

1 Exercices

Exercice 1.1 1. Etudier la convergence des intégrales suivantes

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x} \ln x}{1-x} dx \quad \int_0^{+\infty} t \exp\left(-\frac{1}{t}\right) dt \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \sin x}{1+x^2} dx$$

2. Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

Exercice 1.2 1. Convergence des intégrales suivantes

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - x^3}} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x + \sqrt{x}}{x^2 - \ln x} dx \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\sqrt{x}} dx$$

2. Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{1+x^3} dx$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Pour la première intégrale, justifier l'existence de prolongement continue en 0 et en 1 (utiliser un équivalent de $\ln x$ en 1 en effectuant le cas échéant un changement de variable faisant passer à 0)
Pour la seconde, un équivalent simple en $+\infty$ règle le problème
Pour la troisième, une majoration (en valeur absolue) simple convient
2. Pour la convergence, un équivalent en $+\infty$ règle le problème.
Oh la ch'tite fraction rationnelle, un petit coup de décomposition en éléments simples (pour éviter les divergences, intégrer sur $[0, A]$ puis passer à la limite $A \rightarrow +\infty$)

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Pour la première intégrale, l'obtention d'équivalents en 0 et en 1 suffit (ils résultent d'une factorisation par facteur commun évidente)
Pour la seconde, l'obtention d'équivalents en 0 et en $+\infty$ suffit (chercher les termes dominants, ce ne sont pas les mêmes en 0 et en $+\infty$!!)
Pour la dernière, une majoration sur $[0, 1]$ fournit la convergence sur $[0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, un équivalent en $+\infty$ convient.
2. Pour la convergence, un équivalent en $+\infty$ règle le problème.
Oh la ch'tite fraction rationnelle, un petit coup de décomposition en éléments simples (pour éviter les divergences, intégrer sur $[0, A]$ puis passer à la limite $A \rightarrow +\infty$)

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)