1 Exercices

1.1 Algèbre

Exercice 1.1.1 (Mines-Ponts)

1. Montrer qu'il existe un polynôme réel T_n tel que pour tout x réel non nul, on a : $T_n(x + \frac{1}{x}) = x^n + \frac{1}{x^n}$.
2. Déterminer les racines de T_n.
3. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{T_n}$.

Exercice 1.1.2 (Mines-Ponts) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^3 = A^2 + A + I_n$.
Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice d'une projection. Déterminer cette matrice.

Exercice 1.1.3 (Centrale) 1. Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $f^2 = -\mathrm{Id}$ et tel que f et f^* commutent.

2. Que peut-on dire du polynôme caractéristique, de la trace, du déterminant de f ? de la dimension de E ?
3. Montrer que $s = f \circ f^*$ est une symétrie orthogonale puis que $f^* = -f$.
4. Soit u un vecteur non nul. Montrer que $(u, f(u))$ est libre.
5. En déduire l'existence d'une base orthogonale dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs tous égaux à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
6. Que peut-on dire de g endomorphisme de E commutant avec g^* et admettant un polynôme annulateur de degré 2 sans racine réelle ?

Exercice 1.1.4 (Centrale) Soit φ l'application de $(\mathbb{R}[X])^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}dt.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \sin((n+1)u) = Q_n(\cos u)\sin u.$$

   Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n.
3. Montrer que les Q_n sont deux à deux orthogonaux.
4. On considère l'application g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$(x, y, z) \mapsto \int_{-1}^{1} (t^3 + xt^2 + yt + z)^2\sqrt{1-t^2}dt.$$

   Montrer que g admet un minimum et dire en quel(s) point(s) il est atteint.

1.2 Analyse

Exercice 1.2.1 (Mines-Ponts) Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour f dans E, x dans $[0,1]$, on pose $Lf(x) = \int_0^1 \min(x,t)f(t)dt$.

1. Montrer que L est un endomorphisme continue de E muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(t)|$.
2. Soit f une fonction propre de L associé à une valeur propre non nulle. Montrer que f est C^1 sur $[0,1]$.
3. Trouver les fonctions propres de f.

Exercice 1.2.2 (Centrale, Mines-Ponts) On pose $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n}$.

1. Existence et calcul de la limite de suite (u_n).
2. Nature de la série de terme général u_n.
3. Convergence et calcul de la somme de la série de terme général $\frac{u_n}{n}$.
4. Equivalent de u_n.

Exercice 1.2.3 (Centrale) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt)dt \text{ et } v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(xt)dt.$$

1. Justifier que u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver un système différentiel vérifié par (u, v).
3. Le résoudre et déterminer u et v (on introduira la fonction $z = u + iv$)

Exercice 1.2.4 (Mines-Ponts)

1. Soit l'équation différentielle $y" + y = f(x)$, avec f continue sur $[0, +\infty[$.
   Montrer que la solution telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ s'écrit
   $$y(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)dt.$$
2. On veut résoudre l'équation différentielle $y" + y = \sigma y^2$ sur un intervalle fermé $[0, b]$ avec les conditions initiales $y(0) = \alpha$ et $y'(0) = 0$.On impose, de plus, $\sigma > 0$ et $\sigma b + |\alpha| < 1$.
   On définit la suite $(y_n(x))$ par la valeur initiale $y_0(x) = \alpha \cos x$ et
   $$y_n^{''}(x) + y_n(x) = \sigma(y_{n-1}(x))^2$$
   vérifiant $y_n(0) = \alpha$ et $y_n'(0) = 0$.
   Trouver une relation de récurrence entre $y_n(x)$ et $y_{n-1}(x)$.
3. Montrer que $|y_n(x)| < 1$ pour tout x de $[0, b]$.
4. On pose $u_n(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x)$. Montrer que $|u_n(x)| \leqslant \frac{(2\sigma)^n x^n}{n!}$. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (y_n) ?
5. On définit $g(x)$ comme la limite de la suite $(y_n(x))$. La fonction g est-elle solution de l'équation différentielle ?

1.3 Géométrie

Exercice 1.3.1 (Centrale) Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation polaire $\rho = a(1 + \cos\theta)$ avec $a > 0$.

1. Montrer que si l'on choisit une direction $\overrightarrow{D}$, il existe trois points M_1, M_2, M_3 de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente a pour direction $\overrightarrow{D}$.
2. Lieu de l'isobarycentre de M_1, M_2, M_3 dans la direction de $\overrightarrow{D}$ varie.
3. Montrer que l'aire du triangle $M_1M_2M_3$ est indépendante de la direction choisie

Exercice 1.3.2 (Mines-Ponts) Soit Γ définie par : $(x^2 + y^2)^2 - 2ay(x^2 - y^2) = 0$ avec $a > 0$.
Tracer Γ. Calculer l'aire de la surface délimitée par Γ.

Exercice 1.3.3 (Mines-Ponts) E est un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormal (O, i, j, k).
Soit P le plan d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$.
Soit $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ son symétrique orthogonal par rapport au plan P.

1. Calculer x', y', z' en fonction de x, y, z. On mettra le résultat sous la forme $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + B$.

2. Nature de la matrice A, déterminant, valeurs propres,...

Exercice 1.3.4 (Mines-Ponts) Soit (A, B, C) un triangle de demi-périmètre p et dont les côtés ont pour longueurs a, b, c.

1. Montrer que l'aire du triangle est $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
2. Quels sont les triangles demi-périmètre p donné et d'aire maximale ?

2 Indications

2.1 Algèbre

Indication pour l'exercice 1.1.1 :

1. Procéder par récurrence, en remarquant que $x^{n+1} = x(x^n + \frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^n})$ et une formule analogue avec $\frac{1}{x^{n+1}}$.

2. Si z est une racine complexe de T_n, justifier que l'on peut l'écrire $z = x + \frac{1}{x}$, ce qui fournit potentiellement $2n$ racines. Montrer qu'il existe une symétrie sur ces racines ($k \leftarrow 2n - k$)

3. T_n est à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc $\frac{1}{T_n}$ s'écrit .... Pour évaluer $T_n'(x_k)$, vérifier que $T_n(\cos\theta)$ s'écrit simplement et dériver cette relation.

Indication pour l'exercice 1.1.2 : Factoriser le polynôme annulateur puis diagonaliser A et en déduire une écriture de A^p.

Indication pour l'exercice 1.1.3 :

1. Donner un polynôme annulateur de f, en déduire toutes les valeurs propres de f puis utiliser que son polynôme est à coefficients réels pour en déduire une identité sur les multiplicités. Le reste découle des formules classiques concernant le polynôme caractéristique.

2. Pour l'égalité, que peut-on dire de $(s(x), x)$? Quelle conséquence en tire-t-on sur s ?

3. Par l'absurde, cela signifie que u est un vecteur propre de f or ....

4. Par récurrence sur la dimension (qui est nécessairement paire) et on démontrera que si H est stable par f alors $H^\perp$ est aussi stable par f.

5. Montrer que par une transformation affine $X \to aX + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, on peut se ramener au cas $X \mapsto X^2 + 1$ et appliquer les résultats précédents.

Indication pour l'exercice 1.1.4 :

1. Vérifier que l'intégrale converge bien.

2. $\sin((n+1)u) = \mathrm{Im}((e^{iu})^{n+1}) = ...$

3. Effectuer le changement de variable $t = \sin u$ dans l'intégrale et utiliser les formules trigo de linéarisation.

4. C'est un problème de moindre carré. Il y a un unique minimum en $-P_0$, où P_0 est le projeté orthogonal. Pour éviter les calculs fastidieux, expliciter X^3 dans la base (Q_0, Q_1, Q_3, Q_4). En déduire les produits scalaires recherchés en utilisant l'écriture d'un vecteur dans une base orthogonale.

2.2 Analyse

Indication pour l'exercice 1.2.1 :

1. Justifier que Lf est bien continue (soit on "casse" l'intégrale en deux parties, soit on applique Lebesgue).
2. Casser l'intégrale en deux morceaux et revoir son cours sur les fonctions $x \mapsto \int_a^x g(t)dt$.
3. Montrer que f est en fait C^2 et, en dérivant deux fois l'égalité, en déduire une équation différentielle du second ordre avec les conditions initiales $y(0) = ..$ et $y'(1) = ...$ En déduire les valeurs propres possibles et les vecteurs propres.

Indication pour l'exercice 1.2.2 :

1. Le théorème de Lebesgue.
2. Procéder par l'absurde et utiliser le theorème de Lebesgue de permutation série intégrale. En déduire qu'une certaine intégrale est convergente.
3. Utiliser le développement en série entière de $-\ln(1-x)$ pour en déduire une majoration des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n}$. En déduire que la série converge et utiliser à nouveau le théorème de permutation série intégrale. L'intégrale obtenue fait intervenir une belle fraction rationnelle.
4. Effectuer une intégration par partie pour montrer que $u_n = \frac{1}{2^n} + 4n(u_n - u_{n+1})$. En déduire que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{4n} + O(\frac{1}{2^n})$ (on utilisera la minoration $t^4 \leqslant t$). Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln(\frac{v_{n+1}}{v_n})$ converge où $v_n = n^\alpha u_n$ pour un α convenable. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{D}{n^{1/4}}$.

Indication pour l'exercice 1.2.3 :

1. Utiliser le théorème de Lebesgue de dérivation.
2. Faire une intégration par partie dans les intégrales donnant u' et v' puis résoudre le système 2×2 en (u', v').
3. Vérifier que z est solution d'une équation différentielle du type $z' = (a + ib)z$ où a et b sont deux fonctions à valeurs réelles et $z(0) = ...$. Recopier ensuite la stratégie classique d'intégration.

Indication pour l'exercice 1.2.4 :

1. Soit on justifie que $x \mapsto \int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$ est C^2 (en développant le sin) et on vérifie qu'elle satisfait au problème de Cauchy, soit on utilise la variation de la constante.
2. Poser $z_n = y_n - \alpha$, donner l'équation différentielle satisfaite par z_n et utiliser la question précédente.
3. Par récurrence avec la formule intégrale.
4. Remarquer l'on peut convenir $y_{-1} = 0$ et procéder par récurrence sur $n \geqslant 0$ en utilisant l'expression intégrale. La série $\sum_n u_n$ est .... sur $[0, b]$ donc elle est ... sur $[0, b]$, ce qui implique que la suite (y_n) est ... sur $[0, b]$.
5. Avec Lebesgue, montrer que, lorsque x est fixé, l'expression intégrale converge vers une expression intégrale. Justifier que g est continue sur $[0, b]$ et utiliser la question 1. En déduire que $g - y_0$ satisfait à une certaine équation différentielle.

2.3 Géométrie

Indication pour l'exercice 1.3.1 : Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation polaire $\rho = a(1+\cos\theta)$ avec $a>0$.

1. Une direction est équivalent à la donner d'une pente $p=\tan\alpha$ et se rappeler la pente de la tangente, en un point régulier, d'une courbe donnée en polaire (on peut la retrouver en écrivant $\overrightarrow{OM} = \rho(\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j})$ et en dérivant).
2. Utiliser que $\sum\limits_{k=0}^{2}\exp(\dfrac{2\pi ik)}{3}=0$ pour calculer certaines sommes et utiliser $2\cos^2 x = 1+\cos 2x$.
3. $Aire = \dfrac{1}{2}\left|\det_{(\widehat{i,j})}(\overrightarrow{M_0M_1},\overrightarrow{M_0M_2})\right|$ puis développer par bilinéarité et, après la réduction algébrique, utiliser que $\theta_k = \theta_0 + \dfrac{2\pi k}{3}$.

Indication pour l'exercice 1.3.2 : Passer en polaire. Pour l'aire, $\theta \mapsto (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$ est une paramétrisation de Γ et utiliser la formule de Green-Riemann (attention à ce que la paramétrisation soit bien définie et ne recouvre pas plusieurs fois la courbe).

Indication pour l'exercice 1.3.3 :

1. Faire un dessin pour obtenir une égalité vectorielle reliant M, M' et P_M (le projeté orthogonal de M sur P). Donner une base orthogonale de la direction vectorielle de P, en déduire que les coordonnées de P_M satisfont à trois équations linéaires puis obtenir les coordonnées de M'.
2. La matrice A est la partie linéaire d'une symétrie orthogonale affine donc c'est une .... dont les éléments fixes sont et l'axe est ... On en déduit le déterminant (par caractérisation des ....), la réduction découle immédiatement de l'obtention d'une base orthonormale du plan vectoriel et de l'axe vectoriel.

Indication pour l'exercice 1.3.4 :

1. Utiliser la formule $2S$ =base*hauteur et utiliser le théorème de Pythagore sur les deux triangles rectangles engendrés par la hauteur afin d'en déduire une forme factorisée de $h^2 = (?-?)(?+?)$ puis de S^2.
2. Pour un périmètre donné, deux longueurs suffisent à donner l'aire. Introduire une fonction à deux variables et justifier l'existence de son maximum sur un domaine convenable. Justifier ensuite que cette fonction ne peut être maximale sur le bord.

3 Corrections

3.1 Algèbre

Correction de l'exercice 1.1.1 :

1. On procède par récurrence forte en posant
$(\mathcal{P}_n)$: " pour tout $k \leqslant n$, il existe un polynôme réel T_k tel que pour tout x réel non nul, on a : $T_k(x+\dfrac{1}{x}) = x^k + \dfrac{1}{x^k}$.
L'initialisation est vrai pour $n=0$ en prenant comme polynôme $T_0 = 2$. Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie. En particulier, il existe deux polynômes T_n et T_{n-1} tels que $T_n(x+\dfrac{1}{x}) = x^n + \dfrac{1}{x^n}$ et $T_{n-1}(x+\dfrac{1}{x}) = x^{n-1} + \dfrac{1}{x^{n-1}}$ pour tout réel non nul.
$$\begin{aligned} x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} &= x.x^n + \frac{1}{x}.\frac{1}{x^n} = x(x^n + \frac{1}{x^n}) - x.\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x}(x^n + \frac{1}{x^n}) - \frac{1}{x}.x^n \\ &= xT_n(x+\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}T_n(x) - \frac{1}{x^{n-1}} - x^{n-1} = (x+\frac{1}{x})T_n(x+\frac{1}{x}) - (x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}) \\ &= (x+\frac{1}{x})T_n(x+\frac{1}{x}) - T_{n-1}(x+\frac{1}{x}) \end{aligned}$$
Nous voyons ainsi que le polynôme $T_{n+1}(X) = XT_n(X) - T_{n-1}(X)$ convient, ce qui démontre l'existence de T_{n+1} et l'hypothèse $(\mathcal{P}_n)$ montrant que les (T_k) existent lorsque $k \leqslant n$, on en déduit que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la démonstration par récurrence.

2. A priori, les racines de P_n sont complexes. Soit z une telle racine, il existe nécessairement un complexe x non nul tel que $z = x + \dfrac{1}{x}$. En effet, cette équation est équivalente, lorsque x est non nul, à l'équation quadratique $x^2 - zx + 1 = 0$ qui admet des racines complexes x non nulles (le produit des racines vaut 1). Ainsi, on a, pour $n \geqslant 1$,
$$\begin{aligned} 0 &= P_n(z) = P_n(x + \frac{1}{x}) = x^n + \frac{1}{x^n} \Leftrightarrow x^n + \frac{1}{x^n} = 0 \Leftrightarrow x^{2n} + 1 = 0 \Leftrightarrow x^{2n} = -1 = \exp(i\pi) \\ &\Leftrightarrow x = \exp(\frac{i\pi}{2n} + \frac{2\pi i k}{2n})\ k \in [\![0, 2n-1]\!] \Rightarrow z = \exp(i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{2n}\right)) + \exp(-i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{2n}\right)) \\ &\Rightarrow z = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{2n}\right)\ k \in [\![0, 2n-1]\!]. \end{aligned}$$
Par conséquent, les racines de P_n sont réelles de la forme
$$2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{2n}\right) = 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \text{ avec } k \in [\![0, 2n-1]\!].$$
On montre alors par récurrence que P_n est un polynôme de degré n car pour $n = 0$, c'est vrai et si c'est vrai au rang n et $n-1$, alors la relation de récurrence satisfaite par P_n montre que P_{n+1} est la somme d'un polynôme de degré $n+1$ et d'un polynôme de degré $n-1$ donc P_{n+1} est de degré $n+1$. Par conséquent, le polynôme P_n admet au plus n racines complexes et nous en disposons à priori de $2n$ (deux fois trop). Pour commencer, puisque $0 \leqslant k \leqslant 2n-1$ alors
$$\forall k \in [\![0, 2n-1]\!], \quad \frac{1}{2n} \leqslant \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leqslant \frac{4n-1}{2n}\pi < \frac{4n}{2n}\pi = 2\pi.$$
Ainsi, tous nos angles sont dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ et nous savons que sur cet intervalle, si $a < b$ alors $\cos a = \cos b$ si et seulement $b = 2\pi - a$. Ainsi,
$$\begin{aligned} \forall k, q &\in [\![0, 2n-1]\!] \text{ et } k < q, \quad \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{(2q+1)\pi}{2n}\right) \Leftrightarrow \frac{(2q+1)\pi}{2n} = 2\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2n} \\ &\Leftrightarrow \frac{(2q+2k)\pi}{2n} = 2\pi \Leftrightarrow q + k = 2n \Leftrightarrow q = 2n - k. \end{aligned}$$
Puisque $k < q$, nous avons la majoration $2k < k + q = 2n$ qui équivaut à l'inégalité $k < n$, ce qui signifie que $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ainsi, on obtient l'égalité ensembliste
$$\{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in [\![0, 2n-1]\!]\} = \{2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in [\![0, n-1]\!]\}.$$
D'autre part, si $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(\dfrac{(2q+1)\pi}{2n}\right)$ où k et q appartiennent à $[\![0, n-1]\!]\}$. On peut supposer $k \leqslant q$. Si $k < q$, le raisonnement précédent montre que $q = 2n - k \geqslant 2n - (n-1) = n+1$ ce qui est impossible donc $k = q$. On en déduit que les n réels $\left[2\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right]_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ sont deux à deux distincts et qu'ils sont racines de P_n. Puisque P_n est de degré n, on en déduit que les racines de P_n est l'ensemble $Z = \{2\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in [\![0, n-1]\!]\}$ et qu'il est à racines simples.

3. Puisque T_n est à racines simples, on en déduit que la décomposition de $\dfrac{1}{T_n}$ est $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\alpha_k}{(x - x_k)}$ où l'on a posé $x_k = 2\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$. Le coefficient α_k s'obtient de la façon suivante. Si l'on pose $Z = \{2\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ alors on a
$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash Z, \quad \frac{1}{T_n(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{(x - x_k)} \Leftrightarrow \frac{x - x_j}{T_n(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k(x - x_j)}{(x - x_k)} = \alpha_j + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} \frac{\alpha_k(x - x_j)}{(x - x_k)}$$
En faisant tendre x vers x_j, la somme tend vers 0 et le membre de gauche tend vers $\dfrac{1}{T_n'(x_j)}$ car $\dfrac{x - x_j}{T_n(x)} = \left(\dfrac{T_n(x) - T_n(x_j)}{x - x_j}\right)^{-1}$ est donc l'inverse du taux d'accroissement de T_n en x_j. On obtient donc
$$\forall x \in \mathbb{C} \backslash Z, \quad \frac{1}{T_n(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{T_n'(x_k)(x - x_k)}.$$

Pour calculer la dérivée de T_n', nous allons utiliser la relation $T_n(x+\frac{1}{x}) = x^n + \frac{1}{x^n}$. Lorsque $x = \exp(i\theta)$ alors

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta \text{ et } x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta.$$

On en déduit que pour tout entier n et tout réel θ, on a $T_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta$ et en dérivant par rappot à θ, on obtient

$$-(2\sin\theta)T_n'(2\cos\theta) = -2n\sin(n\theta) \Rightarrow T_n'(2\cos\theta) = \frac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \text{ pour } \theta \notin \pi\mathbb{Z}.$$

En choisissant $\theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$, cela nous donne

$$T_n'(x_k) = T'(2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)) = \frac{n\sin(\frac{(2k+1)\pi}{2})}{\sin(\frac{(2k+1)\pi}{2n})} = \frac{n\cos(k\pi)}{\sin(\frac{(2k+1)\pi}{2n})} = \frac{n(-1)^k}{\sin(\frac{(2k+1)\pi}{2n})}$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash Z, \quad \frac{1}{T_n(x)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin(\frac{(2k+1)\pi}{2n})}{x - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}.$$

Correction de l'exercice 1.1.2 : La matrice A admet comme polynôme annulateur $3X^3 - X^2 - X - 1$. Une racine évidente de polynôme est 1 donc on obtient la factorisation

$$3X^3 - X^2 - X - 1 = (X-1)\left(3X^2 + 2X + 1\right) = 3(X-1)(X-r)(X-\overline{r})$$

où l'on a posé $r = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i\sqrt{2}$. Ce polynôme est donc scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Il existe donc une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & rI_b & 0 \\ 0 & 0 & \overline{r}I_c \end{pmatrix}$ où $a = \dim E_1(A)$, $b = \dim E_r(A)$ et $c = \dim E_{\overline{r}}(A)$. Par conséquent, on obtient

$$A^p = PD^pP^{-1} = P\begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & r^pI_b & 0 \\ 0 & 0 & \overline{r}^pI_c \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Les complexes r et $\overline{r}$ ont pour module $\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \in]-1,1[$ donc les suites géométriques $(r^p)_{p\geqslant 0}$ et $(\overline{r}^p)_p$ convergent vers 0, ce qui implique que la suite de matrices $\begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & r^pI_b & 0 \\ 0 & 0 & \overline{r}^pI_c \end{pmatrix}_{p\geqslant 0}$ converge vers la matrice $\begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La continuité de la multiplication des matrices implique que la suite de matrices $(A^p)_{p\geqslant 0}$ converge vers la matrice $B = P\begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$. Il est évident que

$$B^2 = P\begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = B$$

donc B est bien une projection. On note $(e_1,..,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par construction, P est la matrice de changement de base de la base canonique dans une certaine base de vecteurs propres de A. Plus précisément, nous avons $P(\mathrm{Vect}(e_1,..,e_a)) = E_1(A)$ et $P(\mathrm{Vect}(e_{a+1},..,e_n)) = E_r(A) \oplus E_{\overline{r}}(A)$de $E_1(A)$.

$$\begin{aligned}
BX &= X \Leftrightarrow P\begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}X = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}X = P^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X \in \mathrm{Vect}(e_1,..,e_a) \\
&\Leftrightarrow X \in P(\mathrm{Vect}(e_1,..,e_a)) = E_1(A) \\
BX &= 0 \Leftrightarrow P\begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}X = 0 \Leftrightarrow P^{-1}X \in \mathrm{Vect}(e_{a+1},..,e_n) \\
&\Leftrightarrow X \in P(\mathrm{Vect}(e_{a+1},..,e_n)) = E_r(A) \oplus E_{\overline{r}}(A).
\end{aligned}$$

La caractérisation des projecteurs montre que B est le projecteur de $\mathbb{R}^n$ sur $\operatorname{Im} B = E_1(A)$ parallèlement à $\ker B = E_r(A) \oplus E_{\overline{r}}(A)$.

Correction de l'exercice 1.1.3 :

1. Soit A la matrice (à coefficients réels) de f dans la base canonique. Le polynôme X^2+1 est annulateur de f donc de A. Ce polynôme est scindé à racines simples ($\pm i$) sur $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. D'autre part, les valeurs propres de A sont égales à $\pm i$ donc son polynôme caractéristique $P_A(X) = \det(A - XI_n)$, qui est à coefficients réels, admet comme unique racine i ou $-i$. Puisque P_A est à coefficients réels, le conjugué de toute racine de P_A est aussi racine de P_A ce qui implique que P_A admet deux racines distinctes i et $-i$ d'où
$$P_A(X) = (-1)^n (X-i)^\alpha (X+i)^\beta$$
avec $\alpha \geqslant 1$ et $\beta \geqslant 1$. Si $\alpha < \beta$, alors
$$P_A(X) = (-1)^n (X-i)^\alpha (X+i)^\alpha (X+i)^{\beta-\alpha} = (-1)^n \left[(X-i)(X-i)\right]^\alpha (X+i)^{\beta-\alpha} = (-1)^n (X^2+1)^\alpha (X+i)^{\beta-\alpha},$$
ce qui implique que la fraction rationnelle réelle $\dfrac{(-1)^n P_A(X)}{(X^2+1)^\alpha}$ est aussi le polynôme complexe $(X+i)^{\beta-\alpha}$, ce qui est absurde (si son coefficient constant a_0 est imaginaire pur, on a la contradiction, si son coefficient constant a_0 est réel alors son coefficient de degré 1 est $i^{-1}a_0$ qui est imaginaire pur) donc $\alpha \geqslant \beta$. Un raisonnement analogue montre que $\beta \geqslant \alpha$ ce qui démontre que $\alpha = \beta$ et $P_A(X) = (-1)^n (X^2+1)^\alpha$. Ainsi, le polynôme caractéristique de A est de degré 2α et il doit être de degré n donc $n = 2\alpha$, ce qui implique que la dimension de E est paire et $P_A(X) = (X^2+1)^{n/2}$. On en déduit que le déterminant de A, qui est le coefficient constant de P_A, vaut 1 et sa trace étant égal à $(-1)^{n-1}$ fois le coefficient de degré $2n-1$ (qui est nulle car P_A est un polynôme pair) donc $\operatorname{tr} A = 0$. On en déduit immédiatement que $\det f = 1$ et $\operatorname{tr} f = 0$

2. On sait que $f^2 = -\operatorname{Id}$ donc par transposition, on obtient $(f^*)^2 = (f^2)^* = (-\operatorname{Id})^* = -\operatorname{Id}$. Puisque f et f^* commutent, on en déduit que
$$s^2 = (f \circ f^*)^2 = f^2 \circ (f^*)^2 = (-\operatorname{Id}) \circ (-\operatorname{Id}) = \operatorname{Id},$$
ce qui montre que s est une symétrie. D'autre part, s est symétrique car
$$s^* = (f \circ f^*)^* = f^{**} \circ f^* = f \circ f^* = s$$
donc $s \circ s^* = s^2 = \operatorname{Id}$ et s est un endomorphisme orthogonal tout en étant une symétrie donc c'est une symétrie orthogonale.
La caractérisation des symétries orthogonales montre que E est la somme directe orthogonale de $\ker(s - \operatorname{Id})$ et de $\ker(s + \operatorname{Id})$.
$$\begin{array}{rcll} \forall x & \in & \ker(s-\operatorname{Id}), & s(x) = x \Leftrightarrow f(f^*(x)) = x \Rightarrow f^2(f^*(x)) = f(x) \Leftrightarrow -f^*(x) = f(x) \\ \forall x & \in & \ker(s+\operatorname{Id}), & s(x) = -x \Leftrightarrow f(f^*(x)) = -x \Rightarrow f^2(f^*(x)) = -f(x) \Leftrightarrow f^*(x) = f(x) \end{array}$$
Il nous suffit de montrer que $\ker(s + \operatorname{Id}) = \{0\}$. On remarque pour cela que
$$\forall x \in E, \quad (s(x), x) = (f(f^*(x), x) = (f^*(x), f^*(x)) = \|f^*(x)\| \geqslant 0$$
donc
$$\forall x \in \ker(s + \operatorname{Id}), \quad 0 \leqslant (s(x), x) = (-x, x) = -\|x\|^2 \Rightarrow \|x\|^2 \leqslant 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$$
Par conséquent, $\ker(s + \operatorname{Id}) = \{0\}$ ce qui implique que $\ker(s - \operatorname{Id}) = E$ et $s = \operatorname{Id}$. Ainsi, on a obtenu que $f \circ f^* = \operatorname{Id}$, ce qui signifie que l'inverse de f est f^*. et nous savons que $f^2 = -\operatorname{Id}$ donc son inverse est $-f$ ce qui nous donne $f^* = -f$.

3. On procède par contraposée. Si $(u, f(u))$ est une famille liée et que u est non nul, on en déduit que $f(u)$ est colinéaire à u, ce qui signifie qu'il existe un réel a tel que $f(u) = au$ (E est un espace euclidien donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) et que $a \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f. Or les seules valeurs propres de f sont $\pm i$ qui sont des imaginaires purs ce qui nous fournit une contradiction et démontre que la famille $(u, f(u))$ est libre.

4. Commençons par analyser ce problème. Dire que f admet dans une base orthogonale dans laquelle sa matrice est $\begin{pmatrix} C & (0) & (0) \\ (0) & \ddots & (0) \\ (0) & (0) & C \end{pmatrix}$ où $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ signifie que E est la somme directe orthogonal de n espaces $(F_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$. En outre, chacun de ces espaces F_i doit être stable par f et la matrice de la restriction de F_i dans une base convenable est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si nous avons construit F_1, la somme directe des autres sous-espaces $(F_i)_{i \neq 1}$ est nécessairement contenu

dans $F_1^\perp$, l'orthogonal de F_1, et puisque la somme directe des $(F_i)_{i\neq 1}$ est stable par f, on doit également avoir la stabilité de $F_1^\perp$ par f. Dans ce cas, la restriction de f à $F_1^\perp$, qui est de dimension paire, vérifie les mêmes relations que f.
Il est dès lors naturel de procèder par récurrence sur la dimension en posant
$(\mathcal{P}_n)$: " tout endomorphisme f d'un espace de dimension $2n$ tel que $f^2 = -\operatorname{Id}$ et $f \circ f^* = f^* \circ f$ admet une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} C & (0) & (0) \\ (0) & \ddots & (0) \\ (0) & (0) & C \end{pmatrix}_{2n}$ où $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ".

Intialisation : $n = 2$. Soit u un vecteur non nul. La question précédente montre que la famille $(u, f(u))$ est une famille libre de cardinal 2 de l'espace vectoriel E qui est de dimension 2 donc il s'agit d'une base. Puisque $f(u) = f(u)$ et $f(f(u)) = f^2(u) = -u$, on en déduit que la matrice de f dans la base $(u, f(u))$ de E est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hérédité : supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie et soit f un endomorphisme de E de dimension $2n+2$ satisfaisant à $f^2 = -\operatorname{Id}$ et $f \circ f^* = f^* \circ f$. Soit u_1 un vecteur non nul de E, la famille $(u_1, f(u_1))$ est libre dans E. Notons $F_1 = \operatorname{Vect}(u_1, f(u_1))$. Cet espace est clairement stable par f. Montrons que son orthogonal est stable par f, c'est-à-dire que $f(x)$ est orthogonal à F_1 pour tout x dans $F_1^\perp$. Puisque que $f^* = -f$ et $f(y) \in F_1$ pour $y \in F_1$, on obtient que

$$\forall x \in F_1^\perp, \quad \forall y \in F_1, \quad (f(x), y) = (x, f^*(y)) = -(\underbrace{x}_{\in F_1^\perp}, \underbrace{f(y)}_{\in F_1}) = 0$$

donc $f(x)$ appartient bien $F_1^\perp$ pour tout x appartenant à $F_1^\perp$. Notons g la restriction de f à $F_1^\perp$. L'espace $F_1^\perp$, qui est de dimension $2n+2-2 = 2n$, est naturellement muni d'une structure d'espace euclidien par restriction de la structure euclidienne de E. Par définition d'une restriction, on a $g^2 = -\operatorname{Id}$. Montrons que g commute avec g^*

$$\forall x, y \in F_1^\perp, \quad (g(x), y) = (f(x), y) = (x, f^*(y)).$$

Ainsi, la restriction de f^* à $F_1^\perp$ est l'adjoint de g, i.e. $g^* = (f^*)_{|F_1^\perp}$ et la commutation de f et f^* induit la commutation de leurs restriction à $F_1^\perp$. Nous pouvons dès lors appliquer l'hypothèse de récurrence à $F_1^\perp$ et g, ce qui montre l'existence d'une base orthogonale $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de $g = f_{|F_1^\perp}$ est $\begin{pmatrix} C & (0) & (0) \\ (0) & \ddots & (0) \\ (0) & (0) & C \end{pmatrix}_{2n}$ où $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Puisque F_1 et $F_1^\perp$ sont orthogonaux, on en déduit que la famille $(u_1, f(u_1), \mathcal{B}')$ est une base orthogonale de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} C & (0) & (0) \\ (0) & \ddots & (0) \\ (0) & (0) & C \end{pmatrix}_{2n+2}$ où $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

5. Soit $P(X) = X^2 + aX + b$ un tel polynôme annulateur, que l'on peut supposer sans restriction unitaire). Dire que P n'admet aucune racine réelle signifie que le discriminant de P est strictement négatif.i.e. $a^2 - 4b < 0$. En se rappelant que la factorisation des trinômes découle de l'écriture du début d'un carré, on remarque que

$$P(X) = (X + \frac{a}{2})^2 + b - \frac{a^2}{4} = (X + \frac{a}{2})^2 + \frac{4b - a^2}{4}.$$

Puisque $4b - a^2 > 0$ et que P est un polynôme annulateur de g, on en déduit

$$(g + \frac{a}{2}\operatorname{Id})^2 + \frac{4b - a^2}{4} = 0 \Leftrightarrow (\frac{2}{\sqrt{4b - a^2}}\left(g + \frac{a}{2}\operatorname{Id}\right))^2 + \operatorname{Id} = 0$$

Si l'on pose $f = \dfrac{2}{\sqrt{4b - a^2}}\left(g + \dfrac{a}{2}\operatorname{Id}\right)$ alors $f^2 = -\operatorname{Id}$ et nous disposons des deux égalités suivantes.

$$\begin{aligned}
f \circ f^* &= \frac{2}{\sqrt{4b - a^2}}\left(g + \frac{a}{2}\operatorname{Id}\right) \circ \frac{2}{\sqrt{4b - a^2}}\left(g^* + \frac{a}{2}\operatorname{Id}\right) = \frac{4}{4b - a^2}\left(g + \frac{a}{2}\operatorname{Id}\right) \circ \left(g^* + \frac{a}{2}\operatorname{Id}\right) \\
&= \frac{4}{4b - a^2}\left(gg^* + \frac{a}{2}(g + g^*) + \frac{a^2}{4}\operatorname{Id}\right) \\
f^* \circ f &= \frac{2}{\sqrt{4b - a^2}}\left(g^* + \frac{a}{2}\operatorname{Id}\right) \circ \frac{2}{\sqrt{4b - a^2}}\left(g + \frac{a}{2}\operatorname{Id}\right) = \frac{4}{4b - a^2}\left(g^* + \frac{a}{2}\operatorname{Id}\right) \circ \left(g + \frac{a}{2}\operatorname{Id}\right) \\
&= \frac{4}{4b - a^2}\left(g^*g + \frac{a}{2}(g + g^*) + \frac{a^2}{4}\operatorname{Id}\right)
\end{aligned}$$

La commutation de g et g^* implique que f et f^* commutent. Nous sommes en droit d'appliquer la question précédente, donc la dimension de E est nécessairement paire et il existe une base orthogonale $\mathcal{B}$ de E telle que, si l'on pose $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$$mat(f,\mathcal{B})=\begin{pmatrix} C & (0) & (0)\\ (0) & \ddots & (0)\\ (0) & (0) & C\end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme g s'écrivant $g=\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}f-\dfrac{a}{2}\,\mathrm{Id}$, on en déduit que

$$mat(g,\mathcal{B})=\begin{pmatrix} D & (0) & (0)\\ (0) & \ddots & (0)\\ (0) & (0) & D\end{pmatrix}\text{ avec } D=\begin{pmatrix} -\dfrac{a}{2} & -\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2} & -\dfrac{a}{2}\end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 1.1.4 :

1. Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ alors la fonction $t\mapsto P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc l'intégrale $\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}dt$ existe bien.La bilinéarité et la symétrie découle immédiativement de la linéarité de l'intégrale, de la distributivité de la multiplication et de sa commutativité. Montrons que φ est définie positive. La fonction $t\mapsto P(t)^2\sqrt{1-t^2}$ est continue et positive sur $[0,1]$ donc l'intégrale $\int_{-1}^{1} P(t)^2\sqrt{1-t^2}dt=\varphi(P,P)$ est bien positive. Si $\varphi(P,P)=0$ alors $\int_{-1}^{1} P(t)^2\sqrt{1-t^2}dt=0$ et la fonction $t\mapsto P(t)^2\sqrt{1-t^2}$ étant positive et continue sur $[0,1]$, on en déduit que $P(t)^2\sqrt{1-t^2}=0$ sur $[0,1]$. Lorsque $t\in[0,1[$, $\sqrt{1-t^2}\neq 0$ donc $\forall t\in[0,1[,\quad P(t)^2=0$. Le polynôme P^2 admet donc une infinité de racines donc il est nul. L'anneau des polynômes étant intégre, le produit de deux polynômes est nul si et seulement l'un des deux est nul. Le polynôme P^2 s'écrit $P\times P$, on en déduit que $P=0$. Nous venons donc de montrer que φ est bilinéaire, symétrique, définie positive donc φ est bien un produit scalaire.

2. C'est un exercice absolument classique. Soit u un réel quelconque et n un entier naturel.

$$\begin{aligned}\exp(i(n+1)u) &= (\exp(iu)^{n+1})=(\cos u+i\sin u)^{n+1}=(i\sin u+\cos u)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\tbinom{n+1}{k}i^k\sin^k u\cos^{n+1-k}u\\ &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n+1}\tbinom{n+1}{2k}i^{2k}\sin^{2k}u\cos^{n+1-2k}u+\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n+1}\tbinom{n+1}{2k+1}i^{2k+1}\sin^{2k+1}u\cos^{n-2k}u\\ &= \underbrace{\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n+1}\tbinom{n+1}{2k}(-1)^k\sin^{2k}u\cos^{n+1-2k}u}_{\in\mathbb{R}}+i\underbrace{\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n+1}\tbinom{n+1}{2k+1}(-1)^k\sin^{2k+1}u\cos^{n-2k}u}_{\in\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

En remarquant que $2k+1\leqslant n+1$ signifie que $2k\leqslant n$, c'est-à-dire que $k\leqslant E(\dfrac{n}{2})$ et en passant à la partie imaginaire dans l'égalité précédente, on en déduit que

$$\sin((n+1)u)=\sin u\sum_{k=0}^{E(n/2)}\tbinom{n+1}{2k+1}(-1)^k\sin^{2k+1}u\cos^{n-2k}u=\sin u\sum_{k=0}^{E(n/2)}\tbinom{n+1}{2k+1}(-1)^k(1-\cos^2 u)^k\cos^{n-2k}u$$

Le polynôme $Q_n(X)=\sum_{k=0}^{E(n/2)}\tbinom{n+1}{2k+1}(-1)^k(1-X^2)^kX^{n-2k}$ convient très bien. Ce polynôme est somme de polynômes de degré n et le coefficient dominant de chacun de ces polynômes est $\tbinom{n+1}{2k+1}(-1)^k(-1)^k=\tbinom{n+1}{2k+1}$ donc le coefficient de X^n dans Q_n est $\sum_{k=0}^{E(n/2)}\tbinom{n+1}{2k+1}$ qui est manifestement un entier strictement positif. On en déduit que Q_n est un polynôme de degré n et son coefficient dominant est $\sum_{k=0}^{E(n/2)}\tbinom{n+1}{2k+1}$.

3. Soient n et m deux entiers distincts. On a par définition $\varphi(Q_n,Q_m)=\int_{-1}^{1}Q_n(t)Q_m(t)\sqrt{1-t^2}dt$. Pour exploiter la relation définissant les polynômes (Q_k), on effectue le changement de variable $t=\cos u$. Ainsi, lorsque $t=1$, on choisit

$u = 0$ ef lorsque $t = -1$, on choisit $u = \pi$. Puisque $u \in [0, \pi]$, $\sin u \geqslant 0$ et l'on a $dt = -\sin u du = -\sqrt{1-\cos^2 u} du$. Si l'on utilise en outre la célèbre formule trigonométrique $2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ et le fait que $n - m \neq 0$ et $n + m + 2 \neq 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\varphi(Q_n, Q_m) &= -\int_\pi^0 Q_n(\cos u) Q_m(\cos u) \sqrt{1-\cos^2 u}\sqrt{1-\cos^2 u} du = \int_0^\pi Q_n(\cos u) Q_m(\cos u)(1-\cos^2 u) du \\
&= \int_0^\pi Q_n(\cos u) Q_m(\cos u) \sin^2 u du = \int_0^\pi [\sin u Q_n(\cos u)] [\sin u Q_m(\cos u)] du \\
&= \int_0^\pi \sin((n+1)u) \sin((m+1)u) du = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi \cos((n-m)u) du - \int_0^\pi \cos((n+m+2)u) du\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\sin((n-m)u)}{n-m}\right]_{u=0}^{u=\pi} - \left[\frac{\sin((n+m+2)u)}{n+m+2}\right]_{u=0}^{u=\pi}\right) = 0
\end{aligned}$$

dpnc les Q_n sont deux à deux orthogonaux.

4. Il s'agit clairement d'un problème de moindre carré. Si l'on note $P = xX^2 + yX + z$ et $\|.\|$ la norme euclidienne induite par φ, on a alors on a l'égalité.

$$\int_{-1}^1 (t^3 + xt^2 + yt + z)^2 \sqrt{1-t^2} dt = \left\|X^3 + P\right\|^2.$$

Lorsque (x, y, z) décrit $\mathbb{R}^3$, le polynôme P décrit $\mathbb{R}_2[X]$ (ainsi que le polynôme $-P$) donc

$$\inf_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} g(x, y, z) = \inf_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (t^3 + xt^2 + yt + z)^2 \sqrt{1-t^2} dt = \inf_{P\in\mathbb{R}_2[X]} \left\|X^3 + P\right\|^2 = d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2$$

où $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$ est la distance du vecteur X^3 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$. On sait que cette distance est atteinte une et une seule fois. Si l'on note $P_0 = x_0X^2 + y_0X + z_0$ le projeté othogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ alors

$$d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 = \left\|X^3 - P_0\right\|^2 = \left\|X^3 + (-P_0)\right\|^2 = g(-x_0, -y_0, -z_0).$$

Par conséquent, la fonction g admet est minimale en $(-x_0, -y_0, -z_0)$ et c'est l'unique point où se réalise le minimum. Il nous reste à calculer ce projeté. Pour commencer, chaque polynôme $(Q_k)_{k\in[\![0,3]\!]}$ est de degré 3 et la famille $(Q_k)_{k\in[\![0,3]\!]}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$. On en déduit que la famille (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3), qui est contenu dans $\mathbb{R}_3[X]$ et de même cardinal que la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$, est une base orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$ et pour la même raison, a famille (Q_0, Q_1, Q_2) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$. En particulier, $(\frac{Q_k}{\|Q_k\|})_{0\leqslant k\leqslant 3}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_3[X]$ et l'on a la formule classique

$$X^3 = \sum_{k=0}^3 \varphi(X^3, \frac{Q_k}{\|Q_k\|})\frac{Q_k}{\|Q_k\|} = \sum_{k=0}^3 \frac{\varphi(X^3, Q_k)}{\|Q_k\|^2} Q_k$$

D'autre part, la famille $(\frac{Q_k}{\|Q_k\|})_{0\leqslant k\leqslant 2}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ et l'on a la formule classique du projecteur

$$P_0 = \sum_{k=0}^2 \varphi(X^3, \frac{Q_k}{\|Q_k\|})\frac{Q_k}{\|Q_k\|} = \sum_{k=0}^2 \frac{\varphi(X^3, Q_k)}{\|Q_k\|^2} Q_k.$$

De ces deux formules, on en déduit que

$$\left\|X^3 - P_0\right\|^2 = \left\| \underbrace{\frac{\varphi(X^3, Q_3)}{\|Q_3\|^2}}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{Q_3}_{\in\mathbb{R}_3[X]} \right\|^2 = \frac{\varphi(X^3, Q_3)^2}{\|Q_3\|^4} \|Q_3\|^2 = \frac{\varphi(X^3, Q_3)^2}{\|Q_3\|^2}.$$

A l'aide des calculs de la question précédente lorsque $n = m = k$, il est évident que

$$\forall k \in [\![0, 3]\!], \quad \|Q_k\|^2 = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi du - \int_0^\pi \cos((k+k+2)u) du\right) = \frac{1}{2}\left(\pi - \left[\frac{\sin(2k+2u)}{2k+2}\right]_{u=0}^{u=\pi}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Afin d'éviter de calculer de multiples intégrales (peu ragoutante), nous allons faire la remarque suivante. Le polynôme X^3 est une combinaison linéaire des polynômes Q_k. Nous avons précédemment expliciter les Q_k sous la forme d'une somme, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
Q_0(X) &= \sum_{k=0}^{E(0/2)} \binom{0+1}{2k+1}(-1)^k(1-X^2)^k X^{0-2k} = 1, \quad Q_1(X) = \sum_{k=0}^{E(1/2)} \binom{1+1}{2k+1}(-1)^k(1-X^2)^k X^{1-2k} = 2X \\
Q_2(X) &= \sum_{k=0}^{E(2/2)} \binom{2+1}{2k+1}(-1)^k(1-X^2)^k X^{2-2k} = 3X^2 - (1-X^2) = 4X^2 - 1 \\
Q_3(X) &= \sum_{k=0}^{E(3/2)} \binom{3+1}{2k+1}(-1)^k(1-X^2)^k X^{3-2k} = 4X^3 - 4(1-X^2)X = 8X^3 - 4X
\end{aligned}$$

On en déduit directement que

$$8X^3 = Q_3 + 2Q_1 \Leftrightarrow X^3 = \frac{1}{8}Q_3 + \frac{1}{4}Q_1$$

Par conséquent, en utilisant l'unicité de la décomposition dans une base, on a

$$\begin{gathered}
\frac{\varphi(X^3, Q_0)}{\|Q_0\|^2} = 0, \quad \frac{\varphi(X^3, Q_1)}{\|Q_1\|^2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\varphi(X^3, Q_2)}{\|Q_2\|^2} = 0, \quad \frac{\varphi(X^3, Q_3)}{\|Q_3\|^2} = \frac{1}{8} \\
\Rightarrow \varphi(X^3, Q_0) = 0, \quad \varphi(X^3, Q_1) = \frac{\pi}{8}, \quad \varphi(X^3, Q_2) = 0, \quad \varphi(X^3, Q_3) = \frac{\pi}{16}
\end{gathered}$$

Nous pouvons dès lors expliciter P_0 ainsi que $\left\|X^3 - P_0\right\|^2$

$$P_0 = \sum_{k=0}^{2} \frac{\varphi(X^3, Q_k)}{\|Q_k\|^2} Q_k = \frac{1}{4}Q_1 = \frac{X}{2} \text{ et } \left\|X^3 - P_0\right\|^2 = \frac{\varphi(X^3, Q_3)^2}{\|Q_3\|^2} = \frac{\pi}{128}.$$

D'après la discussion mené au début de la question, la fonction g admet $\frac{\pi}{128}$ comme minimum et ce minimum est uniquement atteint en $(0, -\frac{1}{2}, 0)$

3.2 Analyse

Correction de l'exercice 1.2.1 :

1. Nous allons commencer par montrer que l'image d'une fonction f de E est encore dans E. Il suffit simplement d'invoquer le théorème de continuité de Lebesgue.

   - Pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $t \mapsto \min(x,t)f(t)$ est continue sur le segment $[0,1]$ (car $\min(x,t) = \frac{x+t-|x-t|}{2}$) donc intégrable sur $[0,1]$
   - Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto \min(x,t)f(t)$ est continue sur le segment $[0,1]$.
   - Nous disposons de la majoration uniforme suivante

     $$\forall x \in [0,1], \quad \forall t \in [0,1], \quad |\min(x,t)f(t)| \leqslant |f(t)|$$

     (car x et t appartiennent à $[0,1]$ donc leur minimum est oositif et plus petit que 1) et la fonction $t \mapsto |f(t)|$ est bien entendu intégrable sur $[0,1]$ et indépendante de x.

   Nous en déduisons naturellement que la fonction Lf appartient à E. La linéarité de L découle de la linéarité de l'intégrale donc L est bien un endomorphisme de E. Pour démontrer que L est bien continu, nous utilisons la caractérisation classique

   $$\forall x \in [0,1], \quad |Lf(x)| \leqslant \int_0^1 |\min(x,t)|\,|f(t)|\,dt \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,dt \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty\,dt = \|f\|_\infty \Rightarrow \|Lf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty\,.$$

   On en déduit que L est bien continu sur E et que sa norme subordonnée est moindre que 1.

2. Soit λ une valeur propre non nulle de L et f une fonction propre associée. En utilisant que $\min(x,t) = t$ si $t \in [0,x]$ et $\min(x,t) = x$ lorsque $t \in [x,1]$, on en déduit que
$$Lf = \lambda f \Leftrightarrow \forall x \in [0,1], \quad \int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 f(t)dt = \lambda f(x). \tag{1}$$
Le cours d'intégration nous montre que, puisque f et $t \mapsto tf(t)$ sont continues, les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ et $x \mapsto \int_1^x tf(t)dt$ sont leurs primitives respectives, la première s'annulant en 0, la seconde s'annulant en 1. Par conséquent, elles sont toutes deux de classe C^1 et, comme l'on a $\int_x^1 f(t)dt = -\int_1^x f(t)dt$, on en déduit que λf s'obtient comme addition et produit de fonctions C^1 sur $[0,1]$ donc elle est C^1 sur $[0,1]$. Puisque λ n'est pas nul, on en déduit que f est C^1 également sur $[0,1]$. En particulier, nous avons les égalités suivantes
$$\forall x \in [0,1], \quad \left(\int_0^x tf(t)dt\right)' = xf(x) \text{ et } \left(\int_x^1 f(t)dt\right)' = \left(-\int_1^x f(t)dt\right)' = -f(x)$$

3. Soit λ une valeur propre non nulle de L et f une fonction propre associée. Le raisonnement précédent montre que l'on peut dériver la relation $Lf = \lambda f$ sur $[0,1]$ ce qui nous donne
$$\forall x \in [0,1], \quad xf(x) + \int_x^1 f(t)dt - xf(x) = \lambda f'(x) \Leftrightarrow -\int_1^x f(t)dt = \lambda f'(x). \tag{2}$$
Cette relation montre que $\lambda f'$ est la somme de fonctions C^1 sur $[0,1]$ donc λf est C^1 sur $[0,1]$ et f aussi ($\lambda \neq 0$) donc f est C^2 sur $[0,1]$. En dérivant cette dernière égalité, on obtient
$$\forall x \in [0,1], \quad -f(x) = \lambda f"(x) \Leftrightarrow \lambda f" + f = 0 \Leftrightarrow f" + \frac{1}{\lambda} f = 0.$$
Cette dernière équation différentielle étant extrément classique, on en déduit que
   - Si $\lambda = 0$ alors $f = 0$.
   - Si $\lambda > 0$, il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que :
$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = C_1 \sin(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x) + C_2 \cos(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x).$$
   - Si $\lambda < 0$, il existe deux constantes C_1' et C_2' telles que
$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = C_1 \operatorname{sh}(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}x) + C_2 \operatorname{ch}(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}x).$$

Puisque f satisfait à une équation différentielle du second ordre, il suffit de connaitre deux conditions initiales. L'égalité (1) évaluée en $x = 0$ montre que $\lambda f(0) = 0$ et comme $\lambda \neq 0$, on a $f(0) = 0$. Ceci implique que
   - Si $\lambda > 0$, $\forall x \in [0,1], \quad f(x) = C_1 \sin(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x)$ et $C_1 \neq 0$ car f est une fonction propre.
   - Si $\lambda < 0$, $\forall x \in [0,1), \quad f(x) = C_1 \operatorname{sh}(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}x)$ et $C_1 \neq 0$ car f est une fonction propre.

D'autre part, l'égalité (2) évaluée en $x = 1$ montre que $\lambda f'(1) = 0$ donc $f'(1) = 0$ ($\lambda \neq 0$). On en déduit que
   - Si $\lambda > 0$,
$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow \cos(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{2k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}.$$
Puisque $\lambda > 0$, le réel $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ est strictement positif, on en déduit que $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2k+1}{2}\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$ donc $\lambda = \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}$, $k \in \mathbb{N}$. On constate alors que les fonctions propres associées à $\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}$ sont colinéaires à la fonction $x \mapsto \sin(\frac{2k+1}{2}\pi x)$.

- Si $\lambda < 0$, $f'(1) = 0 \Leftrightarrow \text{ch}(\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}) = 0$ ce qui est impossible.

On en déduit que

$$\text{Sp}(L) = \{\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}, \quad k \in \mathbb{N}\} \text{ et } E_{4/[(2k+1)^2\pi^2]}(L) = \text{Vect}(x \mapsto \sin(\frac{2k+1}{2}\pi x)).$$

Correction de l'exercice 1.2.2 :

1. On applique simplement le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Pour tout entier n, la la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^4)^n}$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc intégrable sur ce segment et nous disposons de la majoration uniforme par rapport à n,
$$\forall n \geqslant 0, \quad \forall t \in [0,1], \quad \frac{1}{(1+t^4)^n} \leqslant 1.$$
La fonction $t \mapsto 1$ étant clairement intégrable sur $[0,1]$, on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+t^4)^n}\right) dt = \int_0^1 0dt = 0.$$

2. Admettons que la série soit convergente. Puisque pour tout entier n, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^4)^n}$ est positive, intégrable sur $[0,1]$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_0^1 \dfrac{dt}{(1+t^4)^n}$ est convergente, on en déduit, par le théorème de permutation série-intégrale, que la fonction $t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(1+t^4)^n} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+t^4}} = \dfrac{1+t^4}{t^4} = 1 + \dfrac{1}{t^4}$ est intégrable sur $[0,1]$, ce qui est visiblement faux puisqu'il s'agit d'une fonction positive, continue sur $]0,1]$ et équivalente en 0 à $\dfrac{1}{t^4}$ qui n'est pas intégrable sur $]0,1]$. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ne peut-être convergente.

3. Nous allons de nouveau invoquer le théorème de permutation série intégrale. Pour commencer, on se rappelle que
$$\forall x \in [0,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$
La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ étant à terme positif, on en déduit que
$$\forall N \geqslant 1, \quad \forall x \in [0,1[, \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} \leqslant -\ln(1-x). \tag{3}$$
On remarque ensuite que la fonction
$$t \mapsto -\ln(1-\frac{1}{1+t^4}) = -\ln(\frac{t^4}{1+t^4}) = \ln(1+t^4) - 4\ln t$$
est la somme de deux fonctions intégrables sur $]0,1]$ donc elle est intégrable sur $]0,1]$. En substituant x par $\dfrac{1}{1+t^4}$ dans la majoration (3) et en intégrant sur $]0,1]$, on obtient
$$\forall N \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 \frac{dt}{n(1+t^4)^n} \leqslant -\int_0^1 \ln(1-\frac{1}{1+t^4})dt < +\infty.$$
Les sommes partielles de la série positive $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{n}$ étant majorée indépendamment de N par une constante finie, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{n}$ est convergente.

On invoque ensuite le théorème de permutation série intégrale. Chaque fonction $t \mapsto \dfrac{1}{n(1+t^4)^n}$ est intégrable et positive sur $]0,1]$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\int\limits_0^1 \dfrac{dt}{n(n1+t^4)^n}$ est convergente. Le théorème de permutation série intégrale montre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\frac{dt}{n(n1+t^4)^n}=\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n1+t^4)^n}\right)dt=-\int_0^1\ln(1-\frac{1}{1+t^4})dt$$

Il nous reste à calculer cette intégrale. D'après remarque sur l'intégrabilité de cette fonction, on a

$$-\int_0^1\ln(1-\frac{1}{1+t^4})dt=\int_0^1\ln(1+t^4)dt-4\int_0^1\ln t dt$$

On sait que $t\mapsto t\ln t-t$ est une primitive de $t\mapsto \ln t$, donc je laisse le lecteur vérifier que (en intégrant d'abord sur $[\varepsilon,1]$), $\int\limits_0^1 \ln tdt=-1$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{n}=4+\int_0^1\ln(1+t^4)dt.$$

Pour calculer l'autre intégrale, on intégre 1, ce qui nous donne

$$\int_0^1\ln(1+t^4)dt=\left[\int_0^1 t\ln(1+t^4)dt\right]_{t=0}^{t=1}-4\int_0^1\frac{t^4}{1+t^4}dt=\ln 2-4\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^4}\right)dt=\ln 2-4+\int_0^1\frac{4dt}{1+t^4}$$

Cette dernière intégrale est une belle fraction rationnelle. La factorisation de X^4+1 sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$X^4+1=(X^2+1)^2-2X^2=\left[X^2+1-\sqrt{2}X\right]\left[X^2+1+\sqrt{2}X\right],$$

et chacun des trinômes est de discriminant -1 donc irréductible sur $\mathbb{R}[X]$. On en déduit que la décompositon en éléments simples $\dfrac{4}{1+X^4}$ de la fraction rationnelle de degré -4 (donc elle n'a pas de partie entière) est de la forme

$$\frac{4}{1+X^4}=\frac{aX+b}{X^2+1-\sqrt{2}X}+\frac{cX+d}{X^2+1+\sqrt{2}X}.$$

La fonction $X\mapsto \dfrac{4}{1+X^4}$ étant paire, on en déduit que $-a=c$ et $b=d$, c'est-à-dire

$$\frac{4}{1+X^4}=\frac{aX+b}{X^2+1-\sqrt{2}X}+\frac{-aX+b}{X^2+1+\sqrt{2}X}.$$

Pour déterminer b, il suffit d'évaluer en $X=0$, ce qui nous donne $b=2$ et pour obtenir a, on évalue en $X=1$, ce qui nous donne

$$2=\frac{a+2}{2-\sqrt{2}}+\frac{-a+2}{2+\sqrt{2}}\Leftrightarrow 2=\frac{(a+2)(2+\sqrt{2})}{2}+\frac{(-a+2)(2-\sqrt{2})}{2}\Leftrightarrow 4=2\sqrt{2}a+8\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

et l'on a donc la décomposition recherchée

$$\frac{4}{1+X^4}=\frac{-\sqrt{2}X+2}{X^2+1-\sqrt{2}X}+\frac{\sqrt{2}X+2}{X^2+1+\sqrt{2}X}$$

On en déduit alors l'écriture

$$\frac{4}{1+X^4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2+1-\sqrt{2}X}+\frac{1}{X^2+1-\sqrt{2}X}+\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+1+\sqrt{2}X}+\frac{1}{X^2+1+\sqrt{2}X}$$

En remarquant pour finir que

$$\frac{1}{X^2+1-\sqrt{2}X}=.\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}X-1)^2+1}\text{ et }\frac{1}{X^2+1+\sqrt{2}X}=\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}X+1)^2+1},$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{4dt}{1+t^4} &= \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(t^2+1-\sqrt{2}t)+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}t-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(t^2+1+\sqrt{2}t)+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}t+1)\right]_{t=0}^{t=1}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(2-\sqrt{2})+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(2+\sqrt{2})+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

En remarquant que $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ si $x>0$ et que $\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1>0$, on en déduit que

$$\int_0^1 \frac{4dt}{1+t^4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right]+\frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow \int_0^1 \ln(1+t^4)dt=\ln 2-4+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right]+\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{n}=-4-\int_0^1 \ln(1+t^4)dt=\ln 2+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right]+\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

4. Nous allons utiliser une intégration par partie .

$$\begin{aligned}u_n &= \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n}=\left[\frac{t}{(1+t^4)^n}\right]_{t=0}^{t=1}+4n\int_0^1\frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}}dt=\frac{1}{2^n}+4n\left(\int_0^1\frac{1}{(1+t^4)^n}dt-\int_0^1\frac{1}{(1+t^4)^{n+1}}dt\right)\\ &= \frac{1}{2^n}+4n(u_n-u_{n+1})\end{aligned}$$

D'autre part, puisque $t^4\leqslant t$ sur $[0,1]$, on en déduit que

$$u_n=\int_0^1\frac{dt}{(1+t^4)^n}\geqslant\int_0^1\frac{dt}{(1+t)^n}=\frac{1}{(n-1)}(1-\frac{1}{2^{n-1}})$$

donc

$$2^n u_n\geqslant\frac{2^n-2}{(n-1)}\Leftrightarrow\frac{1}{2^n u_n}\leqslant\frac{n-1}{2^n-2}.$$

En utilisant la relation de récurrence satisfaite par la suite (u_n), on obtient

$$1-4n(1-\frac{u_{n+1}}{u_n})=\frac{1}{2^n u_n}\leqslant\frac{n-1}{2^n-2}\leqslant\frac{n}{2^n-2},$$

c'est-à-dire

$$1-4n(1-\frac{u_{n+1}}{u_n})=O(\frac{n}{2^n})\Leftrightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{1}{4n}+O(\frac{1}{2^n}).$$

Cela nous fait penser à la règle du $n^\alpha u_n$. Pour cela, on pose $v_n=n^{1/4}u_n$. Alors

$$\begin{aligned}\ln(v_{n+1})-\ln(v_n) &= \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})+\frac{1}{4}\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(1-\frac{1}{4n}+O(\frac{1}{2^n}))+\frac{1}{4n}+O(\frac{1}{n^2})\\ &= -\frac{1}{4n}+O(\frac{1}{2^n})+\frac{1}{4n}+O(\frac{1}{n^2})=O(\frac{1}{n^2}).\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe que une certaine constante $C>0$ telle que

$$\forall n\geqslant 1,\quad |\ln(v_{n+1})-\ln(v_n)|\leqslant\frac{C}{n^2}.$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant}\frac{1}{n^2}$ étant convergente, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\ln(v_{n+1})-\ln(v_n)$ est absolument convergente donc convergente. Par conséquent, la suite $(\ln v_n)_{n\geqslant 1}$ est converge. Soit L sa limite, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\exp L$. Ainsi, il existe un réel $D=\exp(L)>0$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}n^{1/4}u_n=D\Leftrightarrow u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}Dn^{-1/4}.$$

On retrouve en particulier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ est divergente mais la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{u_n}{n}$ converge.

Correction de l'exercice 1.2.3 :

1. On utilise bien entendu le théorème de dérivation sous le signe somme de Lebesgue.

   - Les fonctions $(x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(xt)dt$ et $(x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(xt)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\times$.
   - La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$, équivalente en 0^+ à la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable sur $[0,1]$, négligeable en $+\infty$ à la fonction e^{-t} qui est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
   - La fonction $t \mapsto \sqrt{t}e^{-t}$ est continue, positive sur $[0,+\infty[$ et négligeable en $+\infty$ à la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ qui est intégrablesur $[1,+\infty[$ donc la fonction $t \mapsto \sqrt{t}e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
   - Nous disposons également des majorations uniformes relativement à $x \in \mathbb{R}$ suivantes

$$\begin{array}{rcl}\forall (x,t) & \in & \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\times, \quad \left|\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(xt)\right| \leqslant \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \text{ et } \left|\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(xt)\right| \leqslant \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \\ \forall (x,t) & \in & \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\times, \quad \left|\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(xt)\right)\right| = \left|-\sqrt{t}e^{-t}\sin(xt)\right| \leqslant \sqrt{t}e^{-t} \\ \forall (x,t) & \in & \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\times, \quad \left|\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(xt)\right)\right| = \left|\sqrt{t}e^{-t}\cos(xt)\right| \leqslant \sqrt{t}e^{-t}\end{array}$$

   Toutes les hypothèses du théorème de dérivation de Lebesgue sont réunies ce qui nous permet d'affirmer que les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) = -\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}\sin(xt)dt \text{ et } v'(x) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}\cos(xt)dt.$$

2. On effectue une intégration par partie sur chacune des intégrales donnant u' et v' en intégrant $t \mapsto e^{-t}$, ce qui nous donne,

$$\begin{array}{rcl}u'(x) & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}(-e^{-t})\sin(xt)dt = \underbrace{\left[\sqrt{t}e^{-t}\sin(xt)\right]_{t=0}^{t=+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\sin(xt) + x\sqrt{t}\cos(xt)\right)e^{-t}dt = -\frac{1}{2}v(x) - xv'(x) \\ v'(x) & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}\cos(xt)dt = \underbrace{\left[\sqrt{t}(-e^{-t})\cos(xt)\right]_{t=0}^{t=+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\cos(xt) - x\sqrt{t}\sin(xt)e^{-t}\right)e^{-t}dt = \frac{1}{2}u(x) + xu'(x)\end{array}$$

   Ces deux égalités sont équivalentes au système

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{l} u'(x) + xv'(x) = -\dfrac{1}{2}v(x) \\ -xu'(x) + v'(x) = \dfrac{1}{2}u(x)\end{array}\right. \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix}1 & x \\ -x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix}' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-v \\ u\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix}$$

   Puisque le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix}1 & x \\ -x & 1\end{pmatrix}$ est $1+x^2$, qui ne s'annule pour aucun réel x, on en déduit qu'elle est inversible et son inverse est $\dfrac{1}{1+x^2}\begin{pmatrix}1 & -x \\ x & 1\end{pmatrix}$, ce qui nous permet d'obtenir le système

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix}' = \frac{1}{2(1+x^2)}\begin{pmatrix}1 & -x \\ x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dfrac{x}{2(x^2+1)} & -\dfrac{1}{2(x^2+1)} \\ \dfrac{1}{2(x^2+1)} & -\dfrac{x}{2(x^2+1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix}.$$

3. Si l'on pose $z(x) = u(x) + iv(x)$ alors

$$\begin{array}{rcl}z'(x) & = & u'(x) + iv'(x) = -\dfrac{xu(x)}{2(x^2+1)} - \dfrac{v(x)}{2(x^2+1)} + i\left(\dfrac{u(x)}{2(x^2+1)} - \dfrac{xv(x)}{2(x^2+1)}\right) \\ & = & \left(\dfrac{-x}{2(1+x^2)} + \dfrac{i}{2(1+x^2)}\right)(u(x)+iv(x)) = \left(\dfrac{-x}{2(1+x^2)} + \dfrac{i}{2(1+x^2)}\right)z(x)\end{array}$$

En mimant la résolution classique des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre, on pose alors

$$\begin{aligned} w(x) &= z(x)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^x \frac{s}{s^2+1}ds - i\frac{1}{2}\int_0^x \frac{ds}{s^2+1}\right) = z(x)\exp\left(\frac{1}{4}\ln(x^2+1) - i\frac{1}{2}\arctan(x)\right) \\ &= z(x)\sqrt[4]{x^2+1}\exp\left(-\frac{i}{2}\arctan(x)\right). \end{aligned}$$

Il est immédiat que $\forall x \in \mathbb{R},\quad w'(x) = 0$. Si l'on pose $w = \alpha + i\beta$ où α et β sont deux fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$. Chacune de ces fonctions admet comme dérivée la fonction nulle, donc chacune est constante sur $\mathbb{R}$ et w est constante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad w(x) = w(0) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad z(x)\sqrt[4]{x^2+1}\exp\left(-\frac{i}{2}\arctan(x)\right) = z(0) \Leftrightarrow z(x) = \frac{\exp\left(i\frac{\arctan(x)}{2}\right)}{\sqrt[4]{x^2+1}}z(0).$$

De façon évidente, $v(0) = 0$ et, en utilisant le changement de variable $t' = \sqrt{t}$, on a

$$u(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \sqrt{\pi}$$

ce qui nous donne $w(0) = \sqrt{\pi}$. On en déduit, en séparant les parties réelles et imaginaires, que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad u(x) = \frac{\cos\left(\frac{\arctan(x)}{2}\right)}{\sqrt[4]{x^2+1}}\sqrt{\pi} \text{ et } v(x) = \frac{\sin\left(\frac{\arctan(x)}{2}\right)}{\sqrt[4]{x^2+1}}\sqrt{\pi}$$

Correction de l'exercice 1.2.4 :

1. Les solutions de l'équation homogène s'écrivent $x \mapsto \lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x$. On effectue alors la variation de la constante pour obtenir une solution particulière. On cherche donc y sous la forme $y(x) = \lambda_1(x)\sin x + \lambda_2(x)\cos x$ avec $\lambda_1'(x)\sin x + \lambda_2'(x)\cos x = 0$. Par conséquent, on en déduit que

$$y'(x) = \underline{\lambda_1'(x)\sin x} + \lambda_1(x)\cos x + \underline{\lambda_2'\cos x} - \lambda_2 \sin x = \lambda_1(x)\cos x - \lambda_2\sin x$$

puis que

$$y"(x) = \lambda_1'(x)\cos x - \lambda_1(x)\sin x - \lambda_2'(x)\sin x - \lambda_2(x)\cos x$$

donc

$$\begin{aligned} y"(x) + y(x) &= f(x) \Leftrightarrow \lambda_1'(x)\cos x - \lambda_1(x)\sin x - \lambda_2'(x)\sin x - \lambda_2(x)\cos x + \lambda_1(x)\sin x + \lambda_2(x)\cos x = f(x) \\ &\Leftrightarrow \lambda_1'(x)\cos x - \lambda_2'(x)\sin x = f(x). \end{aligned}$$

Le couple de fonctions (λ_1, λ_2) satisfait alors au système différentiel

$$\begin{cases} \lambda_1'(x)\sin x + \lambda_2'(x)\cos x = 0 \\ \lambda_1'(x)\cos x - \lambda_2'(x)\sin x = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1'(x) \\ \lambda_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

On remarque la matrice $\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}$ est inversible quel que soit $x \in \mathbb{R}$ (c'est normal car les solutions sont linéairement indépendantes donc le wronskien ne s'annule jamais) et elle est son propre inverse. Ainsi, on a

$$\begin{pmatrix} \lambda_1'(x) \\ \lambda_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x)\cos x \\ -f(x)\sin x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1(x) = \int_0^x f(t)\cos t dt + C_1 \\ \lambda_1(x) = -\int_0^x f(t)\sin t dt + C_2 \end{cases}$$

La solution générale de l'équation est de la forme

$$y(x) = \left(\int_0^x f(t)\cos t dt + C_1\right)\sin x + \left(-\int_0^x f(t)\sin t dt + C_2\right)\cos x$$

et les conditions initiales impliquent que $C_2 = C_1 = 0$ donc

$$\forall x \in [0,+\infty[\quad y(x) = \sin x \int_0^x f(t)\cos t dt - \cos x \int_0^x f(t)\sin t dt = \int_0^x f(t)\left(\sin x \cos t - \cos x \sin t\right)dt = \int_0^x f(t)\sin(x-t)dt.$$

On aurait pu procéder plus rapidement. En développant $\sin(x-t)$*, la solution proposée s'écrit,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f(t)\sin(x-t)dt = \sin x \int_0^x f(t)\cos t dt - \cos x \int_0^x f(t)\sin t dt$$

et se rappelant que, si g *est continue sur* $\mathbb{R}_+$*, alors la fonction* $x \mapsto \int_0^x g(t)dt$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+$ *et sa dérivée est* g*. On vérifie alors directement que la fonction* $x \mapsto \int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$ *est bien solution du problème de Cauchy* $\left\{\begin{array}{c} y" + y = f(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{array}\right.$*. Par unicité de la solution, on en déduit que* $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad y(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$

2. Puisque y_0 est continue sur $\mathbb{R}_+$, le cours sur les équations différentielles linéaires nous montre que y_1 existe bien et est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$. Par itération, on en déduit que la suite (y_n) est bien définie et que chaque terme est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$. On est bien tenté d'appliquer le résultat précédent à $f = \sigma y_{n-1}^2$. Malheureusement, $y_n(0) \neq 0$ à prori. Si l'on pose $z_n = y_n - \alpha$ alors z_n vérifie l'équation différentielle

$$z_n'' + z_n = y_n'' + y_n - \alpha = \sigma(y_{n-1}(x))^2 - \alpha$$

et $z_n(0) = 0$ et $z_n'(0) = y_n'(0) = 0$. Nous sommes alors en droit d'appliquer la question 1 avec $f = \sigma(y_{n-1}(x))^2 - \alpha$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \forall x \quad &\in \quad [0,b], \quad z_n(x) = \int_0^x \left(\sigma(y_{n-1}(x))^2 - \alpha\right)\sin(x-t)dt \\ &\Leftrightarrow \quad y_n(x) = \alpha + \sigma\int_0^x (y_{n-1}(x))^2\sin(x-t)dt - \alpha\int_0^x \sin(x-t)dt = \alpha + \sigma\int_0^x (y_{n-1}(x))^2\sin(x-t)dt - \alpha\left[\cos(x-t)\right]_{t=0}^{t=x} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in [0,b], \quad y_n(x) = \sigma\int_0^x (y_{n-1}(x))^2\sin(x-t)dt + \alpha\cos x = \sigma\int_0^x (y_{n-1}(x))^2\sin(x-t)dt + y_0(x) \end{aligned}$$

3. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{H}_n) : \forall x \in [0,b], \quad |y_n(x)| < 1$.
Initialisation : $n = 0$. $\forall x \in [0,b], \quad |y_0(x)| \leqslant |\alpha| \leqslant |\alpha| + \sigma b < 1$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie. La fonction $|y_n|$ est continue sur le segment $[0,b]$ donc elle atteint son maximum sur $[0,b]$. L'hypothèse de récurrence combinée à l'inégalité triangulaire montre que

$$\forall x \in [0,b], \quad |y_{n+1}(x)| \leqslant \sigma\int_0^x \left|y_n(t)^2\right|dt + |y_0(x)| \leqslant \sigma\int_0^x dt + |\alpha| = \sigma x + |\alpha| \leqslant \sigma b + |\alpha| < 1$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

4. On procède de nouveau par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : \forall x \in [0,b], \quad |u_n(x)| \leqslant \dfrac{(2\sigma)^n x^n}{n!}$. Afin d'éviter le calcul relativement fastidieux de y_1, on remarque que, si l'on convient de poser $y_{-1} = 0$ alors $y_0" + y_0 = \sigma(y_{-1})^2$ avec $y_0(0) = \alpha$ et $y_0'(0) = 0$.
Initialisation : $n = 0$, Alors

$$\forall x \in [0,b], \quad |y_0(x) - y_{-1}(x)| = |y_0(x)| \leqslant |\alpha| \leqslant 1 = \frac{(2\sigma)^0 x^0}{0!}$$

donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie. Pour tout $x \in [0,b]$, on a

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}(x)| &= |y_{n+1}(x) - y_n(x)| = \sigma \left| \int_0^x \left[(y_n(t))^2 - (y_{n-1}(t))^2\right] \sin(x-t)dt \right| \leqslant \sigma \int_0^x \left|(y_n(t))^2 - (y_{n-1}(t))^2\right| dt \\
&= \sigma \int_0^x |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \times |y_n(t) + y_{n-1}(t)|\, dt \leqslant \sigma \int_0^x |u_n(t)| \times [\underbrace{|y_n(t)|}_{<1} + \underbrace{|y_{n-1}(t)|}_{<1}]dt \leqslant 2\sigma \int_0^x |u_n(t)|\, dt \\
&\leqslant 2\sigma \int_0^x \frac{(2\sigma)^n t^n}{n!} dt = \frac{(2\sigma)^{n+1}}{n!} \int_0^x t^n dt = \frac{(2\sigma)^{n+1}}{n!} \times \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{(2\sigma)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence. On en déduit que

$$\forall x \in [0,b], \quad |u_n(x)| \leqslant \frac{(2\sigma b)^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow \sup_{x\in[0,b]} |u_n(x)| \leqslant \frac{(2\sigma b)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Puisque la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(2\sigma b)^{n+1}}{(n+1)!} = \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(2\sigma b)^n}{n!}$ est convergente, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sup\limits_{x\in[0,b]} |u_n(x)|$ est convergente, ce qui signifie que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est normalement convergente sur $[0,b]$ donc uniformément convergente sur $[0,b]$. L'égalité $u_n = y_n - y_{n-1}$ montre la suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est uniformément convergente sur $[0,b]$.

5. Nous disposons pour tout entier naturel n de l'égalité

$$\forall x \in [0,b], \quad y_n(x) = \sigma \int_0^x (y_{n-1}(t))^2 \sin(x-t)dt + y_0(x)$$

Fixons pour l'instant $x \in [0,b]$. La question 3 montre que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in [0,x]$, $|y_{n-1}(t)| \leqslant 1$ donc nous disposons de la majoration uniforme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,x], \quad \left|(y_{n-1}(t))^2 \sin(x-t)\right| \leqslant 1.$$

La fonction $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0,1]$, chaque fonction $t \mapsto (y_{n-1}(t))^2 \sin(x-t)$ est continue sur $[0,x]$ donc intégrable, le théorème de permutation limite intégrale de Lebesgue montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x (y_{n-1}(t))^2 \sin(x-t)dt = \int_0^x \left(\lim_{n\to+\infty} y_{n-1}(t)\right)^2 \sin(x-t)dt = \int_0^x (g(t))^2 \sin(x-t)dt.$$

D'autre part, en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'égalité

$$y_n(x) = \sigma \int_0^x (y_{n-1}(t))^2 \sin(x-t)dt + y_0(x),$$

on en déduit que

$$g(x) = \sigma \int_0^x (g(t))^2 \sin(x-t)dt + y_0(x) \Leftrightarrow g(x) - y_0(x) = \sigma \int_0^x (g(t))^2 \sin(x-t)dt,$$

cette égalité étant vérifiée quel que soit $x \in [0,b]$. La fonction g étant la limite uniforme sur $[0,b]$ de la suite de fonctions (y_n), on peut affirmer que g est continue sur $[0,b]$. La question 1 appliquée à la fonction $f = \sigma g^2$ montre que la fonction $x \mapsto \int_0^x \sigma\,(g(t))^2 \sin(x-t)dt$ est l'unique solution de classe C^2 sur $[0,b]$ vérifiant le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{c} y" + y = \sigma(g(x))^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right. .$$

On en déduit immédiatement que la fonction $x \mapsto g(x) - y_0(x)$ est de classe C^2 sur $[0,b]$ et vérifie

$$(g-y_0)" + (g-y_0) = \sigma(g(x))^2 \text{ avec } (g-y_0)(0) = 0 \text{ et } (g-y_0)'(0) = 0.$$

Puisque $y_0(x) = \alpha \cos x$, on en déduit que g est de class C^2 sur $[0,b]$ et vérifie

$$g" + g = \sigma(g(x))^2 \text{ avec } g(0) = \alpha \text{ et } g'(0) = 0$$

donc g est bien solution de notre problème de Cauchy non linéaire.

3.3 Géométrie

Correction de l'exercice 1.3.1 : Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation polaire $\rho = a(1+\cos\theta)$ avec $a > 0$.

1. Le point $M(\theta)$ de $\mathcal{C}$ est donné par

$$\overrightarrow{OM(\theta)} = \rho(\theta)\left(\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}\right) = a(1+\cos\theta)\left(\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}\right)$$

et la tangente à $\mathcal{C}$ en $M(\theta)$ est la droite passant par $M(\theta)$ et de direction

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{OM(\theta)}}{d\theta} &= -a\sin\theta\left(\cos\theta\overrightarrow{i} + \sin\theta\overrightarrow{j}\right) + a(1+\cos\theta)\left(-\sin\theta\overrightarrow{i} + \cos\theta\overrightarrow{j}\right)\\ &= a\left(-(\sin\theta + \sin 2\theta)\,\overrightarrow{i} + (\cos\theta+\cos 2\theta)\,\overrightarrow{j}\right) = 2a\cos\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{3\theta}{2}\overrightarrow{i} + \cos\frac{3\theta}{2}\overrightarrow{j}\right)\end{aligned}$$

Pour que la tangente ne soit non verticale, on doit exiger que $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$ et $\sin\frac{3\theta}{2} \neq 0$ et, sous cette hypothèse, la pente de la tangente en $M(\theta)$ est $-\frac{\cos\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{3\theta}{2}}$.. Les conditions de non annulation se traduit par

$$\theta \bmod 2\pi \notin \{\pi \bmod 2\pi, \frac{2\pi k}{3} \bmod 2\pi\ k \in [\![0,2]\!]\}.$$

Soit $\overrightarrow{D}$ une direction non verticale et $M(\theta)$ un point où la tangente est de direction $\overrightarrow{D}$, ce qui implique que la condition $\theta \bmod 2\pi \notin \{\pi \bmod 2\pi, 0 \bmod 2\pi, \pm\frac{2\pi}{3} \bmod 2\pi\}$ est satisfaite. La donnée de la direction $\overrightarrow{D}$ est équivalente à la donnée de la pente $p \in \mathbb{R}$. Puisqu'il existe un unique réel $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $p = \tan\alpha$. Si $p \neq 0$ (donc $\alpha \neq 0$), on en déduit que

$$\begin{aligned}-\frac{\cos\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{3\theta}{2}} &= p \Leftrightarrow -\frac{1}{\tan\frac{3\theta}{2}} = \tan\alpha \Leftrightarrow -\tan(\frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}) = \tan\alpha \Leftrightarrow \tan(\frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}) = \tan(-\alpha)\\ &\Leftrightarrow \frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2} = -\alpha \bmod \pi \Leftrightarrow \theta = -\frac{2}{3}\alpha - \frac{\pi}{3} \bmod \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

Si $p = 0$ (donc $\alpha = 0$) on obtient l'équation

$$-\frac{\cos\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{3\theta}{2}} = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{3\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3\theta}{2} = -\frac{\pi}{2} \bmod \pi \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} \bmod \frac{2\pi}{3}.$$

Comme $\theta \neq \pi \bmod 2\pi$, on en déduit que $\theta = -\frac{\pi}{3} \bmod 2\pi$ et $\theta = \frac{\pi}{3} \bmod 2\pi$. En $\theta = \pi \bmod 2\pi$, le vecteur tangent à $\mathcal{C}$ est nul. Néanmoins, on constate l'existence d'une limite nulle de la pente lorsque $\theta \to -\pi$ dont l'existence d'un point de rebroussement en $M(-\pi) = (0,0)$ admettant une tangente horizontale en ce point de rebroussement. On peut dès lors accepter la solution $\theta = \pi \bmod 2\pi$ (au sens des tangentes en un point de rebroussement).
On peut résumer les deux cas $p \neq 0$ et $p = 0$ en

$$-\frac{\cos\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{3\theta}{2}} = p \Leftrightarrow -\frac{\cos\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{3\theta}{2}} = \tan\alpha \Leftrightarrow \theta = -\frac{2}{3}\alpha - \frac{\pi}{3} \bmod \frac{2\pi}{3}.$$

On en déduit immédiat qu'il existe trois possibilités distinctes pour $\theta \bmod 2\pi$ donnée par

$$\theta_k = -\frac{2}{3}\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} \bmod 2\pi \quad k \in [\![0,2]\!].$$

Si la direction $\overrightarrow{D}$ est verticale ("$\alpha = -\frac{\pi}{2}$") alors la tangente en $M(\theta)$ est de direction $\overrightarrow{j}$, ce qui implique que $\theta \bmod 2\pi \in \{\frac{2\pi k}{3} \bmod 2\pi\ k \in [\![0,2]\!]\}$. Un calcul direct montre que tous ses angles conviennent. On constate alors que

la formule précédente convient si l'on pose $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$.
En conclusion, pour une direction $\overrightarrow{D}$ de pente $p = \tan\alpha$, $\alpha \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ donnée, il existe trois et trois seuls points distincts $M(\theta_k)$, avec

$$\theta_k = -\frac{2}{3}\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} \mod 2\pi \quad k \in [\![0, 2]\!],$$

où la tangente à $\mathcal{C}$ est de direction $\overrightarrow{D}$ (les points sont car ils n'ont pas les mêmes angles polaires modulo 2π).

2. La question précédente montre que la donnée d'une direction de $\overrightarrow{D}$ est équivalent à la donnée d'un angle $\alpha \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.
L'isobarycentre G_α des points $(M_k)_{k\in[\![0,2]\!]}$ correspondants est défini par

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OG_\alpha} &= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2}\overrightarrow{OM(\theta)} = \frac{a}{3}\sum_{k=0}^{2}\left[1+\cos(-\frac{2}{3}\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3})\right]\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\overrightarrow{i} + \sin\left(-\frac{2}{3}\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\overrightarrow{j}\right) \\
&= \frac{a}{3}\left(\sum_{k=0}^{2}\cos\left(-\frac{2}{3}\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right)\overrightarrow{i} + \frac{a}{2}\left(\sum_{k=0}^{2}\sin\left(-\frac{2}{3}\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right)\overrightarrow{j} \\
&\quad + \frac{a}{3}\left(\sum_{k=0}^{2}\cos^2\left(-\frac{2}{3}\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right)\overrightarrow{i} + \frac{a}{2}\left(\sum_{k=0}^{2}\cos\left(-\frac{2}{3}\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\sin\left(-\frac{2}{3}\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right)\overrightarrow{j}
\end{aligned}$$

En utilisant utilisant que la formule classique

$$\sum_{k=0}^{2}\exp(\beta + \frac{2\pi k i}{3}) = \exp(\beta)\sum_{k=0}^{2}\exp(\frac{2\pi i}{3})^k = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{2}\cos(\beta + \frac{2\pi k}{3}) = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{2}\sin(\beta + \frac{2\pi k}{3}) = 0,$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OG_\alpha} &= \frac{a}{3}\left(\sum_{k=0}^{2}\cos^2\left(-\frac{2}{3}\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right)\overrightarrow{i} + \frac{a}{2}\left(\sum_{k=0}^{2}\cos\left(-\frac{2}{3}\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\sin\left(-\frac{2}{3}\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right)\overrightarrow{j} \\
&= \frac{a}{3}\left(\sum_{k=0}^{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(-\frac{4}{3}\alpha - \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi k}{3}\right)\right)\overrightarrow{i} + \frac{a}{4}\left(\sum_{k=0}^{2}\sin\left(-\frac{4}{3}\alpha - \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi k}{3}\right)\right)\overrightarrow{j} = \frac{a}{2}\overrightarrow{i}
\end{aligned}$$

(pour les sommes, utiliser la formule classique avec $\exp(\dfrac{4\pi i k}{3})$. Ainsi, l'isobarycentre des $(M_k)_{k\in[\![0,2]\!]}$ est constant et son lieu est lui-même !

3. L'aire A du triangle $M_0M_1M_2$ est donnée par

$$2A = \left|\det_{(\widehat{i,j})}(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2})\right| = a^2\begin{vmatrix}(1+\cos\theta_1)\cos\theta_1 - (1+\cos\theta_0)\cos\theta_0 & (1+\cos\theta_2)\cos\theta_2 - (1+\cos\theta_0)\cos\theta_0 \\ (1+\cos\theta_1)\sin\theta_1 - (1+\cos\theta_0)\sin\theta_0 & (1+\cos\theta_2)\sin\theta_2 - (1+\cos\theta_0)\sin\theta_0\end{vmatrix}$$

En utilisant la bilinéarité du déterminant et le fait que $\theta_k = \theta_0 + \dfrac{2\pi k}{3}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{2}{a^2}A &= (1+\cos\theta_1)(1+\cos\theta_2)\begin{vmatrix}\cos\theta_1 & \cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 & \sin\theta_2\end{vmatrix} - (1+\cos\theta_1)(1+\cos\theta_0)\begin{vmatrix}\cos\theta_1 & \cos\theta_0 \\ \sin\theta_1 & \sin\theta_0\end{vmatrix} \\
&\quad -(1+\cos\theta_0)(1+\cos\theta_2)\begin{vmatrix}\cos\theta_0 & \cos\theta_2 \\ \sin\theta_0 & \sin\theta_2\end{vmatrix} \\
&= (1+\cos\theta_1)(1+\cos\theta_2)\sin(\theta_2-\theta_1) - (1+\cos\theta_1)(1+\cos\theta_0)\sin(\theta_0-\theta_1) - (1+\cos\theta_0)(1+\cos\theta_2)\sin(\theta_2-\theta_0) \\
&= (1+\cos\theta_1)(1+\cos\theta_2)\sin(\frac{2\pi}{3}) + (1+\cos\theta_1)(1+\cos\theta_0)\sin(\frac{2\pi}{3}) - (1+\cos\theta_0)(1+\cos\theta_2)\sin(\frac{4\pi}{3}) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}[(1+\cos\theta_1)(1+\cos\theta_2) + (1+\cos\theta_1)(1+\cos\theta_0) + (1+\cos\theta_0)(1+\cos\theta_2)] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}(3 + 2\sum_{k=0}^{2}\cos(\theta_k) + \cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_0 + \cos\theta_2\cos\theta_0) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}(3 + \cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_0 + \cos\theta_2\cos\theta_0)
\end{aligned}$$

Le développement des $\cos(\theta_0 + \frac{2\pi k}{3})$ est donné par

$$\cos\theta_1 = -\frac{1}{2}\cos\theta_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta_0 \text{ et } \cos\theta_2 = -\frac{1}{2}\cos\theta_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta_0,$$

ce qui nous donne

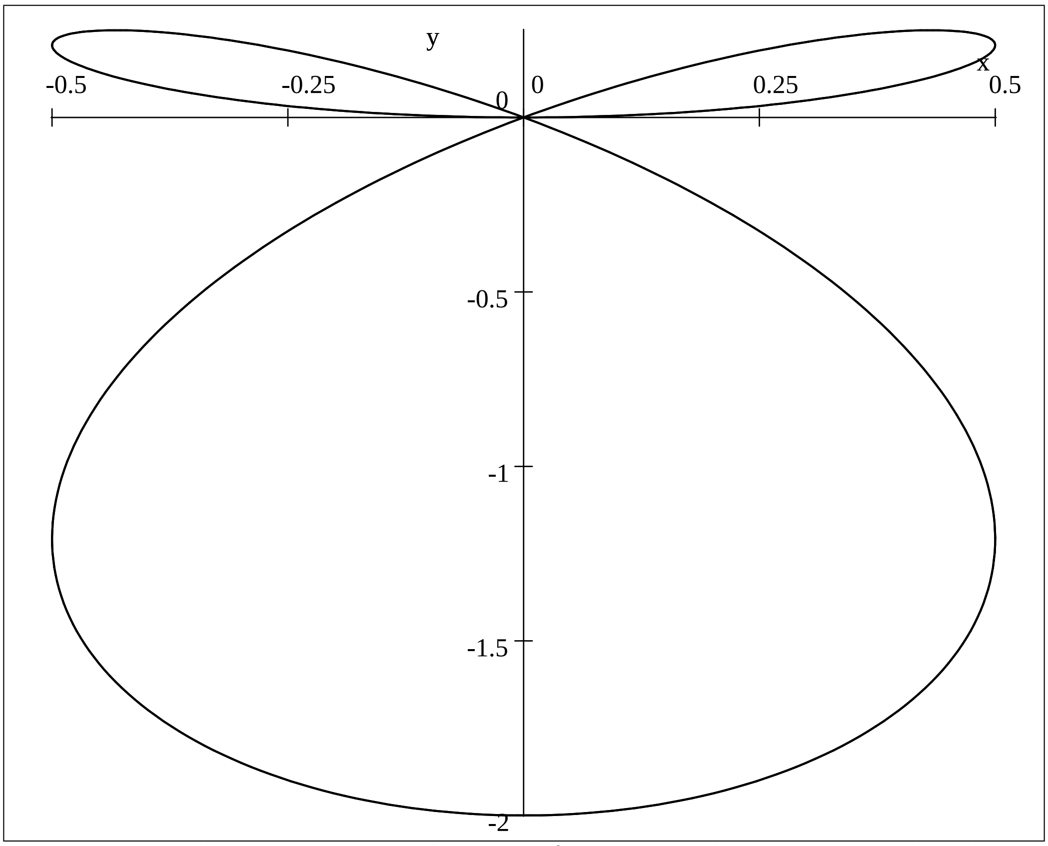
$$\begin{aligned}\frac{2}{a^2}A &= \frac{\sqrt{3}}{2}(3+\frac{1}{4}\cos^2\theta_0 - \frac{3}{4}\sin^2\theta_0 - \frac{1}{2}\cos^2\theta_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta_0\cos\theta_0 - \frac{1}{2}\cos^2\theta_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta_0\cos\theta_0) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(3-\frac{3}{4}\cos^2\theta_0 - \frac{3}{4}\sin^2\theta_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}(3-\frac{3}{4}) = \frac{9\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

donc l'aire de $M_0M_1M_2$ est bien constante et égale à $\frac{9\sqrt{3}a^2}{16}$

Correction de l'exercice 1.3.2 : L'expression $(x^2+y^2)^2 - 2ay(x^2-y^2)$ s'écrit en polaire

$$r^4 - 2ar\sin\theta(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta) = r^3(r - 2a\sin\theta\cos 2\theta).$$

Le point $(0,0)$ appartient à Γ et, en un point de Γ différent de $(0,0)$, l'équation en coordonnées polaire de Γ est $r = 2a\sin\theta\cos 2\theta$. On constate que si $\theta = 0$ alors $r = 0$, ce qui signifie que la paramétrisation $r = 2a\sin\theta\cos 2\theta$ contient le point $(0,0)$. On en déduit que l'équation polaire de Γ est $r(\theta) = 2a\sin\theta\cos 2\theta$ et sa représentation graphique est



Oh, on vient de retrouver la tête du lapin bien-aimé de votre enfance, les mathématiques sont donc bien un jeu d'enfant :-)

Notons $\mathcal{A}$ le compact de $\mathbb{R}^2$ délimité par Γ (donc $\partial\mathcal{A} = \Gamma$). La formule de Green-Riemann nous donne

$$Aire(\mathcal{A}) = \iint_{\mathcal{A}} dxdy = \frac{1}{2}\int_{\Gamma}(xdy - ydx)$$

Pour cela nous allons donner une représentation paramétrique de Γ qui doit fournir la totalité de Γ (donc surjective) mais qui ne va pas recouvrir plusieurs fois Γ (donc injective). Par exemple, si vous appliquez cette formule avec la représentation paramétrique

$$x = \cos\theta \text{ et } y = \sin\theta, \quad \theta \in [0, 10\pi],$$

du cercle unité, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_{0}^{10\pi}(\cos^2\theta x + \sin^2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{10\pi} d\theta = 5\pi$$

qui n'est clairement pas l'aire du disque unité ! Cela résulte que notre paramétrisation n'est pas injective (modulo un ensemble négligeable au sens de l'intégration) et qu'elle recouvre plusieurs fois le cercle.
Nous disposons à l'heure actuelle de l'équation polaire de Γ mais nous n'avons pas exploité le fait que $r(\theta)$ doit être positif (c'est une distance tout de même). De façon évidente, l'application $\theta \mapsto 2a\sin\theta\cos 2\theta$ est 2π-périodique donc l'intervalle à considérer pour l'injectivité est inclu dans $[0, 2\pi[$. Pour étudier son signe sur $[0, 2\pi]$, nous allons utiliser les symétries.
Remarquons pour commencer que l'application $\theta \mapsto 2a\sin\theta\cos 2\theta$ est impaire, ce qui nous permet de nous restreindre l'étude sur l'intervalle $[0, \pi]$. Nous disposons également de l'invariance par la transformation $\theta \leftarrow \pi - \theta$ ce qui nous permet d'effectuer l'étude sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Supposons maintenant que $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Comme $\sin\theta$ est positif lorsque $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, nous devons exiger que $\cos 2\theta$ soit positif lorsque $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Puisque $2\theta \in [0, \pi]$, cela se traduit par $2\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ c'est-à-dire $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Par la symétrie, $\theta \leftarrow \pi - \theta$ nous en déduisons que $\theta \mapsto 2a\sin\theta\cos 2\theta$ est positif si et seulement si $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$. L'imparité montre que $\theta \mapsto 2a\sin\theta\cos 2\theta$ est positif lorsque

$$\theta \in [-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}] \cup [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi] = \mathcal{D}_r.$$

On en déduit que l'application $\theta \mapsto (\theta, r(\theta))$ de $\mathcal{D}_r$ dans Γ (identifiée à sa représentation polaire) est injective et, d'après le calcul donnant l'équation polaire de Γ, elle est surjective donc elle réalise une bijection de $\mathcal{D}_r$ sur Γ (identifiée à sa représentation polaire). L'application $(\theta, r) \mapsto (x = r\cos\theta, r\sin\theta)$, qui transforme les coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes, est bijective donc l'application

$$\theta \mapsto \begin{cases} x = & r(\theta)\cos\theta = 2a\sin\theta\cos 2\theta\cos\theta = a\sin 2\theta\cos 2\theta = \frac{a}{2}\sin 4\theta \\ y = & r(\theta)\sin\theta = 2a\sin\theta\cos 2\theta\sin\theta = 2a\cos 2\theta\sin^2\theta = a\cos 2\theta(1-\cos 2\theta) = a\cos 2\theta - \frac{a}{2}\cos 4\theta - \frac{a}{2} \end{cases}$$

est une bijection de $\mathcal{D}_r$ sur Γ (identifiée à sa représentation cartésienne).
Nous sommes maintenant en droit d'exploiter la formule de Green-Riemann et utilisant les formules trigonométriques usuelles, on a

$$\begin{aligned} Aire(\mathcal{A}) &= \frac{1}{2}\int_{\Gamma}(xdy - ydx) = \frac{a^2}{2}\int_{\mathcal{D}_r}\left(\frac{1}{2}\sin 4\theta\,[-2\sin 2\theta + 2\sin 4\theta] - \left[\cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\right]2\cos 4\theta\right)d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\int_{\mathcal{D}_r}\left(-\sin 4\theta\sin 2\theta + \sin^2 4\theta - 2\cos 2\theta\cos 4\theta + \cos^2 4\theta + \cos 4\theta\right)d\theta = \frac{a^2}{2}\int_{\mathcal{D}_r}\left(1 - \frac{3}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos 6\theta + \cos 4\theta\right)d\theta \end{aligned}$$

Je laisse alors le lecteur le soin de calculer cette dernière intégrale élémentaire et d'en déduire que

$$Aire(\mathcal{A}) = \frac{a^2\pi}{2}$$

Correction de l'exercice 1.3.3 :

1. Un petit dessin montre que M' est défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MP_M}$ où P_M est le projeté orthogonal de M sur P (donc il appartient à P). Le vecteur $\overrightarrow{MP_M}$ est orthogonal au plan P, qui est le plan passant par $A(1,1,0)$ et de direction vectorielle

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } 2x - y + 3z = 0\} = \text{Vect}(\underbrace{(1,2,0)}_{=\overrightarrow{u_1}}, \underbrace{(0,3,1)}_{=\overrightarrow{u_2}}).$$

On orthogonalise, par le procédé de Schmidt, cette base de H. On cherche un vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_2} - \alpha\overrightarrow{u_1}$ orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$, c'est-à-dire

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1) - a(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_1) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{6}{5} \Rightarrow \overrightarrow{u} = \frac{1}{5}(-6,3,5)$$

Ainsi, $H = \text{Vect}((1,2,0),(-6,3,5)) = \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3})$ et $P_M(x", y", z")$ est défini par

$$\begin{cases} P_M \in P \\ (\overrightarrow{MP_M}, \overrightarrow{u_1}) = 0 \\ (\overrightarrow{MP_M}, \overrightarrow{u_3}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x" - y" + 3z" & = 1 \\ (x" - x) + 2(y" - y) & = 0 \\ -6(x" - x) + 3(y" - y) + 5(z" - z) & = 0 \end{cases}$$

Si l'on pose

$$a = x" - x, b = y" - y, c = z" - z \text{ et } \alpha = 1 - 2x + y - 3z$$

alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a-b+3c &=& \alpha \\ a+2b &=& 0 \\ -6a+3b+5c &=& 0 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3+3L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} 2a-b+3c &=& \alpha \\ a+2b &=& 0 \\ 14c &=& 3\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c &=& \dfrac{3\alpha}{14} \\ 2a-b &=& \dfrac{5\alpha}{14} \\ a+2b &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3+2L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} c &=& \dfrac{3\alpha}{14} \\ 2a-b &=& \dfrac{5\alpha}{14} \\ 5a &=& \dfrac{10\alpha}{14} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c &=& \dfrac{3\alpha}{14} \\ a &=& \dfrac{2\alpha}{14} \\ b &=& -\dfrac{\alpha}{14} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x"-x &=& \dfrac{2-4x+2y-6z}{14} \\ y"-y &=& \dfrac{-1+2x-y+3z}{14} \\ z"-z &=& \dfrac{3-6x+3y-9z}{14} \end{array}\right.$$

A l'aide de l'égalité $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MP_M}$, on en déduit que les coordonnées de M'

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &= 2(x"-x)+x =& \dfrac{4+6x+4y-12z}{14} \\ y' &= 2(y"-y)+y =& \dfrac{-2+4x+12y+6z}{14} \\ z' &= 2(z"-z)+z =& \dfrac{6-12x+6y-4z}{14} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 6 & 4 & -12 \\ 4 & 12 & 6 \\ -12 & 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. On a $A = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 6 & 4 & -12 \\ 4 & 12 & 6 \\ -12 & 6 & -4 \end{pmatrix}$. Il s'agit clairement de la matrice de la symétrie orthogonale vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (vectoriel) par rapport au plan vectoriel H. On en déduit que $A^2 = I_3$ (on peut le vérifier par calcul) et ${}^tA = A$. Elle laisse stable le plan H (dont une base orthogonale est $(1,2,0),(-6,3,5)$) et envoie le vecteur $(2,-1,3)$ (qui engendre l'orthogonal de H dans $\mathbb{R}^3$ vectoriel) sur son opposé donc $\det A = -1$ (on peut le vérifier par calcul). La famille

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0), \frac{1}{\sqrt{70}}(-6,3,5), \frac{1}{\sqrt{14}}(2,-1,3)$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Si l'on pose $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{70}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$ qui est une matrice orthogonale, on a l'égalité (que l'on peut vérifier par le calcul)

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 1.3.4 : .

1. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On se rappelle que $S = \dfrac{1}{2}c \times h$ où h est la longueur de la hauteur issu de C. On note H le pied de la hauteur et $\sigma = BH$. On applique le théorème de Pythagore dans les deux triangles rectangles AHC et CHA, ce qui nous donne

$$\left\{\begin{array}{c} a^2 = \sigma^2 + h^2 \\ b^2 = (c-\sigma)^2 + h^2 \end{array}\right. \Rightarrow a^2 - b^2 = \sigma^2 - (c-\sigma)^2 \Leftrightarrow 2c\sigma = a^2 - b^2 + c^2 \text{ et } h^2 = a^2 - \sigma^2 = (a-\sigma)(a+\sigma)$$

On en déduit, en se rappelant que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, que

$$\begin{array}{rcl} S^2 &=& \dfrac{1}{4}c^2h^2 = \dfrac{1}{4}c^2(a-\sigma)(a+\sigma) = \dfrac{1}{16}(2ac-2c\sigma)(2ac+2c\sigma) \\ &=& \dfrac{1}{16}(2ac-a^2+b^2-c^2)(2ac+a^2-b^2+c^2) = \dfrac{1}{16}(b^2-(a-c)^2)((a+c)^2-b^2) \\ &=& \dfrac{1}{16}(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b) = p(p-a)(p-b)(p-c) \end{array}$$

2. On suppose évidemment $p > 0$. Si l'on fixe le périmètre $2p$ alors $a + b + c = 2p$. Ainsi, la connaissance de deux des longueurs fournit la troisième. On peut toujours supposer que les deux premières longueurs sont a et b. Ces deux longueurs sont positives et moindre que $2p$ et l'aire du triangle est

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-(2p-a-b)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(a+b-p)}$$

Maximiser l'aire du triangle revient à déterminer le maximum de la fonction

$$f : (a, b, c) \mapsto (p-a)(p-b)(a+b-p)$$

sur l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{(a, b) \in [0, 2p]^2 \text{ tel que } 0 \leqslant a + b \leqslant 2p.$$

La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{H}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ c'est-à-dire un compact de $\mathbb{R}^2$. La fonction f atteint ses bornes sur $\mathcal{H}$ donc elle y admet un maximum. Soit (a_0, b_0) un point où se réalise le maximum.
Si $a_0 = 0$ alors

$$f(a_0, b_0) = p(p-b_0)(b_0-p) = -p(p-b_0)^2 \leqslant 0$$

et (a_0, b_0) ne peut être un point où se réalise le maximum car $f(\frac{2p}{2}, \frac{2p}{3}) = \frac{p^3}{27} > 0$. Par un raisonnement analogue, on en déduit que $b_0 \neq 0$ et $c_0 \neq 0$. D'autre part, si l'une des deux coordonnées est égale à $2p$ alors l'autre est nécessairement nulle ($a_0 + b_0 \leqslant 2p$), ce qui est impossible.
Par conséquent, $(a_0, b_0) \in]0, 2p[^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenu dans $\mathcal{H}$ donc on peut utiliser la condition nécessaire d'extréma sur un ouvert

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a}(a_0, b_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial b}(a_0, b_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b_0 - p)(2a_0 + b_0 - 2p) = 0 \\ (a_0 - p)(a_0 + 2b_0 - 2p) = 0 \end{cases}$$

Si $b_0 = p$ ou $a_0 = p$ alors $f(a_0, b_0) = 0$ et (a_0, b_0) ne peut être un maximum ($f(\frac{2p}{2}, \frac{2p}{3}) > 0$). Par conséquent, on obtient

$$\begin{cases} 2a_0 + b_0 - 2p = 0 \\ a_0 + 2b_0 - 2p = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2a_0 + b_0 - 2p = 0 \\ 3b_0 - 2p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_0 = \dfrac{2p}{3} \\ a_0 = \dfrac{2p}{3} \end{cases}$$

La fonction f admet un maximum en un unique point $(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3})$. On en déduit que l'aire du triangle est maximale si et seulement $a_0 = b_0 = c_0 = \frac{2p}{3}$, c'est-à-dire si et seulement le triangle est équilatéral.