Exercices oraux 2003 (PSI*,MP,MP*) sur son lit d'indications

Abdellah Bechata

www.mathematiques.fr.st

Table des matières

Résumé

Dans la première section, vous trouverez ci-dessous les 45 exercices que j'ai préparé pour des élèves de PSI*,MP et MP* lors des révisions d'oraux. Il s'agit d'exercices des ENS, de l'X, des Mines-Ponts, de Centrale et des ENSI.

Dans la seconde section, vous trouverez des indications pour chaque exercice.

J'ai décidé (avec les conseils d'un collègue que je remercie) de ne pas mettre les corrections. En effet, avec des solutions, on a trop tendance à se décourager (trop) rapidement et à regarder (presque) immédiatement la solution. Il me parait préférable de consulter des indications qui, je l'espère, sont suffisantes pour la résolution des exercices. Comme dit le viel adage, c'est en forgeant que l'on devient forgeron, c'est en réfléchissant que l'on devient mathématicien

1 Exercices PSI*

1.1 Algèbre-géométrie

Exercice 1.1.1 Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{A^{2n}}{(2n)!}$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
(On s'intéressera à la réduction de A)

Exercice 1.1.2 Soit z_0 un complexe, et (z_n) une suite telle que $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

1. Donner une construction géométrique de z_{n+1} à partir de z_n.
2. Etudier la convergence de la suite (z_n).
   Indication : on écrira $z_n = \rho_n e^{i\phi_n}$,où $(\rho_n,\phi_n) \in \mathbb{R}_+^\times \times]-\pi,\pi[$ et on utilisera :
$$\sin\phi = 2^n \sin\frac{\phi}{2^n}\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\phi}{2^i}.$$
3. Trouver une courbe simple passant par tous les points de la suite, et construire cette courbe.

Exercice 1.1.3 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
3. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice A

Exercice 1.1.4 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ $(a \neq 0)$.

1. Trouver trois vecteurs V_1, V_2, V_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que
$$AV_1 = -V_1,\ AV_2 = V_1 - V_2,\ AV_3 = V_2 - V_3$$
   En déduire que A est semblable à une matrice simple que l'on explicitera
2. Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $\exp xA = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n A^n}{n!}$.

Exercice 1.1.5 Soit A_n la matrice $(\min(i,j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Montrer que toutes les valeurs propres de A_n sont réelles et que A_n est diagonalisable
2. On définit $B_n = (b_{i,j})$ par
$$\begin{array}{rcl} \forall i & \in & \{1,..,n-1\} \quad b_{i,i} = 2 \text{ et } b_{n,n} = 1 \\ \forall i & \in & \{1,n-1\} \quad b_{i,i+1} = -1, \quad \forall i \in \{2,n\} \quad b_{i,i-1} = -1 \end{array}$$
   tous les autres coefficients étant nuls.
   Evaluer le produit A_nB_n. Conclusion
3. Quelle est la valeur de $\det A_n$?
4. Quelles sont les valeurs propres de B_n ? En déduire les valeurs propres de A_n.

5. La matrice A_n est-elle définie positive ?

Exercice 1.1.6 Soit $P(x) = \det \begin{pmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_3 & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{pmatrix}$.

1. Calculer $P(a_1)$,..,$P(a_n)$.
2. Etudier $\dfrac{P(X)}{(X-a_1)..(X-a_n)}$ et en déduire $P(x)$

1.2 Analyse

Exercice 1.2.1 Soit $\alpha > 0$; on pose $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^{\alpha}$.

1. Trouver un équivalent de a_n
   Indication : On pourra découper la somme selon les pairs et les impairs
2. Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$.

Exercice 1.2.2 On pose $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer f'
2. Exprimer f' à l'aide de fonctions usuelles.
3. En déduire f

Exercice 1.2.3 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(\frac{x}{3}) - f(x) = g(x) \text{ et } f(0) = 0.$$

Que dire si g est C^1 à dérivée bornée ?

Exercice 1.2.4 Soit l'équation différentielle $x^2 y" - 6xy' + (12 + x^2) y = 0$.
En trouver les solutions développables en série entière, puis toutes les solutions.

Exercice 1.2.5 On pose $I = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \sin ax \; dx$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer I comme somme d'une série.
2. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique f telle que $f(x) = e^{ax}$ sur $[0,2\pi[$.
3. En déduire I.

2 Exercices MP

2.1 Algèbre-géométrie

Exercice 2.1.1 Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n. Soit A une matrice de $\mathcal{M}$ vérifiant : $A^2 - 5A + 6I_n = 0$.

1. On pose $G(M) = AM$ pour toute M de $\mathcal{M}$.
   (a) Montrer que G est diagonalisable.
   (b) Etudier les éléments propres de G
2. On pose $D(M) = MA$ pour toute M de $\mathcal{M}$.
   Etudier les éléments propres de D
3. On pose $F(M) = AM + MA$ pour toute M de $\mathcal{M}$.
   Etudier les éléments propres de F.

Exercice 2.1.2 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A et B commutent.
2. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$ à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$
3. Montrer que l'espace vectoriel engendré par A et B est un corps. Quel est l'inverse de $aA + bB$?

Exercice 2.1.3

1. Exemple de matrice A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{Q})$ telle que $A^3 = 2I$?
   (On supposera qu'il existe un vecteur x tel que (x,Ax,A^2x) est une base de $\mathbb{Q}^3$
2. Soit A une telle matrice. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$. On note E l'ensemble des $aI + bA + cA^2$ où a,b,c parcourent $\mathbb{K}$.
   Selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$, E est-il un corps ?

Exercice 2.1.4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le commutant de A et l'ensemble :
$$\{B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) : \quad \exists X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad B = AX - XA\}$$
2. Généralisation : si $\mathcal{C}(A)$ est le commutant de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :
$$\exists X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad B = AX - XA \Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{C}(A), \quad \operatorname{tr} BM = 0$$
   Indication : poser $\Phi_A(M) = AM - MA$ et penser au produit scalaire : $(A,B) \mapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$

Exercice 2.1.5 On pose, pour $z \in \mathbb{C}$, $\quad M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $M(z)$ est diagonalisable sauf pour deux valeurs que l'on déterminera.
2. On suppose que $\lambda = e^{it}$ est une valeur propre de $M(z)$. Calculer z en fonction de t et tracer la courbe $t \mapsto z(t)$.
3. Montrer que la suite (M^n) tend vers 0 pour $|z|$ assez petit.

Exercice 2.1.6 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Prouver que $\det A > 0$.

Exercice 2.1.7 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il existe P orthogonale telle que PAP^{-1} et PBP^{-1} soient diagonales.

Exercice 2.1.8 Soit (Γ) la parabole d'équation $y^2 = 2px$ $(p > 0)$.

1. Si $M(x{,}0)$, avec $x \geqslant 0$, montrer qu'il existe un unique point $M'(x'{,}0)$ avec $x' > x$ tel que le carré dont une diagonale est MM' ait ses deux sommets sur (Γ). Expliciter $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $f(x) = x'$.
2. Soit alors $x_0 \geqslant 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   Montrer que $x_n \to +\infty$ et donner un développement asymptotique à deux termes de (x_n).

Exercice 2.1.9 Quelles sont les matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

2.2 Analyse

Exercice 2.2.1 Soit $\varphi \in C^0(([0{,}1],\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^\times$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \frac{x}{n}\varphi(\frac{k}{n})).$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement et expliciter sa limite simple.
2. Y-a-t-il convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2.2.2 Montrer que : $\int\limits_0^1 x^{-x}\,dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

Exercice 2.2.3 Convergence de la série de terme général (u_n) définie par $u_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{1}{(n+p)^\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

Exercice 2.2.4 On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.
Défintion de f ; mode de convergence de la série définition f ; limite en $+\infty$ de f ; équivalent de f de 0.

Exercice 2.2.5

1. Montrer que $\int\limits_0^1 \dfrac{x^t}{1+x^2}dx = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k+1+t}$ pour $t \geqslant 0$.
   En déduire $\lim\limits_{t\to 0} \int\limits_0^1 \dfrac{x^t}{1+x^2}dx$. Soit l sa limite.
2. Equivalent de $\int\limits_0^1 \dfrac{x^t}{1+x^2}dx - l$ quand t tend vers 0.

Exercice 2.2.6 Equivalent, lorsque $n \to +\infty$, de $(2^2 3^3 .. n^n)^{4/n^2}$

Exercice 2.2.7 Soit $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to 0\}$.
Pour $u \in E$, on pose $\|u\|_\infty \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$, et $f(u) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^n}$.

1. Vérifier que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E. On munit E de $\|.\|_\infty$.

2. Montrer que f est une forme linéaire continue sur E, et que $|||f||| = 1$.
3. Existe-t-il $u \in E$ tel que $\|u\|_\infty \leqslant 1$ et $|f(u)| = 1$?
   En déduire que $\overline{B} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \quad \|u\|_\infty \leqslant 1\}$ n'est pas compacte.

Exercice 2.2.8 Trouver toutes les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - 2x \int_0^x f(t)\cos(x-t)dt = 1$$

(On commencera par montrer que f est C^1)

Exercice 2.2.9 Trouver un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{i\geqslant 1, j\geqslant 1, i+j=n} \frac{1}{ij}$.

Exercice 2.2.10 Soit $r > 0$ et E_r l'ensemble des applications de $]-r,r[$ dans $\mathbb{R}$ développable en série entière. Pour f dans E, on pose $\phi(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{x+t}\,dt$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E_r.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ; ϕ est-il un automorphisme de E_r ?
3. Pour P polynôme on pose $\|P\| = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$; ϕ induit-elle une application continue sur $\mathbb{R}[t]$? Son inverse est-elle continue ?

Exercice 2.2.11 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$

3 Exercices MP*

3.1 Algèbre-géométrie

Exercice 3.1.1 Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et :

$$\begin{aligned}\Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) &\to \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto AX + XB.\end{aligned}$$

Trouver les valeurs propres de Φ en fonction de celles de A et B.
(On pourra commencer par traiter les cas $A = 0$ puis le cas $B = 0$ et enfin traiter le cas général)

Exercice 3.1.2 Soit E une partie de $\mathbb{R}^2$. Pour $a_1,..,a_n \in E$, on pose

$$\delta_n(a_1,..,a_n) = \left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} d(a_i,a_j)\right)^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

puis

$$d_n(E) = \sup_{(a_1,..,a_n)\in E} \delta_n(a_1,..,a_n).$$

Que dire que de $d_n(E)$ suivant que E est borné ou non borné ? Si $E \subset F$, comparer $d_n(E)$ et $d_n(F)$. Etudier la suite $(d_n(E))_{n\in\mathbb{N}}$ et en particulier sa monotonie. Calculer $d_3(E)$ lorsque E est un segment.

Exercice 3.1.3 Pour quelles valeurs de n existe-t-il un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$?

Exercice 3.1.4 Soient u,v deux vecteurs indépendants de l'espace euclidien E de dimension 3.

1. Montrer qu'il existe n unitaire tel que (n,u,v) soit libre et

$$< n,u >< n,v >=< u,v > .$$

2. Montrer qu'il existe un projecteur orthogonal P tel que :

$$P(u) \neq 0, \quad P(v) \neq 0 \quad < P(u),P(v) >= 0$$

Exercice 3.1.5 Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\beta = (i,j,k)$ une base de E. On se donne $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $v \in E$, on note $W(v) = Vect\{f^k(v), \quad k \in \mathbb{N}\}$.

Trouver les vecteurs $v \in E$ tels que $W(v) \neq E$ lorsque la matrice A de f dans la base β est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Même question avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

3.2 Analyse

Exercice 3.2.1 Déterminer toutes les applications f C^1 et 2π-périodiques telles que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$2f(x + 1) = f(x) + f(2x).$$

Exercice 3.2.2 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} : x \mapsto 2x(1 - x)$. Soit K un compact de $]0,1[$.
On pose $f_n = f \circ f \circ .. \circ f$ (n fois). Etudier la convergence de la suite (f_n) sur K.
On admet le théorème de Stone-Weierstrass : toute application continue d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme, sur $[a,b]$, d'une suite de fonctions polynômes.
Montrer que toute application continue définie sur $[a,b] \subset]0,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme, sur $[a,b]$, d'une suite de fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3.2.3 Soit $n \in \mathbb{N}^{\times}$, fixé. On pose $\Delta = \inf\limits_{(x_1,..,x_n)\in\mathbb{R}^n} \int\limits_0^1 (1 + x_1 t + ..x_n t^n)^2 dt$.

1. Etablir l'existence et l'unicité de $(a_1,..,a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$\Delta = \int\limits_0^1 (1 + a_1 t + ..a_n t^n)^2 dt$$
On pose alors $F(X) = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{a_1}{X+2} + .. + \dfrac{a_n}{X+n+1}$.
2. Calculer $F(k)$ pour $k = 1,..,n$.
3. Calculer $F(0)$.
4. En déduire Δ et $(a_1,..,a_n)$.

Exercice 3.2.4 Soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ et $M_Q = \begin{pmatrix} c+a & b \\ b & c-a \end{pmatrix}$ la matrice de Q dans la base canonique.

1. Conditions sur a,b,c pour que Q soit positive (resp. définie positive). Que peut-on dire de l'ensemble : $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ Q \text{ positive}\}$?
2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset K$. Soit $C = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ Q$ positive et $K \subset E_Q\}$ où $E_Q = \{x \in \mathbb{R}^2 ;\ Q(x) \leqslant 1\}$.
Montrer que C est compact.
3. Montrer qu'il existe un disque elliptique centré en 0 et un seul d'aire minimale et contenant K.

Exercice 3.2.5 Soit
$$\begin{aligned} H_1 &= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^{\times}} / \sum_{n\geqslant 1} n^2 a_n^2 < +\infty\} \\ H_0 &= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^{\times}} / \sum_{n\geqslant 1} a_n^2 < +\infty\} \\ H_{-1} &= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^{\times}} / \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n^2}{n^2} < +\infty\}. \end{aligned}$$

1. Définir des produits scalaires sur les H_i et montrer qu'ils sont complets pour les normes associées.
2. Pour $b = (b_n) \in H_{-1}$, montrer que $\Lambda_b : H_1 \to \mathbb{R}$, $a \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ est une forme linéaire sur H_1, quelle est sa norme ? Réciproque ?
3. Montrer que la boule unité de H_1 est une partie compacte de H_0.

Exercice 3.2.6

1. Calculer $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times ...$
2. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} \tan \dfrac{\theta}{2^n}$, pour $\theta \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.

Exercice 3.2.7 Soit $n \in \mathbb{N}^{\times}$ et $\alpha \in]0,1[$. On munit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme subordonnée à la norme hermitienne canonique de $\mathbb{C}^n$. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ contenu dans la boule $B'(I_n,\alpha)$.

1. Que peut-on dire des valeurs propres d'un élément A de G ?
2. Que peut-on dire de G ?
3. Le résultat subsiste-t-il en prenant un intervalle plus grand pour α ?

Exercice 3.2.8 Soit $r \in]0,1[$. On définit une suite (u_n) de réels par :

$$0 < u_0 \leqslant u_1 \text{ et } u_{n+2} = u_{n+1} + r^n u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que (u_n) converge dans $\mathbb{R}$. Soit $l(r)$ la limite.
2. Equivalent de $u_n - l(r)$?

Exercice 3.2.9 Résoudre $\begin{cases} xy' + |y| = 2(x^2-4) \\ y(1) = 1. \end{cases}$

1 Indications exercices PSI*

1.1 Algèbre-géométrie

Indications pour l'exercice 1.1.1 Diagonaliser A, $A^n = PD^nP^{-1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!} = P\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D^n}{(2n)!}\right)P^{-1}$

Indications pour l'exercice 1.1.2 $e^{i\phi}+1 = e^{i\frac{\phi}{2}}(e^{i\frac{\phi}{2}} + e^{-i\frac{\phi}{2}})$ d'où une relation de récurrence sur $(\rho_n)_n$ et une sur $(\phi_n)_n$

Indications pour l'exercice 1.1.3

1. Calculer ses valeurs propres puis A diagonalisable ssi la multiplicité de toutes les valeurs propres = ...
   On peut égaler raisonner par l'absurde si A est diagonalisable alors A est semblable à ..... donc $A = ...$
2. $A = Mat(u,\mathcal{B})$ alors A est semblable à B ssi il existe une base $\mathcal{C} = (f_1,f_2,f_3)$ telle que $B = Mat(u,\mathcal{C})$. Dans ce cas écrire $u(f_i)$ en fonction de f_1,f_2,f_3, écrire les équations correspondantes et les résoudre (en passant par les coordonnées) en se rappelant que $BX = u(x)$
3. $AM = MA$ et $A = PA'P^{-1}$. Montrer que $M' = P^{-1}MP$ vérifie $A'M' = M'A$ et résoudre l'équation

Indications pour l'exercice 1.1.4

1. Si u est l'endomorphisme associé à A dans la base canonique alors $u(V_i) = AV_i = ..$. La matrice B de u dans la base $(V_i)_i$ est ...... donc $A = PBP^{-1}$ où P est la matrice ....
2. $A = PA'P^{-1}$, $A^n = P(A')^nP^{-1}$, $A = -I_3 + N$ avec N nilpotente et on invoque une connaissance de Newton
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^nA^n}{n!} = P\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}(A')^n\right)P^{-1}$

Indications pour l'exercice 1.1.5

1. ${}^tA_n = ..$? donc le cours affirme que ...
2. $(AB)_{i,j} = \sum_k a_{i,k}b_{k,j}$, dans cette somme seul 3 termes peuvent intervenir $k = j-1,j,j+1$. Considérer ensuite les cas $i < j,i = j$ et $i > j$
3. On calcule par récurrence le déterminant de A_n en développement la première colonne
4. un exo en plus à celui qui m'envoie une indication pour la première partie?
5. idem?

Indications pour l'exercice 1.1.6

1. On factorise a_i dans la $i^{ième}$ ligne, on effectue $L_k \leftarrow L_k - L_i$ et on développe selon la $i^{ième}$ colonne
2. Le polynôme P est de degré ...de coefficient dominant ..... La fraction rationnelle $\frac{P(X)}{(X-a_1)..(X-a_n)}$ est de degré ..., elle se décompose en

$$\frac{P(X)}{(X-a_1)..(X-a_n)} = E + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{X-a_j}$$

   (sous la condition que les $(a_i)_i$ soient deux à deux distincts) et on applique les méthodes usuelles de sup.
   On en déduit immédiatement P.
   On peut également invoquer les polynômes de Lagrange.
   Le cas où certains a_i soient égaux se traite par densité

1.2 Analyse

Indications pour l'exercice 1.2.1

1. Traiter séparément les cas n pairs et n impairs. Dans chacun de ces cas, utiliser l'indication de l'exercice puis penser aux sommes de Riemann ou aux équivalents de séries divergentes. Si nécessaire, se rappeler que $\sum\limits_{\text{impair}} = \sum\limits_{\text{nombre}} - \sum\limits_{\text{pair}}$
2. La convergence est impliquée par la convergence ....

Indications pour l'exercice 1.2.2

1. Revoir son théorème de dérivation sous le signe $\int$ dans le cas général (Lebesgue) et ne pas se tromper dans la dérivation.
   Etre C^1 sur $\mathbb{R}$ est équivalent à être C^1 sur tous les segments
2. Oh la belle intégrale de fractions rationnelles ! Vite le cours de sup (décomposition en éléments simples, etc)

Indications pour l'exercice 1.2.3 $f(\dfrac{x}{3^{k+1}}) - f(\dfrac{x}{3^k}) = ..$ puis sommation et principe des dominos (ou télescopage)

Indications pour l'exercice 1.2.4 Analyse : On obtient a_n en fonction de a_{n+2}. On fera attention à la division par 0. Deux coefficients sont alors nécessairement nuls et tous les autres sont fonction de deux coefficients (a_3 et a_4).
Synthèse : la solution est combinaison de deux séries entières dont les rayons de convergence sont non nuls.
Sur un intervalle ne contenant pas 0, l'espace des solutions est de dimension .... et nos deux solutions sont ....

Indications pour l'exercice 1.2.5

1. Si $x > 0$, $\quad e^{-x} < 1$ donc on pense au DSE de $\dfrac{1}{1-x}$ et on vérifie correctement les théorèmes du cours.
   On n'oublie pas que $\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix})$
2. On n'oublie pas que $\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix})$ et $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$ et on connait les primitives de e^{bx} pour $b \in \mathbb{C}$
3. On cherche une valeur particulière de x pour laquelle le DSF de f est le développement en série de I

2 Indications exercices MP

2.1 Algèbre-géométrie

Indications pour l'exercice 2.1.1

1.
   (a) Calculer $G^k(M)$ et en déduire un polynôme annulateur de G.
   (b) Calculer $G(E_{i,j})$
2. Méthode identique au 1
3. Calculer soigneusement $G \circ D$ et $D \circ G$.
   En déduire que tout sous-espace stable de G (par exemple, les sous-espaces propres) est stable par D. En déduire l'existence d'une base commune de réduction

Indications pour l'exercice 2.1.2

1. RAS
2. A est semblable à A' ssi il existe un endomorphisme u et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C} = (f_1,f_2,f_3)$ telle que $A = Mat(u,\mathcal{B})$ et $A' = Mat(u,\mathcal{C})$.
   Si on considère que $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ alors l'endomorphisme u est défini par $u(x) = AX$. Dans ce cas écrire $u(f_i)$ en fonction de f_1,f_2,f_3, écrire les équations correspondantes et les résoudre (en passant par les coordonnées
3. Vérifier que $Vect(A,B)$ est stable par produit, chercher l'élément neutre pour la multiplication (attention, il ne s'agit pas de I_3, il faut donc se rappeler de la définition d'un élément neutre $\widetilde{1}$ pour la multiplication dans un anneau) et enfin, déterminer pour chaque C de $Vect(A,B)$ un élément D de $Vect(A,B)$ tel que $CD = \widetilde{1}$

Indications pour l'exercice 2.1.3

1. Soit u l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{Q}^3$ est A.La matrice de u dans la base (x,Ax,A^2x) est .....
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, montrer que $X^3 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ (cf.la définition dans le cours), le polynôme caractéristique P de A est de degré .... donc $P = ..$
   Si $aI + bA + cA^2 = 0$ alors le polynôme $a + bX + cX^2$ est annulateur de A donc ...
   Si $aI + bA + cA^2$ est un élément non nul de E, on chercher $a'I + b'A + c'A^2$ tel que
   $$(aI + bA + cA^2)(a'I + b'A + c'A^2) = I$$
   On développe et on utilise l'équation satisfaite par A ainsi que l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ de I,A,A^2 ce qui amèbe à un système linéaire d'équations
   Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, chercher A sous la forme d'une homothétie et en déduire une équation de dépendance linéaire

Indications pour l'exercice 2.1.4

1. Diagonaliser A. $A = PDP^{-1}$ et si M est dans le commutant, montrer que $M' = P^{-1}MP$ commute avec D
   Ecrire la matrice de $X \mapsto AX - XA$ dans la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ puis déterminer son image
2. L'implication directe n'utilise que les propriétés usuelles de la trace.
   La réciproque: si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E, ${}^tu$ est l'endomorphisme de E défini par $(u(x),y) = (x,{}^tu(y))\ \forall x,y \in E$. Montrer que ${}^t\Phi_A = \Phi_{{}^tA}$ (merci les propriétés usuelles de la trace) donc $\Phi_A = ...$ puis se réferrer à son cours sur la formule $(\operatorname{Im}{}^t u) = ...$

Indications pour l'exercice 2.1.5

1. A quelles conditions sur z, le polynôme caractéristique possède des racines multiples?
2. Une valeur propre est racine de ....

3. Montrer que si x est une valeur propre de $M(z)$ et si $|x| > 1$ alors $|x|^3 \leqslant 2\,|z|\,|x|$

Indications pour l'exercice 2.1.6 Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer que si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à λ alors $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$ est aussi vecteur propre associé à ...

Indications pour l'exercice 2.1.7 Montrer que A et B commutent. En déduire que chaque sous-espace propre de B est stable par A puis considérer l'endomorphisme $u_{|F}$ où u est l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est B et F parcourt les sous-espaces propres de A

Indications pour l'exercice 2.1.8

1. Comment construire un carré à partir d'une diagonale ? cf. les cours de collège : =) puis un losange est un carré ssi ....
2. Monotonie de la suite, limites éventuelles. Pour l'équivalent déterminer α tel que $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ tende vers une limite non nulle puis Césaro. Pour le second terme, introduire $v_n = u_n-$l'équivalent puis expliciter une relation de récurrence sur la suite v

Indications pour l'exercice 2.1.9 Montrer que la matrice A donnée est daigonalisable à racines simples. Montrer que si M commute avec A, alors pour tout vecteur propre X de A, le vecteur MX est vecteur propre de A. Les espaces propres de A sont de dimension ....

2.2 Analyse

Indications pour l'exercice 2.2.1

1. Justifier que, pour n assez grand, l'on puisse passer au logarithme et montrer que $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ lorsque $x \in [0,1]$. Donner un encadrement de $\ln(1-x)$ analogue lorsque $x \in [-\dfrac{1}{2},0]$.
2. Le premier point est résolu par l'encadrement précédent. Pour le second, prendre $\varphi = 1$, déterminer à la main la limite puis montrer qu'une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ alors la limite est un polynôme (utiliser le critère de Cauchy et un polynôme borné sur $\mathbb{R}$ est...)

Indications pour l'exercice 2.2.2 $x^{-x} = \exp(-x\ln x)$ et utiliser le DSE de $x \mapsto \exp$. Etablir également une relation de récurrence sur les intégrales paramétrées par n

Indications pour l'exercice 2.2.3 N'est-ce pas (à un facteur près) une belle somme de Riemann ?

Indications pour l'exercice 2.2.4 Il s'agit d'une série ... donc on peut appliquer (tous) les résultats du théorème associée. Pour les limites, se réferer aux théorèmes sur les limites de série et pour la limite en 0, seul le terme $n = 0$ est génant

Indications pour l'exercice 2.2.5

1. Un petit DSE et un théorème sur les limites de séries de fonctions
2. On utilise le développement en sére du 1 pour $\int\limits_0^1 \dfrac{x^t}{1+x^2}dx$ et l est égal à ce développement lorsque $t =$. On soustrait et on applique un théorème sur les limites de séries de fonctions. Pour finir, la somme obtenue a déjà été calculer au moins une fois dans le chapitre sur les séries de Fourier

Indications pour l'exercice 2.2.6 J'aime les logarithmes, les équivalents de séries divergentes. Je n'oublie jamais que $u_n \tilde{} v_n \nRightarrow \exp(u_n) \tilde{} \exp(v_n)$. Par contre $u_n = v_n + o(1)$ alors $\exp(u_n) = \exp(v_n)\exp(0(1)) \tilde{} \exp(v_n)$ donc on revoit les méthodes usuelles pour obtenir des DAS à l'ordre 2 et plus

Indications pour l'exercice 2.2.7 1. RAS

2. RAS à part voir son cours et l'inégalité triangulaire
3. L'inégalité triangulaire est une égalité ssi tous les termes de la somme sont de même signe
   Une fonction continue sur un compact ....

Indications pour l'exercice 2.2.8 $\cos(a-b) = ..$, $x \mapsto \int_0^x h(t)dt$ est la ..... de h donc elle est .... La fonc $f = 2x\int ...$ est .... Ensuite montrer que f est solution d'une équation différentielle simple

Indications pour l'exercice 2.2.9 Se ramener à une simple somme et appliquer la comparaison série-intégrale (en étant méticuleux sur les domaines de validité des encadrements)

Indications pour l'exercice 2.2.10

1. Ecrire le DSE de f puis calculer $\int_0^x \frac{t^n}{x+t}dt$ à l'aide d'un changement de variable très simple (pour lequel les bornes d'intégrations sont constantes)
2. Deux séries entières sont égales ssi ....
3. Majorer simplement les intégrales intervenant dans le DSE. Si I_n est la $n^{ième}$ intégrale dans le DSE de $\phi(f)$, montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$

Indications pour l'exercice 2.2.11 J'ai toujours eu un faible pour le binôme de physique de Newton

3 Indications exercices MP*

3.1 Algèbre-géométrie

Indications pour l'exercice 3.1.1 On pose $G(M) = AM$ (resp. $D(M) = MA$) Calculer $G^k(M)$ (resp. $D^k(M)$) et en déduire un polynôme annulateur de G (resp. D). Calculer soigneusement $G \circ D$ et $D \circ G$. Montrer que tout sous-espace stable de G est stable par D. En déduire l'existence d'une base commune de réduction

Indications pour l'exercice 3.1.2

1. Si E est borné, la distance en deux points est borné. Dans le cas contraire construire une suite d'éléments disctints de E dont les normes tendent vers $+\infty$.
2. Si $A \subset B$, $\sup A .... \sup B$
3. Traiter pour commencer le cas $n = 3$ et utiliser que $abc = \sqrt{ab}\sqrt{ac}\sqrt{bc}$
   Traiter le cas $n = 4$ et utiliser que $abcd = \sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{abd}\sqrt[3]{acd}\sqrt[3]{bcd}$ et on fera attention que $\delta(*..*)$ porte sur tous les couples possibles et imaginables de $\{*..*\}$
   Pour le cas général utiliser une formule du type $x_1..x_n = \sqrt[?]{*}\sqrt[?]{*}..\sqrt[?]{*}$
4. Pour calculer d_3 se ramener sur la droite réelle et montrer que l'on peut se ramener à l'étude de la fonction $x \mapsto (x-a)(b-x)$ sur le segment $[a,b]$

Indications pour l'exercice 3.1.3 Si f est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ dans un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, alors $f((1,0)) = A$ et $f((0,1) = B$ sont deux matrices de $GL_n(\mathbb{R})$. Chacune est d'ordre 4 (donc on remercie le théorème spectral), elles commutent ($(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ est commutatif) et elles sont distinctes (f est injective). Il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient réduites et il faut chercher à quelle conditions ses matrices réduites sont distinctes et chacune d'ordre 4.

Indications pour l'exercice 3.1.4

1. Si $(u,v) = 0$ c'est simple. Sinon, l'application $n \mapsto q(n) = (n,u)(n,v)$ est une forme quadratique (il suffit de raisonner en terme de coordonnée) avec $q(u) = ..$ et $q(v) = ..$ et si $w \in \text{Vect}(u,v)^{\perp}$, $q(w) = ..$ donc cette forme est de rang ....et sa signature est ....
2. Un petit tour chez Monsieur Schmidt et sa méthode d'orthonormalisation pour générer un beau projecteur orthogonal

Indications pour l'exercice 3.1.5 Justifier que $W(v)$ est toujours engendré par v,Aw et A^2w (se rappeler d'un polynôme annulateur standard) donc $W(v) = E$ ssi la famille ....puis effectuer la réduction de A pour trouver les CNS (conditions nécessaires et suffisantes)

3.2 Analyse

Indications pour l'exercice 3.2.1 Développement en série de Fourier de f et utiliser l'unicité du DSF (on fera attention à l'étude $\sum_n = \sum_n + \sum_{\text{pair}}$ en distinguant les termes de même nature)

Indications pour l'exercice 3.2.2

1. Pour l'étude de la convergence simple, on remarque qu'il suffit d'étudier la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ et l'on remercie l'artillerie fournie en sup
2. Jusitifier que l'on peut supposer travailler sur un segment $[a,b]$ (qui n'est pas K) stable par f sur lequel la fonction f a une bonne monotonie. Montrer que f_n possède une monotonie et en déduire un encadrement de $f_n(x)$ par $f_n(a)$ et $f_n(b)$ et en déduire le mode de convergence
3. Montrer que tout nombre réel est la limite d'une suite de dyadiques (i.e. de nombres de la forme $A + \dfrac{B}{2^k}$ où A,B sont des entiers relatif et k un entier naturel). Soit $\dfrac{1}{2^k}X^t$ un monome : vérifier que la suite $(f_n^s(x)x^t)$ converge uniformément vers $\dfrac{1}{2^k}X^t$ pourun choix convenable de s. En déduire le résultat attendu pour tous les monômes et conclure.

Indications pour l'exercice 3.2.3

1. Si on faisait un petit tour les espaces euclidiens et les problèmes de moindres carrés
2. Expliciter $F(k)$ et l'exprimer à l'aide d'un produit scalaire puis le miracle s'accomplit
3. Idem et se rappeler que $(x,x-p(x)) = \|..\|^2$
4. La fraction rationnelle est de degré 1 donc de la forme $F(X) = \dfrac{P(X)}{.......}$ avec P de degré $\leqslant$ ....
   La question 2 nous donne la forme de P, la question 3 nous donne l'expression exacte de P.
   Décomposer explicitement la fraction $\dfrac{P(X)}{.......}$ (on appelle à l'aide le cours de sup sur la décomposition en éléments simples) et pour finir on a unicité de la décomposition en éléments simples

Indications pour l'exercice 3.2.4

1. Calculer ses valeurs propres
   On veut une condition topologique (ouvert, fermé, etc)
2. $B(0,r) \subset K \subset E_Q$ donc $Q(r,0) \leqslant 1$ et $Q(0,r) \leqslant 1$ ce qui nous fournit inégalité très importante et on utiliser le 1 (en n'oubliant pas la caractérisation des compacts en dimension finie)
3. On a une fonction ....sur un ....donc ....
   Montrer que l'aire de l'ellipse E_Q est $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\det M_Q}}$ (on montre que $M_Q = PD^2P^{-1}$ où P est orthogonale et pose le changement de variable $Y = DP^{-1}X$).
   Montrer que $Q \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\det M_Q}}$ est une fonction strictement convexe et une fonction strictement convexe sur un convexe possède au plus un minimum (faire un dessin ou mieux le prouver)

Indications pour l'exercice 3.2.5

1. Pour le produit scalaire $(a,b)_{H_s} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{2s} a_n b_n$ est une bonne idée (il faut justifier que la série converge et on se rappelle que $|xy| \leqslant$ ....). Pour la complétude, si $(a^{(k)})_k$ est une suite de H_s, on montrera que $(a_n^{(k)})_k$ est une suite de Cauchy. Si α_n est la limite, on justifiera que $\forall N \geqslant 0, \quad \sum_{n=1}^{N} n^{2s}(\alpha_n - a_n^{(k)})^2 \leqslant \varepsilon^2$ pour k assez grand et donc la suite $\alpha - a^{(k)} \in H_s$ pour k assez grand (à justifier). L'espace H_s est un espace vectoriel donc $\alpha \in H_s$ et en revenant à l'inégalité précédente, on en déduit que la suite $(a^{(k)})_k$ converge vers α
2. Appliquer Cauchy-Schwartz à $\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N} (\frac{a_n}{n})(nb_n)$ ce qui donnera la continuité et une majoration de la norme subordonnée. Ensuite, en remarquant que la suite $(\frac{b_n}{n})_n \in H_1$ on calculera $\Lambda_b((\frac{b_n}{n})_n)$
3. Si $(a^{(k)})$ est une suite de H_1 contenue dans $B_{H_0}(O,1)$, on justifiera que $\forall n \geqslant 1$, la suite $(a_n^{(k)})_k$ est bornée. On extrait de la suite
   - $(a_n^{(1)})_n$ une suite $(a_{\varphi_1(n)}^{(1)})_n$ qui converge vers α_1
   - $(a_{\varphi_1(n)}^{(2)})_n$ une suite $(a_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}^{(2)})_n$ qui converge vers α_2
   - $(a_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}^{3})_n$ une suite $(a_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3(n)}^{3})_n$ qui converge vers α_3
   - ....
   - $(a_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ..\varphi_{(k-1)}(n)}^{(k)})_n$ une suite $(a_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ..\varphi_{k)}(n)}^{(k)})_n$ qui converge vers α_k
   - ....

   puis on montre que l'application $n \mapsto \phi(n) = (\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ .. \varphi_n)(n)$ définie une application strictement croissante de $\mathbb{N}$. On vérifie que, quel que soit $k \geqslant 1$, la suite $(a_{\phi(n)}^{(k)})_{n\geqslant k}$ est extraite de $(a_n^{(k)})_{n\geqslant k}$ et on justifie que la suite $(\alpha_n)_n$ est une valeur d'adhérence de $(a^{(k)})_k$ (on travaillera sur les sommes finies)

Indications pour l'exercice 3.2.6

1. Vérifier que le premier facteur du produit est le cos d'un angle remarquable. Montrer qu'il en est de même du second, etc. Ensuite remarquer que $\cos a \cos \frac{a}{2} .. \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin 2a}{2^{n+1} \sin \frac{a}{2^n}}$
2. Montrer que l'on peut déterminer une primitive de $\theta \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n}$ puis utiliser la formule $\cos a \cos \frac{a}{2} .. \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin 2a}{2^{n+1} \sin \frac{a}{2^n}}$

Indications pour l'exercice 3.2.7

1. Soit $g \in G$ quelconque.
   Montrer que toute valeur de g est de module 1 (considérer λ^k pour $k \in \mathbb{Z}$ et utiliser que G est borné donc $(\lambda^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ aussi).

   Jusifier que pour toute valeur propre λ et pour tout entier k, on a $|\lambda - 1| \leqslant \alpha$. Ensuite s'aider d'un dessin pour localiser le spectre de g et conclure en remarquant que $\left|\lambda^k - 1\right| \leqslant \alpha$ quelque soit k
2. Montrer que pour tout élément g de G, $g - I_n$ est une matrice nilpotente. Calculer g^k et utiliser que $g^k - I_n$ est bornée pour montrer que $g = I_n$
3. Que dire du groupe engendré par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans $GL_2(\mathbb{R})$? Construire alors un exemple dans $GL_n(\mathbb{R})$.

Indications pour l'exercice 3.2.8

1. Monotonie de la suite, puis utiliser l'inégalité $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}(1 + r^n)$ et démontrer que le produit $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + r^n)$ est convergent
2. Montrer que $\ln u_{n+1} - \ln l(r)$ s'écrit comme la somme d'une série (pensez à un reste partiel convenable). Attention $u_n \tilde{} v_n \not\Rightarrow \exp(u_n) \tilde{} \exp(v_n)$, par contre $u_n = v_n + o(1)$ alors $\exp(u_n) \tilde{} \exp(v_n)$

Indications pour l'exercice 3.2.9 Soit $y_{\max}$ la solution maximale de

$$y(1), \qquad xy' + y = 2(x^2 - 4), \tag{(E)}$$

Puisque $y(1) = 1$, la solution $y_{\max}$ est positive au voisinage de 1 donc il suffit de résoudre

$$y(1), \qquad xy' + y = 2(x^2 - 4). \tag{(E')}$$

On détermine l'intervalle maximal $I_0 =]a,b]$ sur lequel la solution y_0 de (E') est strictement positive. L'utilisation de la notion de solution maximale nous fournit l'expression de $y_{\max}$ sur l'intervalle $I_0 =]a,b]$. Nous savons que la solution maximale est définie sur un ouvert donc elle est définie sur un intervalle $]a,c[$ avec $c > b$. Puisque $y(b) = 0$ et $b < 2$, l'équation (E) évaluée en b montre que $y'(b) < 0$ donc dans un voisinage droit de b, la fonction y est négative et on résoud alors l'équation

$$y(b) = 0, \qquad xy' - y = 2(x^2 - 4). \tag{(E'')}$$

puis on vérifie que le recollement est bien C^1. La suite est de même nature