsto x^n$ est un produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ce qui entraine sa continuité sur $\mathbb{R}$.
Si n est un entier relatif strictement négatif, alors $\forall x \in \mathbb{R}^\times$, on a $x^n \underset{\text{par définition}}{=} \dfrac{1}{x^{-n}}$. La fonction $x \mapsto x^{-n}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ (cf. le point précédent) et ne s'annulant quand $x = 0$ (puisque $-n > 0$), la proposition 2.2 entraine que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{-n}} = x^n$ est continue sur $\mathbb{R}^\times$.

Exercice 2.2
Soient n un entier naturel, $a_0, a_1, .., a_{n-1}, a_n$ des réels. La fonction $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Solution 2.2
La fonction $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ est continue sur $\mathbb{R}$ en appliquant le 1/ de la proposition 2.2 avec les fonctions $x \mapsto x^n, \quad x \mapsto x^{n-1}, .., x \mapsto x, x \mapsto 1$ et en utilisant le corollaire 2.1.

Remarque 4 (piège à éviter)
Pour justifier la continuité d'une fonction, on évitera le réflexe primitif qui consiste à justifier la dérivabilité de la fonction pour obtenir sa continuité. Si cela est toujours utilisé en Lycée, c'est que

- ... la continuité a été éliminée des programmes de Lycée !! (il parait que cela simplifie les choses, cela les obscurcit surtout)
- ... les fonctions étudiées au Lycée sont extrêment simples et elles sont .... toutes dérivables, où du moins on évite que l'étudiant se pose la question aux points posant problème !! (ce qui ne sera plus franchement le cas cette année).

Le seul cas où l'on invoquera l'argument massue «la dérivabilité entraine la continuité» sera lorsque l'exercice .... aura fait justifier précédemment la dérivabilité de la fonction considérée ! (et oui, cela arrive quand même :-))
Pour justifier la continuité d'une fonction donnée, on écrira par contre la fonction considérée comme somme, produit, composée de fonctions dérivables et l'on applique scrupuleusement la proposition 2.2.

Exercice 2.3
La fonction $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2-1}$ est-elle continue sur son ensemble de définition ?

Solution 2.3
On a $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ donc la fonction $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2-1}$ est définie sur $\mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$. En outre, les fonctions $x \mapsto 2x+1$ et $x \mapsto x^2 - 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}, \quad x^2 - 1 \neq 0$ donc la fonction $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2-1}$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. Fiat Lux : on vient de justifier la continuité d'une fonction sans utiliser la dérivabilité (et encore moins la dérivée) !

Proposition 2.3 (opérations sur les fonctions dérivables)

1. *Soient f et g sont deux fonctions dérivables sur un ensemble A, α et β deux réels. Alors les fonctions $\alpha.f + \beta.g$ et $f.g$ sont dérivables sur A et l'on a :*
$$\forall x \in A, \quad (\alpha.f + \beta.g)'(x) = \alpha.f'(x) + \beta.g'(x) \quad (f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$
Plus généralement, une somme ou un produit de fonctions dérivables sur A est une fonction dérivable sur A.
2. *Soient f et g sont deux fonctions définies et dérivables sur un ensemble A avec g ne s'annulant pas sur A (i.e. $\forall x \in A, \quad g(x) \neq 0$) alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur A et l'on a :*
$$\forall x \in A, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$
3. *Soient f et g sont des fonctions définies et dérivables respectivement sur A et $f(A)$. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur A et l'on a :*
$$\forall x \in A, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

Exercice 2.4 (Dérivabilité des fonctions $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$)
Pour tout entier relatif n non nul, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur son domaine de définition et

$$\forall x \in \mathcal{D}_{x\mapsto x^n}, \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

Ce résultat s'étend au cas où $n = 0$ en convenant que $0 \times x^{0-1} = 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Solution 2.4

- Le cas $n = 0$ est immédiat. En effet, Soit $a \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{x^0 - a^0}{x - a} = \dfrac{1-1}{x-a} = 0 \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ donc la fonction $x \mapsto x^0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^0)' = 0 = 0 \times x^{0-1}$ (par la convention que l'on vient de proposer).

- Montrons le résultat lorsque $n \in \mathbb{N}^\times$ à l'aide d'une récurrence sur n en posant $(\mathcal{H}_n)$: «la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^n)' = nx^{n-1}$»
Initialisation $n = 1$: Soit $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{x^1 - a^1}{x-a} = \frac{x-a}{x-a} = 1 \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1 = a^0 = 1 \times a^{1-1}$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_1)$.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{H}_{n+1})$. Les fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (de dérivées respectives $x \mapsto nx^{n-1}$ et $x \mapsto 1$). D'après la proposition 2.3, la fonction $x \mapsto x^n \times x = x^{n+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^{n+1})' = (x^n \times x)' = (x^n)'(x) + (x^n)(x)' = nx^{n-1}.x + x^n.1 = nx^n + x^n = (n+1)x^n$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

- Montrons le résultat lorsque $n \in \mathbb{Z}_-$ (i.e. $n < 0$). Puisque pour tout réel x, on a $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$ et que $-n$ est un entier naturel, on en déduit que la fonction $x \mapsto x^{-n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Etant donné que $x^{-n} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ (puisque $-n$ est un entier naturel non nul), la proposition précédente entraine que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{-n}} = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad (x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = \frac{1'(x^{-n}) - 1(x^{-n})'}{(x^{-n})^2} = \frac{-(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = \frac{n}{x^{-2n+n+1}} = \frac{n}{x^{-n+1}} = n.x^{n-1}$$

Exercice 2.5
Soient n un entier naturel, $a_0, a_1, .., a_{n-1}, a_n$ des réels. La fonction $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Solution 2.5
La fonction $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ est dérivable en appliquant le 1. de la proposition précédente avec les fonctions $x \mapsto x^n, \quad x \mapsto x^{n-1}, .., x \mapsto x, x \mapsto 1$.

Remarque 5 (piège à éviter)
Pour justifier la dérivabilité d'une fonction, on s'interdira définitivement de calculer sa dérivée puis d'étudier le domaine de définitionde cette dérivée.
On écrira par contre la fonction considérée comme somme, produit, composée de fonctions dérivables puis on applique scrupuleusement la proposition 2.3. Remarquez que

- la proposition 2.3 ne vous demande pas de justifier à priori la continuité de la fonction considérée ! (*un raisonnement optimal est celui qui nécessite le <u>minimum</u> de vérifications <u>justes</u> pour obtenir le résultat escompté*)

- la proposition 2.3 est la proposition qui justifie les formules de dérivation que vous avez l'habitude d'utiliser et on utilise une formule uniquement lorsque les hypothèses d'applications sont vérifiées, en clair on est obligé dans tous les cas d'appliquer cette proposition !

Exercice 2.6
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Solution 2.6
Les fonctions $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x^2+1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. En outre, puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2+1 \neq 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2.1 (Justifier la continuité ou la dérivabilité d'une fonction, calculer une dérivée)

1. *Pour justifier la continuité d'une fonction, on s'interdit de justifier au préalable sa dérivabilité (sauf lorsque l'exercice ou le problème a fait justifier la dérivabilité de cette fonction, ce qui arrive parfois). On écrit la fonction considérée comme somme, produit, composée de fonctions continues puis on applique la proposition 2.2.*
   Si cette proposition ne fournit pas la continuité en tous les points considérés, on revient à la définition de la continuité pour étudier les points résiduels.

2. *Pour justifier la dérivabilité d'une fonction, on s'interdit de justifier au préalable sa continuité. On écrit la fonction considérée comme somme, produit, composée de fonctions continues puis on applique la proposition 2.3.*
   Si cette proposition ne fournit pas la dérivabilité en tous les points considérés, on revient à la définition de la dérivabilité pour étudier les points résiduels.

3. *Pour dériver une fonction, on commence .... par justifier qu'elle est dérivable aux points considérés en considérant le point 2. C'est la proposition 2.3 qui justifie la véracité des formules de dérivation que vous souhaitez utiliser !*

3 Variations d'une fonction

Proposition 3.1 (Opérations sur les fonctions monotones)
Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. *L'opposé d'une fonction croissante (resp. décroissante) sur A est une fonction décroissante (resp. croissante) sur A.*
2. *L'inverse d'une fonction strictement positive et croissante (resp. décroissante) sur A est une fonction décroissante (resp. croissante) sur A.*
3. *La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) sur A est une fonction croissante (resp. décroissante) sur A.*
4. *Le produit de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) et positives sur A est une fonction croissante (resp. décroissante) sur A.*
5. *Si f est croissante (resp. décroissante) sur A et g est croissante (resp. décroissante) sur $f(A)$ alors $g \circ f$ est croissante sur A.*
6. *Si f est croissante (resp. décroissante) sur A et g est décroissante (resp. croissante) sur $f(A)$ alors $g \circ f$ est décroissante sur A.*

Preuve :
C'est une conséquence immédiate des définitions et des règles usuelles de calculs sur les inégalités. ∎

Remarque 6
Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes) et négatives sur A alors alors $f.g$ est décroissante (resp. croissante) sur A. En effet, $-f$ et $-g$ sont deux fonctions décroissantes (resp. croissantes) et positives sur A donc $(-f).(-g) = f.g$ est décroissante (resp. croissante) sur A.

Exercice 3.1
Donner la monotonie (sans dériver !) des fonctions suivantes qui sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Solution 3.1
La fonction f est le produit des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x$ qui sont croissantes et positives sur $\mathbb{R}_+$ (resp. négatives sur $\mathbb{R}_-$) donc $f : x \mapsto x \times x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (resp. décroissante sur $\mathbb{R}_-$).
La fonction $p : x \mapsto x^2 + 1$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (resp. décroissante sur $\mathbb{R}_-$) et $p(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$ (resp. $p(\mathbb{R}_-^\times) = [1, +\infty[$) à valeurs positives. Puisque la fonction $q : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\times \supset p(\mathbb{R}_+)$ (resp. $\mathbb{R}_+^\times \supset p(\mathbb{R}_-)$), on en déduit, par composition des fonctions monotones, que $g = q \circ p$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (resp. croissante sur $\mathbb{R}_-$).

Proposition 3.2 (Condition suffisante de monotonie (resp. stricte monotonie))
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur l'intervalle I
Si f' est positive (resp. négative) sur I, alors f est croissante (resp. décroissante) sur I. Si de plus f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur tout intervalle borné inclus dans I, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Preuve :
admis (la preuve sera établie dans un chapitre ultérieur) ∎

Proposition 3.3 (Condition nécessaire d'extremum)
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur l'intervalle ouvert I.
Si f admet en $x_0 \in I$ un extremum relatif alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve :
admis (la preuve sera établie dans un chapitre ultérieur) ■

Remarque 7
Cette condition n'est pas suffisant, c'est-à-dire que si f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = 0$ alors x_0 n'est pas nécessairement un extremum relatif. Pour cela, il suffit de considérer la fonction $x \mapsto x^3$ et le point $x_0 = 0$.
Soit $f : J \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle J non nécessairement ouvert. Pour déterminer les extremums relatifs de f on procède en général de la manière suivante : on considère comme extremums relatifs possibles

- les point $x \in J$ tels que $f'(x) = 0$ et n'étant pas aux bornes de l'intervalle J
- les bornes de J

puis on regarde en détails lesquels sont effectivement des extremums relatifs. Le meilleur moyen pour déterminer les extremums relatifs de f est d'étudier les variations de cette fonction.

Exercice 3.2
Donner les extremums de la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = x - x^2$.

Solution 3.2
La fonction f est dérivable sur $[-1, 1]$ comme différence de deux fonctions dérivables et on a $f'(x) = 1 - 2x$. Les extremums éventuels sont soit -1 ou 1, soit les réels $x \in]-1, 1[$ vérifiant $f'(x) = 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Le tableau de variation de f sur $[-1, 1]$ est donc

x	-1		$1/2$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

Puisque $f' \geqslant 0$ sur $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$, $f' \leqslant 0$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et que f' ne s'annule qu'en un point (qui est $\frac{1}{2}$), on peut affirmer que la fonction f est strictement montone sur chacun de ces deux intervalles. Par conséquent, le maximum de f est atteint en $\frac{1}{2}$ et il vaut $\frac{1}{4}$ tandis que le minimum de f est atteint en -1 et il vaut -2.

Méthode 3.1 (Justifier une inégalité via les fonctions)
Soient f et g deux fonctions définies sur I. Pour justifier que $\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant g(x)$, on étudie les variations de la fonction auxilaire $h = f - g$ sur l'intervalle I en y adjoignant les extrémums possibles de h ainsi que leurs images par h et, éventuellement, les limites aux bornes de I lorsque ces bornes n'appartiennent pas à I.

4 Asymptotes

Définition 4.1 (Asymptotes et branches paraboliques)
Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $[\alpha, +\infty[$. On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un certain repère $\mathcal{R}$ (non nécessairement orthonormé).

1. *si $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$, on dit alors que $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote la droite verticale d'équation $x = a$;*
2. *si $f(x)$ tend vers $L \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $\pm\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote la droite horizontale d'équation $y = L$;*
3. *si $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers $\pm\infty$, on distingue les cas suivants :*
   (a) *Si $\frac{f(x)}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$, alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses;*
   (b) *Si $\frac{f(x)}{x}$ tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers $\pm\infty$, alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées;*

(c) *Si* $\dfrac{f(x)}{x}$ *tend vers* $\alpha \in \mathbb{R}^{\times}$ *lorsque* x *tend vers* $\pm\infty$ *et*

i. *si* $f(x)-\alpha x$ *tend vers* $\pm\infty$*, alors on dit que* $\mathcal{C}_f$ *admet une branche parabolique de direction la droite d'équation* $y=\alpha x$.

ii. *si* $f(x)-\alpha x$ *possède une limite finie* $\beta \in \mathbb{R}$ *lorsque* x *tend vers* $\pm\infty$*, alors on dit que* $\mathcal{C}_f$ *admet pour asymptote la droite d'équation* $y=\alpha x+\beta$.
On peut déterminer la position de la courbe par rapport à cette asymptote en étudiant le signe de $f(x)-\alpha x-\beta$.

Exercice 4.1
Etudier l'existence d'une asymptote ou d'une branche parabolique en $+\infty$ aux fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}_+$ respectivement par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \frac{x^4}{x+1}, \quad g(x) = \frac{2x^3+1}{x^2+3x+1}, \quad h(x) = \frac{x^2}{2x^2+1}$$

Solution 4.1

- f : En remarquant que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \dfrac{x^4}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = x^3 \times \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$, il est immédiat que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Le calcul précédent nous permet d'écrire $\dfrac{f(x)}{x} = x^2 \times \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ qui tend également vers $+\infty$. Par conséquent, la courbe représentative de f possède en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

- g : En remarquant que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \frac{2x^3\left(1+\dfrac{1}{2x^3}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)} = 2x.\frac{1+\dfrac{1}{2x^3}}{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$$

Le calcul précédent nous permet d'écrire

$$\frac{g(x)}{x} = 2.\frac{1+\dfrac{1}{2x^3}}{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\to} 2$$

Etudions maintenant la limite de $g(x)-2x$ en $+\infty$

$$g(x)-2x = \frac{2x^3+1-2x(x^2+3x+1)}{x^2+3x+1} = -\frac{6x^2+2x-1}{x^2+3x+1} = \frac{-6x^2}{x^2}.\frac{1-\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{6x^2}}{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = -6.\frac{1-\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{6x^2}}{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\to} -6$$

Par conséquent, la courbe représentative de f possède en $+\infty$ une asymptote d'équation $y=2x-6$.

- h : En remarquant que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) = \frac{x^2}{2x^2}.\frac{1}{1+\dfrac{1}{2x}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1+\dfrac{1}{2x}}$$

on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \dfrac{1}{2}$ donc la courbe représentative de f possède en $+\infty$ une asymptote d'équation $y=\dfrac{1}{2}$.

5 Plan d'étude des fonctions

1. Déterminer le domaine de définition et, éventuellement, le réduire au moyen de symétries;
2. Déterminer la monotonie de la fonction sur son ensemble de définition,
   - prioritairement à l'aide des théorèmes sur l'addition, le produit et la composée de fonctions monotones.
   - si ces dernières ne conviennent pas, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction puis déterminer de le signe de la dérivée sur cet ensemble pour ses variations;
3. Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition et regrouper les résultats ainsi obtenus dans un tableau de variations;

4. S'il y a lieu, étudier les asymptotes éventuelles;
5. Faire une représentation graphique faisant apparaitre tous les particularités qui ont été mises en valeur au cours de l'étude précédente (on placera également les pont à tangente horizontale ou verticale).

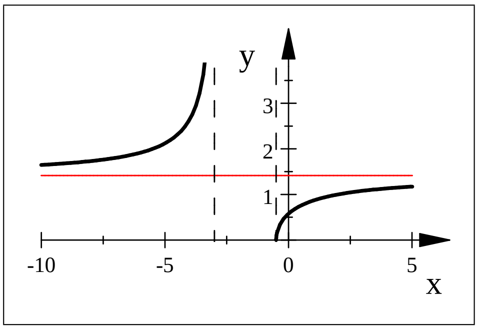
Exercice 5.1
Effectuer l'étude de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x+1}{x+3}}$ (on admet provisoirement l'existence de la fonction racine carrée ainsi que ses propriétés usuelles dont a dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^\times$ et l'expression de sa dérivée).

Solution 5.1

- **Domaine de définition** : l'expression $f(x)$ existe si et seulement si $x \neq -3$ et le quotient $\dfrac{2x+1}{x+3}$ est positif. Le tableau de signe de ce quotient montre qu'il en est ainsi lorsque $x \in]-\infty, -3[\cup \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ donc
$$\mathcal{D}_f =]-\infty, -3[\cup \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$
- **Parité, périodicité** : Cette fonction ne peut posséder ni de parité, ni de périodicité car son domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à 0 et il n'est stable par aucune translation.
- **Monotonie** : Puisque la fonction $\sqrt{}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, la monotonie de la fonction h est celle de la fonction $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+3}$ sur $\mathcal{D}_f$ (cela évitera les calculs fumeux de dérivée avec la fonction $\sqrt{}$). Cette dernière fonction est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme le quotient de deux telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$. Sa dérivée est donnée par
$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad \left(\frac{2x+1}{x+3}\right)' = \frac{(2x+1)'(x+3) - (2x+1)(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{5}{(x+3)^2} > 0$$
Par conséquent, la fonction $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+3}$ est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$ donc la fonction f également. Etant donné que l'on a
$$f(x) = \sqrt{\frac{2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}} = \sqrt{\frac{2\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{1+\frac{3}{x}}} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2\times 1}{1}} = \sqrt{2}$$
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -3^-} (2x+1) = -7 \\ \forall x < -3, \quad x+3 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-3^-} \frac{2x+1}{x+3} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to-3^-} \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}} = +\infty$$
on en déduit le tableau des variations de f qui est donné par

x	$-\infty$		-3		$-1/2$		$+\infty$
			$+\infty$				$\sqrt{2}$
$f(x)$		$\nearrow$				$\nearrow$	
	$\sqrt{2}$				0		

- **Asymptotes** :
  - <u>en $\pm\infty$</u> : Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \sqrt{2}$, on en déduit que la droite d'équation $y = \sqrt{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$. Etudions sa position relative.
  $$f(x) \leqslant \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}} \leqslant \sqrt{2} \underset{(2x+1)/(x+3)\geqslant 0}{\Leftrightarrow} \frac{2x+1}{x+3} \leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+3} - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{x+3} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+3} \geqslant 0 \Leftrightarrow x+3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x$$
  Par conséquent, la droite d'équation $y = \sqrt{2}$ est située au dessous de $\mathcal{C}_f$ lorsque $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et en dessous lorsque $x < -3$.
  - <u>en -3</u> : Puisque $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = -3$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en -3.
- **Représentation graphique** :



6 Bijections et réciproques

Définition 6.1 (fonction bijective et réciproque)
On dit qu'une fonction $f : A \mapsto \mathbb{R}$ réalise une bijection d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ sur un sous-ensemble B de $\mathbb{R}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- *$f(A) \subset B$ (l'image par f de tout élément de A appartient à B)*
- *quel que soit $b \in B$, il existe un élément $a \in A$ et un seul tel que $f(a) = b$ (en particulier, on a nécessairement $f(A) = B$ car tout élément de B étant l'image par f d'un élément de A)*
  Lorsque f est une telle bijection de A sur B, on appelle réciproque de f la fonction notée f^{-1} et définie sur B par :
  $$\forall b \in B, \quad f^{-1}(b) = \text{ l'unique antécédent de } b \text{ par } f \text{ appartenant à } A, \text{ i.e. l'unique } a \in A \text{ tel que } f(a) = b.$$
  Par conséquent, si f est une bijection de A sur B, la traduction mathématique la définition ci-dessus de $f^{-1}(b)$ est
  $$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

Exercice 6.1
Montrer que la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+1}{x+2} \end{array} \right.$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et expliciter sa fonction réciproque f^{-1}.

Solution 6.1
Soit $b \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. Cherchons un antécédent de b par f appartenant à $[0,1]$. Cherchons les éléments a de $[0,1]$ vérifiant $f(a) = b$. On a

$$f(a) = b \Leftrightarrow \frac{2a+1}{a+2} = b \Leftrightarrow 2a+1 = b(a+2) \Leftrightarrow 2a+1 = ab+2b \Leftrightarrow a(2-b) = 2b-1 \Leftrightarrow a = \frac{2b-1}{2-b}$$

la dernière opération étant licite car b appartenant à $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ donc $2 - b \neq 0$. Nous avons établi que b admet bien un unique antécédent par f .... mais nous n'avons pas fini car nous ne savons pas si cet antécédent appartient bien à $[0,1]$ et il n'y a aucune raison particulière pour que cela soit le cas ! En procédant par équivalence et en tenant compte du fait que $2 - b > 0$ car $b \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, on a

$$0 \leqslant \frac{2b-1}{2-b} \leqslant 1 \underset{\times(2-b)\geqslant 0}{\Leftrightarrow} 0 \leqslant 2b-1 \leqslant 2-b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b \geqslant \dfrac{1}{2} \\ 2b-1 \leqslant 2-b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b \geqslant \dfrac{1}{2} \\ 3b \leqslant 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b \geqslant \dfrac{1}{2} \\ b \leqslant 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant b \leqslant 1$$

cet encadrement étant trivialement vérifié puisque $b \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$! Nous avons donc établi que tout élément b de $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ admet un et un seul antécédent par f appartenant à $[0,1]$ donc f réalise une bijection de $[0,1]$ sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et d'après les calculs précédents, on a $\forall b \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right], \quad f^{-1}(b) = \dfrac{2b-1}{2-b}$. Par conséquent la fonction réciproque de f est la fonction $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x-1}{2-x} \end{array} \right.$.

Proposition 6.1 (Représentation graphique de la réciproque)
Soient $\mathcal{R}$ un repère (non nécessairement orthonormé) et f est une fonction réalisant une bijection de A sur B. La courbe représentative $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ de f^{-1} est le symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f (sur l'ensemble A).

Preuve :
Par définition, un point $M(x,y)$ appartient à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ sur A si et seulement si $x \in A$ et $y = f(x)$, autrement dit M a pour coordonnées $(x, f(x))$, avec $x \in A$, dans le repère $\mathcal{R}$. Par conséquent, son symétrique M' a pour coordonnées $(f(x), x)$ et comme $f^{-1}(f(x)) = x$ lorsque $x \in A$, on en déduit que l'ordonnée de M' est l'image par f^{-1} de son abscisse donc M' appartient à la courbe représentative $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ de f^{-1}.
Réciproque, si un point $N(x,y)$ appartient à la courbe représentative $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ si et seulement si $x \in B$ et $y = f^{-1}(x)$, autrement dit M a pour coordonnées $(x, f^{-1}(x))$, avec $x \in B$, dans le repère $\mathcal{R}$. Par conséquent, son symétrique N' a pour coordonnées $(f^{-1}(x), x)$ et comme $f(f^{-1}(x)) = x$ lorsque $x \in B$, on en déduit que l'ordonnée de N' est l'image par f de son abscisse donc N' appartient à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f. ■

Théorème 6.1 (Caractérisation des fonctions bijectives)
Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

1. *Soit f une fonction réalisant une bijection de A sur B et notons f^{-1} sa fonction réciproque, alors*
$$\forall a \in A, \quad f^{-1}(f(a)) = a, \quad \forall b \in B, \quad f(f^{-1}(b)) = b.$$
2. *Soit f une fonction définie sur A avec $f(A) \subset B$. S'il existe une fonction g définie sur B avec $g(B) \subset A$ et vérifiant*
$$\forall a \in A, \quad g(f(a)) = a, \quad \forall b \in B, \quad f(g(b)) = b$$
alors f est une bijection de A sur B et $f^{-1} = g$ sur B.
3. *Si f est une fonction réalisant une bijection de A sur B alors sa fonction réciproque f^{-1} réalise une bijection de B sur A dont la réciproque est f, i.e. $(f^{-1})^{-1} = f$.*
4. *Si f est une bijection de A sur B et g une bijection de B sur C alors $g \circ f$ est une bijection de A sur C dont la réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Preuve :

1. Soit b appartenant à B. Par définition, $f^{-1}(b)$ est l'unique antécédent de b par f appartenant à A donc son image par f vaut nécessairement b, i.e. $f(f^{-1}(b)) = b$.
Soit a appartenant à A. Le réel $f^{-1}(f(a))$ est l'unique antécédent de $f(a)$ par f appartenant à A i.e. l'unique élément de A dont l'image par f vaut $f(a)$. Etant donné que a appartient à A et que l'image de a par f est $f(a)$, l'antécédent cherché est a i.e. $f^{-1}(f(a)) = a$.
2. Soit $b \in B$. Puisque l'on a $f(g(b)) = b$ et que $g(b) \in A$ (car $g(B) \subset A$), on est assuré que b admet un antécédent par f qui appartient à A. En particulier, $b \in f(A)$ et ceci est valable quel que soit b dans B donc $B \subset f(A)$ et comme l'on a $f(A) \subset B$, on obtient que $f(A) = B$.
Montrons que c'est le seul antécédent possible de b par f appartenant à A.Soit a un antécédent de b par f appartenant à A, on a par définition $f(a) = b$ puis en composant par g cette égalité, on obtient que $g(f(a)) = g(b) \Leftrightarrow a = g(b)$ ce qui démontre l'unicité de cet antécédent.
Par conséquent, on a $f(A) = B$ et tout élément b de B possède un et un seul antécédent par f appartenant à A donc f réalise une bijection de A sur B et $\forall b \in B, \quad f^{-1}(b) = g(b)$ donc $f^{-1} = g$.
3. On sait que $f(A) = B$ et $f^{-1}(B) \subset A$ (par définition $f^{-1}(b)$ est l'unique antécédent de b appartenant à A). Montrons que $f^{-1}(B) = A$. Soit $a \in A$, d'après le point 1, on a $f^{-1}(f(a)) = a$ donc a admet pour antécédent $f(a)$ par f et comme $f(a) \in B$ (car $f(A) \subset B$)), on est assuré que $a \in f^{-1}(B)$ donc $A \subset f^{-1}(B)$ ce qui montre que $f^{-1}(A) = B$.
D'autre part, toujours d'après le point 1, on a $\forall b \in B, \quad f(f^{-1}(b)) = b, \quad \forall a \in A, \quad f^{-1}(f(a)) = a$. En appliquant le 2. à la fonction f^{-1}, on en déduit que f^{-1} est une bijection de B sur A et $(f^{-1})^{-1} = f$.
4. Puisque f et g sont des bijections respectivement de A sur B et de B sur A donc on a nécessairement $f(A) = B$ et $g(B) = C$ et d'après le point 3, les fonctions f^{-1} et g^{-1} sont des bijections respectivement de B sur A et de C sur B donc on a nécessairement $f^{-1}(B) = A$ et $g^{-1}(C) = B$.
On considère alors les fonctions $m = g \circ f$ et $n = f^{-1} \circ g^{-1}$ qui sont des fonctions définies respectivement sur A et C. En effet, si $a \in A$, $f(a) \in B$ et g étant définie sur B, l'expression $g(f(a))$ existe. De même, si $c \in C$, $g^{-1}(c) \in B$ et f^{-1} étant définie sur B, l'expression $f^{-1}(g^{-1}(c))$ existe. En outre, on a
$$\begin{array}{rcl} m(A) & = & (g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = C \\ n(C) & = & (f^{-1} \circ g^{-1})(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) = f^{-1}(B) = A \\ \forall a & \in & A, \quad (n \circ m)(a) = n(m(a)) = f^{-1}(g^{-1}(g(\underbrace{f(a)}_{\text{noté } b})) = f^{-1}(g^{-1}(g(b)) = f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a \\ \forall c & \in & C, \quad (m \circ n)(c) = m(n(c)) = g(f(f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(c)}_{\text{noté } b}))) = g(f(f^{-1}(b)) = g(b) = g(g^{-1}(c)) = c \end{array}$$

D'après le point 2, on est assuré que $m = g \circ f$ réalise une bijection de A sur C dont la fonction réciproque est $n = f^{-1} \circ g^{-1}$.

■

Le théorème suivant est extrêment utile pour justifier qu'une fonction réalise une bijection.

Théorème 6.2 (de bijection continu)
Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Si f est continue et strictement monotone sur I alors

- *$f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$*
- *f réalise une bijection de I sur $f(I)$*
- *sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$ et sa monotonie est celle de f.*

Preuve :
admis (la preuve sera établie dans un chapitre ultérieur) ■

Remarque 8 (piège à éviter)
Ce théorème est faux en général si l'une des hypothèses n'est pas vérifiée. En outre, il existe une multitude de bijections d'un intervalle sur un autre qui ne sont ni continues, ni strictement monotone sur cet intervalle. Un exemple est fourni l'exercice suivant.

Exercice 6.2
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si est rationnel} \\ -\dfrac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $f \circ f$. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f n'est ni strictement monotone, ni continue sur $\mathbb{R}$ (on étudiera plus particulièrement la continuité en 0).

Solution 6.2
Soit $x \in \mathbb{R}$. Si x est rationnel alors $f(x) = x$ donc $f(f(x)) = f(x) = x$. Si x est irrationnel alors $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ qui est aussi irrationnel. En effet, s'il est rationnel, étant donné que c'est un inverse, il est non nul et l'inverse d'un rationnel est un rationnel, ce qui entraine que $-x$ est rationnel ce qui entraine que x est rationnel ce qui est absurde. Par conséquent, on a

$$f(f(x)) = f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{x}\right)} = x$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(f(x)) = x$ et en appliquant le théorème 6.1 à f et $g = f$, on en déduit que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ dont la réciproque est f.
Si f est continue en 0 alors lorsque x devient très proche de 0, $f(x)$ doit devenir très proche de 0. Or pour pour tout entier n, le réel $-\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ est irrationnel (sinon $-\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ est rationnel donc $-n.\dfrac{\sqrt{2}}{n} = \sqrt{2}$ le serait ce qui est faux), il devient de plus en plus petit au fur et à mesure que n devient grand tandis que $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{n}\right) = -\dfrac{1}{-\dfrac{\sqrt{2}}{n}} = \dfrac{n}{\sqrt{2}}$ devient de plus en plus grand ce qui nous fournit une contradiction donc f n'est pas continue en 0.
Si f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$, étant donné que l'on a $0 < \sqrt{2} < 2$, on est assuré que le réel $f\left(\sqrt{2}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ est nécessairement compris entre $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ quel que soit la monotonie de f, ce qui est gênant pour un réel strictement négatif ! Par conséquent, f n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Remarque 9
En fait, on démontrera dans un autre chapitre que cette fonction n'est strictement monotone sur aucun intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et qu'elle ne possède aucune limite gauche ou droite en tout point de $\mathbb{R}$. En particulier, elle n'est continue en aucun point et à fortiori dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$! En paraphrasant Galilée «et pourtant elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ » :-)

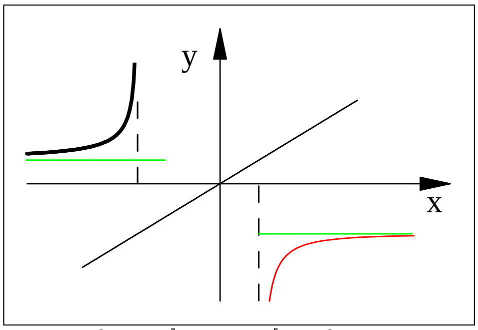
Exercice 6.3
On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x+1}{x+3}}$ définie sur $]-\infty, -3[\cup \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ et étudiée dans l'exercice 5.1,

1. justifier que la fonction f réalise une bijection de $]-\infty,-3[$ sur un intervalle à expliciter et tracer la représentation graphique de sa réciproque puis expliciter f^{-1}.
2. Justifier que la fonction f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ sur un intervalle à expliciter et tracer la représentation graphique de sa réciproque puis expliciter f^{-1}.

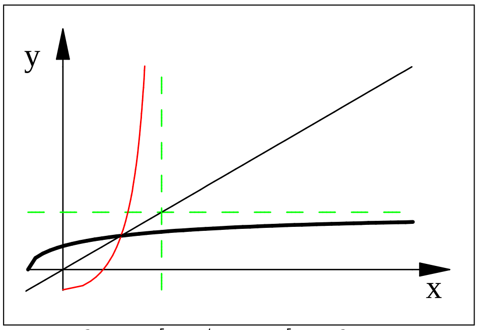
Solution 6.3

1. La fonction f est continue sur $]-\infty,-3[$ puisqu'elle est dérivable sur cet intervalle (on peut utiliser ici cet argument car l'exercice nous a «obligé» à justifier la dérivabilité de cette fonction auparavant) et elle y est strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]-\infty,-3[$ sur $f\,(]-\infty,-3[) = \left]\sqrt{2},+\infty\right[$.
   Calculons f^{-1}. Soit $x \in \left]\sqrt{2},+\infty\right[$, déterminons $f^{-1}(x)$, i.e. l'unique antécédent de x par f qui appartienne à $]-\infty,-3[$.
   On résout donc l'équation
   $$a = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(a) = x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2a+1}{a+3}} = x \Rightarrow \frac{2a+1}{a+3} = x^2 \Leftrightarrow 2a+1 = x^2(a+3) \Leftrightarrow a(2-x^2) = 3x^2-1 \underset{x^2>2}{\Leftrightarrow} a = \frac{3x^2-1}{2-x^2}$$
   On en déduit que l'équation $a = f^{-1}(x)$ admet au plus une solution mais on est pas assuré que $\frac{3x^2-1}{2-x^2}$ soit solution de l'équation (on n'a pas travaillé par équivalence). Néanmoins, puisque f est une bijection de $]-\infty,-3[$ sur $\left]\sqrt{2},+\infty\right[$, on est assuré qu'une solution existe et comme on n'a qu'une seule choix de solution sur $\mathbb{R}$, il s'agit nécessairement de $\frac{3x^2-1}{2-x^2}$ et il appartient nécessairement à $]-\infty,-3[$ (sinon x n'aurait pas d'antécédent dans $]-\infty,-3[$ ce qui est absurde). Par conséquent, on a $f^{-1}(x) = \frac{3x^2-1}{2-x^2}$ quel que soit x dans $]-\infty,-3[$ donc
   $$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \left]\sqrt{2},+\infty\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3x^2-1}{2-x^2} \end{array} \right.$$
2. Par le même argumentaire, on obtient que f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ sur $\left[0,\sqrt{2}\right[$ et
   $$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \left[0,\sqrt{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3x^2-1}{2-x^2} \end{array} \right. .$$

   Représentation graphique de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ selon les différents cas. En trait gras $\mathcal{C}_f$ et en trait fin $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.



$\mathcal{C}_f$ sur $]-\infty,-3[$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$



$\mathcal{C}_f$ sur $[-1/2,+\infty[$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$