1 Exercices

Exercice 1.1 On considère les fonctions $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n(\ln n)^2}$ et $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n e^{-x\sqrt{n}}}{n(\ln n)^2}$

1. Donner les domaines de définition respectifs de f et g.
2. Donner la limite de f en $+\infty$ puis son équivalent en $+\infty$.
3. Montrer que f et g sont continues sur leurs domaines de définitions respectifs.
4. Etudier la dérivabilité de f et g en 0.

Exercice 1.2

1. On considère la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}}$
   (a) Sur quel intervalle ouvert $]a, b[$ la fonction f est-elle définie (sans Stirling !) ?
   (b) Etudier la continuité de f sur $]a, b[$
2. Donner un DAS de $\ln\left(\dfrac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}}\right)$ puis un équivalent de $\binom{2n}{n}$ (sans Stirling !)
3. Etudier la définition de f en a et b puis la continuité éventuelle de f en ces points.

Exercice 1.3 Convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n\left(\dfrac{1}{1+1/2+1/3+\cdots+1/n} - \dfrac{1}{\ln n}\right)$.

Exercice 1.4 On considère les fonctions $f(x) = e\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

1. Donner les domaines de définition de chacune de ces fonctions.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$. En déduire l'équivalent de f en $+\infty$.
3. Etudier la continuité de ces fonctions sur leurs domaines de définition respectifs
4. Montrer que $f = g$. En déduire un équivalent de g en $+\infty$. Pouvait-on l'intuiter ?

Exercice 1.5

1. Soit $\alpha \in]0, 1[$.
   (a) Donner un équivalent simple u_n de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$ lorsque $n \to +\infty$.
   (b) Montrer que la suite $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha} - u_n$ admet une limite finie C_α.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ et $\zeta_1(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$.
   (a) Pour quelles valeurs de α, les expressions $\zeta(\alpha)$ et $\zeta_1(\alpha)$ existent-elles ?
   (b) Calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \zeta(\alpha) = L$ puis donner un équivalent de $\zeta(\alpha) - L$ lorsque $\alpha \to +\infty$.
   (c) Calculer $\zeta(\alpha) + \zeta_1(\alpha)$. En déduire l'expression de $\zeta(\alpha)$ en fonction de $\zeta_1(\alpha)$.
   (d) Donner un équivalent simple de $\zeta(\alpha)$ lorsque $\alpha \to 1^+$.
   (e) Etudier la continuité de ζ_1 et ζ sur leurs domaines de définition respectifs.
3. Montrer que $C_\alpha = \zeta_1(\alpha)$.
4. Et pourtant, elle converge ... et je sais même calculer sa somme !!

   Dernièrement, j'ai affirmé sur un forum que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \simeq -1.460\,4$.

   Suis-je un Galilé mathématique moderne ? Va-t-on faire mon procès chez Cauet ? :-)

Exercice 1.6 On pose $P_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^\alpha}\right)$ et $Q_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}\right)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^\times$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour quelles valeurs de α, la suite $(P_n(\alpha))_n$ est-elle convergente ?
2. Montrer que $\forall \alpha > 0$, la suite $(Q_n(\alpha))_n$ est convergente.
3. On note $Q(\alpha)$ sa limite. Montrer que la fonction $\alpha \mapsto Q(\alpha)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
4. Lorsque $0 < \alpha < 1$, donner un équivalent de $(P_n(\alpha))$.

Exercice 1.7 On considère la suite de fonctions $(u_n)_n$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \sqrt{1 + x + u_{n-1}(x)} \quad \text{et} \quad u_0 = 0$$

1. Montrer que la suite de fonctions (u_n) est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$.
2. On note u sa limite.
   (a) Montrer que la fonction u est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Calculer u.
3. On considère la suite g définie par $g_n = u_n(n)$ qui est donc définie par la relation de récurrence

$$g_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad g_n = \sqrt{n + g_{n-1}}$$

   (a) Donner un équivalent de g_n puis rechercher le terme suivant du DAS.
   (b) Trouver la nature des séries $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{g_n^2}$ et $\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{g_n}$

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)