1 Exercices

Exercice 1.1 1. Etude de la réduction de $A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 9 \\ 1 & 14 & 13 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$

2. Justifier l'existence d'un vecteur $X_0 \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que la famille (X_0, AX_0, A^2X_0) soit une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
3. Montrer que $\{M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \quad / \quad AM = MA\} = \{P(A), \quad P \in \mathbb{R}_2[X]\}$

Exercice 1.2 1. Etude de la réduction de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ -7 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

2. Expliciter une matrice inversible P_0 et une matrice T la "plus simple possible" telles que $A = P_0 T P_0^{-1}$
3. Déterminer toutes les solutions de l'équation $Y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Soit X une matrice vérifiant $X^2 = A$.
   (a) Donner le plus de solutions "évidentes" à cette équation (on en trouvera 4 distinctes).
   (b) Montrer que ce sont les seules.

Exercice 1.3 1. Etude de la réduction de $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -9 & 3 & -7 \\ -6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

2. Chercher des solutions simples à l'équation $X^2 = A$.
3. Donner un polynôme annulateur pour A puis un polynôme annulateur pour X.
   Qu'en déduit-on sur X ?
4. Montrer que tout vecteur propre de X est vecteur propre de A.
5. En déduire qu'il existe une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}XP$ soient diagonales.
6. Obtient-on de nouvelles solutions à l'équation $X^2 = A$? A-t-on de la chance ?

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)