1 Exercices

Exercice 1.1 Soit $\alpha > 0$, on pose $R_n = \sum\limits_{p=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{p-1}}{p^\alpha}$.
Etudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} R_n$ lorsque $\alpha > 1$, puisque lorsque $\alpha = 1$ et enfin lorsque $0 < \alpha < 1$.

Exercice 1.2 Soient α, β deux nombres réels, déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha + (-1)^{n+1} n^\beta}$

1. lorsque $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ puis calculer sa somme en cas de convergence.
2. lorsque α et β sont deux réels quelconques.

Exercice 1.3 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui est défini par

$$f(x, y, z) = (8x - 6y + 5z, 14x - 11y + 10z, 7x - 6y + 6z)$$

1. Déterminer une base de $\ker(f - \mathrm{Id})$.
2. Montrer que $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$ sont en somme directe.
3. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\ker(f - \mathrm{Id})$, montrer que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Calculer f^n lorsque n est un entier naturel quelconque.

Exercice 1.4 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (x + 6y + 3z, 3x + 4y + 3z, 3x + 6y + z)$

1. Montrer que $\ker(f + 2\,\mathrm{Id}) \oplus \ker(f - 10\,\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le projecteur p_1 sur $\ker(f + 2\,\mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker(f - 10\,\mathrm{Id})$.
   Quel est le projecteur p_2 sur $\ker(f - 10\,\mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker(f + 2\,\mathrm{Id})$?
3. Montrer que f est une combinaison linéaire de p_1 et p_2.
   En déduire l'expression de $f^n(x, y, z)$ en fonction de n, x, y, z

Exercice 1.5 Soit α un nombre réel, déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{(\ln n)^\alpha + (-1)^n}$

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)