# SERIES NUMERIQUES POSITIVES 2

Abdellah BECHATA

Soient une suite $(u_n)$ réelle positive décroissante.
Montrer que les séries de termes généraux $u_n$ et $2^n u_{2^n}$ ont même nature. ▸ solution

Soit une suite $(a_n)$ réelle positive. On pose $b_n = \dfrac{a_n}{1+a_n}$.
Comparer la convergence de la série de terme général $a_n$ et de celle de terme général $b_n$. ▸ solution

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de réels positifs.

1. Montrer, si $\sum_n u_n$ converge, que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. solution
2. Les séries de termes généraux $u_n$ et $nu_n^2$ sont-elles de même nature ? solution

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ une suite réelle ne prenant jamais la valeur $-1$. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)}$.

1. On suppose dans cette question que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n$.
   a) Montrer que la série de terme général $v_n$ converge. solution
   b) Calculer la somme de cette série lorsque la série de terme général $u_n$ diverge. solution
2. Etudier la série de terme général $v_n$ pour $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, puis $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. solution

Soit $(u_n)$ une suite à termes strictement positifs. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \beta_n$$

où la série de terme général $\beta_n$ est absolument convergente.

1. Montrer que l'on peut écrire $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \gamma_n$ où la série de terme général $\gamma_n$ est absolument convergente. solution
2. Montrer que pour un certain $A > 0$, on a $u_n \sim A n^{\alpha}$. solution

Soit $u \in (\mathbb{R}_+^\times)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. On donne $\alpha \in \mathbb{R}_+^\times$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k, \quad v_n = \dfrac{u_n}{(S_n)^\alpha}$.

1. On suppose que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge: quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} v_n$ ? solution
2. On suppose que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ diverge et $\alpha \neq 1$. En évaluant $S_{n+1}^\gamma - S_n^\gamma$ pour $\gamma$ bien choisi, déterminer la nature de $\sum v_n$. solution
3. Etudier enfin le cas où la série $\sum u_n$ diverge et $\alpha = 1$. solution

1. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans $(\mathbb{R}_+^\times)^n$, $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, montrer que $\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. solution
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $\mathbb{R}_+^\times$, telle que $\sum u_n$ converge, montrer qu'il existe une suite $(a_n)$ de réels positifs telle que

$$\prod_{i=1}^n u_i = \frac{1}{(n+1)^n}\prod_{i=1}^n u_i a_i.$$

On pose $v_n = \left(\prod_{i=1}^n u_i\right)^{1/n}$, montrer que $\sum v_n$ converge, et que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. solution

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle telle que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} ka_k = o(n)$. solution
2. On suppose en outre $(a_n)_n$ positive et décroissante. Montrer que $na_n = o(1)$. solution

Soit $\sigma$ une permutation de $\mathbb{N}^{\times}$. Etudier la nature des séries de termes généraux

1. $\dfrac{1}{n\sigma(n)}$ solution
2. $\dfrac{\sigma(n)}{n^2}$ solution
3. $\dfrac{\sigma(n)}{n\ln(n)}$ solution
4. $\dfrac{\sigma(n)}{n^3}$ solution

Les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} 2^n u_{2^n}$ étant à termes positifs, les suites $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_N$ et $\left(\sum_{n=0}^{N} 2^n u_{2^n}\right)_N$ sont croissantes. Par conséquent, elles convergentes toutes deux si et seulement si elles sont majorées.

$$\begin{aligned}
\forall k &\in [\![2^n+1, 2^{n+1}]\!], \quad u_{2^{n+1}} \leqslant u_k \leqslant u_{2^n} \\
&\Rightarrow \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} u_{2^{n+1}} \leqslant \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} u_k \leqslant \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} u_{2^n} \\
&\Leftrightarrow u_{2^{n+1}} \left[2^{n+1} - 2^n\right] \leqslant \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} u_k \leqslant u_{2^n} \left[2^{n+1} - 2^n\right] \\
&\Leftrightarrow u_{2^{n+1}} \left[2 \times 2^n - 2^n\right] \leqslant \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} u_k \leqslant u_{2^n} \left[2 \times 2^n - 2^n\right]
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^n u_{2^{n+1}} \leqslant \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} u_k \leqslant 2^n u_{2^n} \Rightarrow \forall N \geqslant 1, \quad N \leqslant 2^N$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{N-1} 2^n u_{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} u_k \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} 2^n u_{2^n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} 2^{n+1} u_{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n=1}^{2^N} u_k \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} 2^n u_{2^n}$$

Si la suite $\left( \sum_{n=0}^{N} u_n \right)_N$ est majorée par un réel $M$ alors

$$\forall m \quad \geqslant \quad 2, \quad \sum_{n=0}^{m} u_k = u_0 + \sum_{n=1}^{m} u_k \leqslant u_0 + \sum_{n=1}^{m-1} 2^n u_{2^n} \leqslant u_0 + M$$

$$\Rightarrow \quad \forall N \geqslant 2, \quad \sum_{n=0}^{N} 2^{n+1} u_{2^{n+1}} \leqslant 2u_0 + 2M$$

donc la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} 2^n u_{2^n}\right)_N$ est également majorée (par $2u_0 + 2M$). Réciproquement si la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} 2^n u_{2^n}\right)_N$ est majorée par un réel $M$ alors

$$\begin{aligned} \forall N \geqslant 1, \quad \sum_{n=0}^{N-1} 2^n u_{2^n} \leqslant M \Rightarrow \sum_{n=0}^{N} u_n &= u_0 + \sum_{n=1}^{N} u_k \\ &\leqslant u_0 + \sum_{n=1}^{2^N} u_k \leqslant u_0 + M \end{aligned}$$

donc la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_N$ est majorée par $u_0 + M$. retour à l'exercice

Supposons que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge alors $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui nous fournit l'équivalent $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n \geqslant 0$ donc la série $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ est ausi convergente.

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ est convergente alors $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or on a $\forall n \in \mathbb{N},\quad b_n = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant b_n < 1,\quad b_n = \frac{a_n}{1+a_n} \Leftrightarrow b_n + a_n b_n = a_n$$

$$\Leftrightarrow \quad a_n = \frac{b_n}{1-b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \geqslant 0$$

ce qui assure la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$. retour à l'exercice

1. Pour tout entier $n$, on note $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ alors, par décroissance de $(u_n)_n$, on a

$$S_{2N} - S_N = \sum_{n=N+1}^{2N} u_n \geqslant \sum_{n=N+1}^{2N} u_{2N} = u_{2N}(2N-N) = Nu_{2N}$$
$$\Rightarrow 0 \leqslant 2(N.u_{2N}) \leqslant 2(S_{2N} - S_N)$$
$$S_{2N+1} - S_N = . \sum_{n=N+1}^{2N+1} u_n \geqslant \sum_{n=N+1}^{2N+1} u_{2N+1}$$
$$= u_{2N+1}(2N+1-N) = (N+1).u_{2N+1}$$
$$\Rightarrow 0 \leqslant (2N+1)u_{2N+1} = 2(N+1)u_{2N+1} - u_{2N+1}$$
$$\underset{u_{2N+1}\geqslant 0}{\leqslant} 2(N+1)u_{2N+1} \leqslant 2(S_{2N+1} - S_N)$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ étant convergente, la suite $(S_N)_N$ est aussi convergente vers une limite $L$ et les encadrements précédents, nous donne :

$$\lim_{N\to+\infty} 2(S_{2N} - S_N) = 2(L - L) = 0 \Rightarrow \lim_{N\to+\infty} (2N.u_{2N}) = 0$$

$$\lim_{N\to+\infty} 2(S_{2N+1} - S_{N+1}) = 2(L - L) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to+\infty} ((2N+1).u_{2N+1}) = 0$$

ce qui nous assure que $\lim_{N\to+\infty} Nu_N = 0.$ retour à l'exercice

2. Si la série $\sum_{n\geqslant 0} nu_n^2$ est convergente, étant donné que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad nu_n^2 = u_n.\underbrace{(nu_n)}_{\to 0} = o(u_n)$$

et que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} nu_n^2$ est aussi convergente.
Par contre la série $\sum_{n\geqslant 0} nu_n^2$ peut converger sans que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. En effet, la série de Bertrand $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ est

divergente mais la série $\sum_{n\geqslant 2} n\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)^2 = \sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$ est une série de Bertrand convergente. ◂ retour à l'exercice

1

a) N'ayant aucune information sur la convergence ou la divergence de la série $\sum_n u_n$, nous allons essayer d'étudier les sommes partielles $(S_n)_n$ de la série $\sum_n v_n$.

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{(1+u_1)-1}{1+u_1} = 1-\frac{1}{1+u_1} \\
S_2 &= S_1 + \frac{u_2}{(1+u_1)(1+u_2)} = 1-\frac{1}{1+u_1} + \frac{(1+u_2)-1}{(1+u_1)(1+u_2)} \\
&= 1-\frac{1}{1+u_1}+\frac{1}{1+u_1}-\frac{1}{(1+u_1)(1+u_2)} \\
&= 1-\frac{1}{(1+u_1)(1+u_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= S_2 + \frac{u_3}{(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)} \\
&= 1 - \frac{1}{(1+u_1)(1+u_2)} + \frac{(1+u_3)-1}{(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)} \\
&= 1 - \frac{1}{(1+u_1)(1+u_2)} + \frac{1}{(1+u_1)(1+u_2)} \\
&\quad - \frac{1}{(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)} \\
&= 1 - \frac{1}{(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)}
\end{aligned}$$

Démontrons alors par récurrence que

$$\forall n \geqslant 1, \quad S_n = 1 - \frac{1}{(1+u_1)\cdots(1+u_n)}.$$

L'initialisation $n = 1$ a été établie. Supposons la propriété vraie au rang $n$ et montrons qu'elle reste vraie au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + \frac{u_{n+1}}{(1+u_1)\cdots(1+u_n)(1+u_{n+1})} \\
&= 1 - \frac{1}{(1+u_1)\cdots(1+u_n)} \\
&\quad + \frac{(1+u_n)-1}{(1+u_1)\cdots(1+u_n)(1+u_{n+1})} \\
&= 1 - \frac{1}{(1+u_1)\cdots(1+u_n)} + \frac{1}{(1+u_1)\cdots(1+u_n)} \\
&\quad - \frac{1}{(1+u_1)\cdots(1+u_n)(1+u_{n+1})} \\
&= 1 - \frac{1}{(1+u_1)\cdots(1+u_n)(1+u_{n+1})}
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. La suite $(u_n)_n$ étant positive, on en déduit que la suite $((1+u_1)\cdots(1+u_n))_n$ est croissante (on passe d'un rang au suivant en multipliant par $1+u_n \geqslant 1$) donc la suite $\left(\dfrac{1}{(1+u_1)\cdots(1+u_n)}\right)_n$ est décroissante. Ainsi la suite $(S_n)_n = \left(1-\dfrac{1}{(1+u_1)\cdots(1+u_n)}\right)_n$ est croissante et elle est clairement majorée par 1 donc elle est converge c'est-à-dire que la série $\sum_n v_n$ converge. retour à l'exercice

b) Etant donné que le développement du produit $(1+u_1)\cdots(1+u_n)$ est de la forme

$$(1+u_1)\cdots(1+u_n) = 1+(u_1+\cdots+u_n)$$
$$+\sum_{k=2}^{n} \text{produit de } k \text{ éléments } u_i \text{ d'indice distincts}$$
$$\geqslant u_1+\cdots+u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

car la suite $(u_n)_n$ est positive et la série $\sum_n u_n$ diverge (donc vers $+\infty$) ce qui entraine la convergence vers $+\infty$ de la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)_n$. Par conséquent, on a $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1-0=1$

c'est-à-dire que la série $\sum_{n \geqslant 1} v_n$ converge et sa somme vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 1$. ◂ retour à l'exercice

2. **Premier cas** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. D'après la question 1, on a

$$\forall n \geqslant 1, \quad S_n = 1 - \frac{1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k+1}\right)}$$

Transformons ce dernier produit.

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{k+1}\right)=\prod_{\substack{k \text{ pair} \\ k\in[\![1,n]\!]}}\left(1+\frac{(-1)^k}{k+1}\right)\prod_{\substack{k \text{ impair} \\ k\in[\![1,n]\!]}}\left(1+\frac{(-1)^k}{k+1}\right)$$

$$=\prod_{1\leqslant 2p\leqslant n}\left(1+\frac{1}{2p+1}\right)\prod_{1\leqslant 2p+1\leqslant n}\left(1-\frac{1}{2p+1+1}\right)$$

$$=\prod_{1\leqslant p\leqslant n/2}\left(\frac{2p+2}{2p+1}\right)\prod_{0\leqslant p\leqslant (n-1)/2}\left(\frac{2p+1}{2p+2}\right)$$

$$=\frac{2\times 0+1}{2\times 0+2}\times q_n\prod_{1\leqslant p\leqslant (n-1)/2}\left[\left(\frac{2p+2}{2p+1}\right)\left(\frac{2p+1}{2p+2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}q_n\prod_{1\leqslant p\leqslant n/2}1=\frac{1}{2}q_n$$

où $q_n = 1$ si $n$ est impair (la cas $p = \dfrac{n}{2}$ n'apparait pas) et
$q_n = \dfrac{2\left(\frac{n}{2}\right)+2}{2\left(\frac{n}{2}\right)+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$ si $n$ est pair. Par conséquent, on en

déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{(-1)^k}{k+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{2n+1}\left(1+\frac{(-1)^k}{k+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}.\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{k+1}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1-\frac{1}{\frac{1}{2}}=1-2=-1.$$

Autrement dit la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge et sa somme vaut $-1$

c'est-à-dire que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n=-1.$

**Second cas** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. On procède de façon analogue en utilisant en outre la quantité conjuguée.. On note $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\right)$ alors

$$\begin{aligned}
u_n &= \prod_{\substack{k \text{ pair} \\ k\in[\![1,n]\!]}}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\right)\prod_{\substack{k \text{ impair} \\ k\in[\![1,n]\!]}}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\right) \\
&= \prod_{1\leqslant 2p\leqslant n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2p+1}}\right)\prod_{1\leqslant 2p+1\leqslant n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2p+1+1}}\right) \\
&= \prod_{1\leqslant p\leqslant n/2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2p+1}}\right)\prod_{0\leqslant p\leqslant (n-1)/2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2p+2}}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) t_n \prod_{1\leqslant p\leqslant (n-1)/2}\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{2p+1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2p+2}}\right)\right]
\end{aligned}$$

avec $t_n = 1$ si $n$ est impair et

$$t_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{n}{2}\right)+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

si $n$ est pair. donc $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.\frac{u_n}{t_n}$ s'écrit :

$$\prod_{1\leqslant p\leqslant (n-1)/2}\left[1+\frac{1}{\sqrt{2p+1}}-\frac{1}{\sqrt{2p+2}}-\frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}}\right]$$

$$=\prod_{1\leqslant p\leqslant (n-1)/2}\left[1+\frac{\sqrt{2p+2}-\sqrt{2p+1}}{\sqrt{2p+1}\sqrt{2p+2}}-\frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}}\right]$$

$$=\prod_{1\leqslant p\leqslant (n-1)/2}[1+\frac{(2p+2)-(2p+1)}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}\left(\sqrt{2p+2}+\sqrt{2p+1}\right)}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}}]$$

$$= \prod_{1 \leqslant p \leqslant (n-1)/2} [1 + \frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}\left(\sqrt{2p+2}+\sqrt{2p+1}\right)} - \frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}}]$$

$$= \prod_{1 \leqslant p \leqslant (n-1)/2} [1 - \frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}}\right)]$$

Il est immédiat que $t_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $t_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ ce qui entraine que la suite

$\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\right)\right)_n$ converge si et seulement si la suite

$$\begin{aligned} w_n &= \prod_{1\leqslant p\leqslant (n-1)/2}[1-\frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}} \\ &\quad +o(\frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}})] \end{aligned}$$

converge. Pour étudier la convergence de la suite $(w_n)_n$, il suffit d'étudier la convergence de la suite $(\ln(w_n))_n$ avec

$$\begin{aligned} \ln(w_n) &= \sum_{1\leqslant p\leqslant (n-1)/2}\ln(1-\frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}} \\ &\quad +o(\frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}})). \end{aligned}$$

c'est-à-dire la convergence de la série

$$\sum_{p\geqslant 1} \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}}\right)\right).$$

Or on dispose de l'équivalent suivant :

$$\begin{aligned}
&\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}}\right)\right)\\
&\underset{p\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}}\right)\\
&\underset{p\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}} \underset{p\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2p}
\end{aligned}$$

La série $\sum_{p\geqslant 1} -\frac{1}{2p} = -\frac{1}{2}\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{p}$ étant divergente et de signe constant, on en déduit que la série

$$\sum_{p\geqslant 1} \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}}\right)\right)$$

diverge. En outre, ses termes négatifs à partir d'un certain rang, elle diverge vers $+\infty$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(w_n) = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+ \Rightarrow S_n = 1 - w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

retour à l'exercice

1. On utilise les développements limités en tenant compte que la série $\sum_n \beta_n$ étant convergente, on est assuré que $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(1+\underbrace{\frac{\alpha}{n}+\beta_n}_{\to 0}) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\alpha}{n}+\beta_n$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{n}+\beta_n\right)^2 + o\left(\left(\frac{\alpha}{n}+\beta_n\right)^2\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\alpha}{n}+\beta_n-\frac{\alpha^2}{2n^2}+o\left(\beta_n\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \alpha\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]+\beta_n-\frac{\alpha^2}{2n^2}+o\left(\beta_n\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\underbrace{\beta_n+o\left(\beta_n\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{=\gamma_n}$$

La série $\sum_n (\beta_n + o(\beta_n))$ est absolument convergente puisque

$$|\beta_n + o(\beta_n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |\beta_n| \geqslant 0$$

et la série $\sum_n |\beta_n|$ converge. En outre, la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ étant à termes positifs et convergente, on en déduit que la série $\sum_n O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est aussi absolument converge ce qui entraine l'absolue convergence de la série $\sum_n \gamma_n$. retour à l'exercice.

2. D'après la question précédente, la série $\sum_n \left[\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) - \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \sum_n \gamma_n$ est convergente donc la suite $S_N = \sum_{n=1}^{N} \left[\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) - \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ aussi.
Or on a

$$\begin{aligned}
S_{N-1} &= \sum_{n=1}^{N-1} \left[\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} [\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)] - \alpha \sum_{n=1}^{N-1} [\ln(n+1) - \ln(n)] \\
&= \ln(u_N) - \ln(u_1) - \alpha\left(\ln(N) - \ln(1)\right) = \ln(u_N) - \ln(u_1) -
\end{aligned}$$

Soit $L = \lim\limits_{n \to +\infty} S_N$ alors on a

$$\exp\left(\ln(u_N) - \ln(u_1) - \alpha \ln(N)\right) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \exp(L)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{u_N}{u_1 N^\alpha} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \exp(L) \Leftrightarrow u_N \underset{N \to +\infty}{\sim} u_1 \exp(L) N^\alpha$$

retour à l'exercice

1. La série $\sum_n u_n$ converge signifie que la suite $(S_n)_n$ converge.
   La suite $(u_n)_n$ étant à valeurs strictement positive, la suite $(S_N)_N$ est une suite strictement croissante de réels strictement positif donc sa limite $L$ est strictement positive.
   On en déduit donc

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} L \Rightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{L} \geqslant 0.$$

   La série $\sum_n \frac{u_n}{L} = \frac{1}{L}\sum_n u_n$ étant convergente, on est assuré de la convergence de la série $\sum_n v_n$. retour à l'exercice

2. Etant donné que la série $\sum_n u_n$ est à termes positifs, sa divergence entraine sa divergence vers $+\infty$ autrement dit la suite $(S_n)_n$ tend vers $+\infty$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
S_{n+1}^{\gamma} - S_n^{\gamma} &= (S_n + u_{n+1})^{\gamma} - S_n^{\gamma} = \left(S_n\left[1 + \frac{u_{n+1}}{S_n}\right]\right)^{\gamma} - S_n^{\gamma} \\
&= S_n^{\gamma}\left(1 + \frac{u_{n+1}}{S_n}\right)^{\gamma} - S_n^{\gamma} = S_n^{\gamma}\left[\left(1 + \frac{u_{n+1}}{S_n}\right)^{\gamma} - 1\right] \\
&= S_n^{\gamma}\left[1 + \gamma\frac{u_{n+1}}{S_n} + o\left(\frac{u_{n+1}}{S_n}\right) - 1\right] \quad \text{car } \lim_n \frac{u_{n+1}}{S_n} = 0 \\
&= \gamma u_{n+1} S_n^{\gamma-1} + o\left(\frac{u_{n+1}}{S_n}\right) \Rightarrow S_{n+1}^{\gamma} - S_n^{\gamma} \underset{n\to+\infty}{\sim} \gamma u_{n+1} S_n^{\gamma-1} \\
&= \gamma v_{n+1}(S_{n+1})^{\alpha} S_n^{\gamma-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \gamma v_{n+1}(S_n)^{\gamma+\alpha-1}
\end{aligned}$$

puisque

$$S_{n+1} = S_n + u_n = S_n\Big(1 + \underbrace{\frac{u_{n+1}}{S_n}}_{\to 0}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n.$$

Par conséquent, en choisissant

$$\gamma + \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \gamma = 1 - \alpha,$$

on dispose de l'équivalent suivant

$$S_{n+1}^{1-\alpha} - S_n^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \gamma v_{n+1}.$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \gamma v_{n+1} = \gamma \sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ étant à termes de signe constant, on en déduit que les séries $\gamma \sum\limits_{n} v_n$ et

$\sum_{n\geqslant 0}\left(S_{n+1}^{1-\alpha}-S_n^{1-\alpha}\right)$ sont de même nature. Or pour tout entier $N\geqslant 1$, puisque $S_n\to+\infty$, on a

$$\sum_{n=0}^{N-1}\left(S_{n+1}^{1-\alpha}-S_n^{1-\alpha}\right)=S_N^{1-\alpha}-S_0^{1-\alpha}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\left\{\begin{array}{ll}+\infty & \text{si } 1-\alpha>0\\ -S_0 & \text{si } 1-\alpha<0\end{array}\right.$$

donc la série $\sum_n v_n$ diverge si $0<\alpha<1$ et converge si $\alpha>1$.

◂ retour à l'exercice

3. On remarque que

$$\ln(S_{n+1})-\ln(S_n)=\ln\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right)=\ln\left(\frac{S_n+u_{n+1}}{S_n}\right)$$
$$=\ln\left(1+\frac{u_{n+1}}{S_n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{u_{n+1}}{S_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{u_{n+1}}{S_{n+1}}=v_{n+1}\geqslant 0$$

donc les séries $\sum_{n\geqslant 0} v_{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} v_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} [\ln(S_{n+1}) - \ln(S_n)]$ sont de même nature. Or pour tout entier $N$, on a

$$\sum_{n=0}^{N-1} [\ln(S_{n+1}) - \ln(S_n)] = \ln(S_n) - \ln(S_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est divergente. retour à l'exercice

1. On remarque l'encadrement proposé est équivalent à l'encadrement

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}\right) \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln(x_i) \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)$$

qui est vrai car la fonction ln est concave et que

$$\begin{aligned} \forall i &\in [\![1, n]\!], \quad x_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \quad \text{avec} \\ \forall i &\in [\![1, n]\!], \quad \alpha_i \geqslant 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \alpha_i \in [0, 1] \end{aligned}$$

◂ retour à l'exercice

2. On construit la suite $(a_n)_n$ par récurrence forte. Pour $n = 1$, on a

$$u_1 = \frac{1}{(1+1)^1} u_1 a_1 \Leftrightarrow a_1 = 2.$$

puisque $u_1 > 0$. Etant donné que l'on a raisonné par équivalence, on est assuré que le réel $a_1 = 2 > 0$ convient bien. Supposons que $a_1, .., a_n$ soientt construits et que $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad a_n > 0$ alors, puisque $\forall i \in \mathbb{N}, \quad u_i > 0$, on a :

$$\prod_{i=1}^{n+1} u_i = \frac{1}{(n+1+1)^{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} u_i a_i$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} \prod_{i=1}^{n} u_i = \frac{1}{(n+2)^{n+1}} \left(u_{n+1} a_{n+1}\right) \prod_{i=1}^{n} u_i a_i$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} \frac{1}{(n+1)^n} \prod_{i=1}^{n} u_i a_i = \frac{1}{(n+2)^{n+1}} \left(u_{n+1} a_{n+1}\right) \times$$

$$\prod_{i=1}^{n} u_i a_i \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}$$

Etant donné que l'on a raisonné par équivalence, on est assuré que le réel $a_{n+1} = \dfrac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n} > 0$ convient.
En combinant les résultats des questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{1}{n+1}\prod_{i=1}^{n}(u_i a_i)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} u_i a_i \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{(i+1)^i}{i^{i-1}} = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i u_i \frac{(i+1)^i}{i^i} \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i u_i \left(1+\frac{1}{i}\right)^i
\end{aligned}$$

Pour tout entier $N$, on a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} v_n &\leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} iu_i \left(1+\frac{1}{i}\right)^i \\
&= \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} iu_i \left(1+\frac{1}{i}\right)^i \\
&= \sum_{1\leqslant i\leqslant n\leqslant N} \frac{1}{n(n+1)} iu_i \left(1+\frac{1}{i}\right)^i \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{N} \sum_{n=i}^{N} \frac{1}{n(n+1)} iu_i \left(1+\frac{1}{i}\right)^i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{N} iu_i \left(1+\frac{1}{i}\right)^i \sum_{n=i}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{N} iu_i \left(1+\frac{1}{i}\right)^i \sum_{n=i}^{N} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} iu_i \left(1+\frac{1}{i}\right)^i \left(\frac{1}{i}-\frac{1}{N+1}\right) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{N} iu_i \left(1+\frac{1}{i}\right)^i \left(\frac{1}{i}\right) = \sum_{i=1}^{N} u_i \left(1+\frac{1}{i}\right)^i
\end{aligned}$$

Etant donné que

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^i = \exp\left(i\ln\left(1+\frac{1}{i}\right)\right) \underset{i\to+\infty}{=} \exp\left(i\left(\frac{1}{i}+o\left(\frac{1}{i}\right)\right)\right)$$

$$\underset{i\to+\infty}{=} \exp(1+o(1)) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(1)=e>0,$$

on en déduit que

$$u_i\left(1+\frac{1}{i}\right)^i \underset{i\to+\infty}{\sim} u_i e \geqslant 0.$$

La série $\sum_i u_i e = e\sum_i u_i$ étant convergente, on en déduit que la série $\sum_i u_i\left(1+\frac{1}{i}\right)^i$ est convergente. En particulier, la suite $\left(\sum_{i=1}^N u_i\left(1+\frac{1}{i}\right)^i\right)_N$ est majorée donc la suite $\left(\sum_{n=1}^N v_n\right)_N$ est majorée. Or cette dernière est croissante (puisque la suite $(v_n)_n$ est positive) donc elle est convergente ce qui signifie que la série $\sum_n v_n$ converge et l'on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} u_i \left(1+\frac{1}{i}\right)^i .$$

Pour finir, on remarque que :

$$\forall i \geqslant 1, \quad \left(1+\frac{1}{i}\right)^i = \exp\left(i \ln\left(1+\frac{1}{i}\right)\right).$$

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ est croissante sur $]1,+\infty[$ (par exemple, la fonction ln est concave donc la fonction pente

$$x \mapsto \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} = \frac{\ln(x)}{x-1}$$

est décroissante sur $]1, +\infty[$) et la suite $\left(1 + \dfrac{1}{i}\right)_i$ est décroissante à valeurs dans $]1, +\infty[$ donc la suite

$$\frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{i}\right)}{1 + \dfrac{1}{i} - 1} = i \ln\left(1 + \frac{1}{i}\right)$$

est croissante. Par croissance de la fonction exp, on en déduit que la suite

$$\exp\left(i \ln\left(1 + \frac{1}{i}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i$$

est croissante. Comme elle converge vers $e$, on est assuré que

$$\forall i \geqslant 1, \quad \left(1+\frac{1}{i}\right)^{i} \leqslant e \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} u_i \left(1+\frac{1}{i}\right)^{i}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} u_i e \leqslant e \sum_{i=1}^{+\infty} u_i .$$

◂ retour à l'exercice

1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n$ qui tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$ donc on a :

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = \sum_{k=1}^{n} k(R_k - R_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} kR_k - \sum_{k=1}^{n} kR_{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} kR_k - \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)R_k = \sum_{k=1}^{n} kR_k - \sum_{k=2}^{n+1} kR_k + \sum_{k=2}^{n+1} R_k$$

$$= R_1 - (n+1)R_{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} R_k$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k = \frac{R_1}{n} - \left(1+\frac{1}{n}\right) R_n + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n+1} R_k.$$

Puisque $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, le lemme de Césaro montre que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} R_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (il y a bien $n$ termes consécutifs dans la somme) ce qui permet d'affirmer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} ka_k \underset{n\to+\infty}{=} o(n).$$

retour à l'exercice

2. Puisque la suite $(a_n)_n$ est décroissante et positive, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_n = \frac{a_n}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{a_n}{n}.\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)a_n}{2}.$$

Etant donné que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} ka_n = 0$ et que la suite $\left(\frac{(n+1)a_n}{2}\right)_n$ est positive, le théorème d'encadrement montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)a_n}{2} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (n+1)a_n = 0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (na_n + a_n) = 0 \underset{a_n\to 0}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to+\infty} na_n = 0.$$

◂ retour à l'exercice

1. Commençons par remarquer que, $\sigma$ étant bijective, pour tout entier $n$, l'ensemble $\varphi\left([\![n, m]\!]\right)$ contient autant d'éléments que l'ensemble $[\![n, m]\!]$. Il existe une suite strictement croissante $(a_n, .., a_m)$ d'entiers tels que

$$\varphi\left([\![n, m]\!]\right) = \{a_n, a_{n+1}, .., a_m\}$$

et, pour tous entiers $m \geqslant n \geqslant 1$, on a

$$\forall k \in [\![n, m]\!], \quad a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow a_k + 1 \leqslant a_{k+1} \Leftrightarrow a_{k+1} - a_k \leqslant 1$$

$$\Rightarrow \forall m > n \geqslant 1, \quad \forall q \in [\![n+1, m]\!], \quad \sum_{k=n}^{q-1} (a_{k+1} - a_k) \geqslant \sum_{k=n}^{q-1} 1$$

$$\Leftrightarrow a_q - a_n \geqslant ((q-1) - n + 1) \Leftrightarrow a_q \geqslant a_n + q - n$$

En particulier, on a

$$\sum_{k=n}^{m} \sigma(k) = \sum_{k=n}^{m} a_k \geqslant \sum_{k=n}^{m} (\underbrace{a_n}_{\geqslant 1} + k - n) \geqslant \sum_{k=n}^{m} (1 + k - n)$$
$$\underset{q=k-n+1}{=} \sum_{q=1}^{m-n+1} q$$
$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{\sigma(k)} = \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{a_k} \leqslant \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{a_n + k - n} \leqslant \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{1 + k - n}$$
$$\underset{q=k-n+1}{=} \sum_{q=1}^{+m-n} \frac{1}{q}$$

c'est à dire que la somme des éléments de $\varphi([\![n, m]\!])$ vaut au moins la somme des $m - n + 1$ entiers consécutifs et la somme des inverses des éléments de $\varphi([\![n, m]\!])$ vaut au plus la somme des inverses des $m-n+1$ entiers consécutifs. Pour tout entier $k \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leqslant \quad \sum_{q=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{q\sigma(q)} \leqslant \sum_{q=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^k\sigma(q)} = \frac{1}{2^k} \sum_{q=2^\kappa+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{\sigma(q)} \\ &= \quad \frac{1}{2^k} \sum_{q=1}^{2^k} \frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{2^k} \ln(2^k) = \frac{k\ln(2)}{2^k} \end{aligned}$$

La série $\displaystyle\sum_k \frac{k}{2^k}$ étant convergente, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \sum_{q=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{q\sigma(q)}$ est convergente. La suite $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\sigma(n)}\right)_n$

étant croissante et pour tout entier $N \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\sigma(n)} \leqslant \sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{n\sigma(n)} = \sum_{k=0}^{2^{N-1}} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n\sigma(n)}$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n\sigma(n)}$$

donc elle est aussi majorée donc elle est converge c'est-à-dire que la série $\sum_{n} \frac{1}{n\sigma(n)}$ est convergente. ◂ retour à l'exercice

2. On procède par l'absurde en supposant que la série $\sum_n \frac{\sigma(n)}{n^2}$ est convergente i.e. la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$ est convergente.
Par conséquent, on obtient que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{(2n)^2} = \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k) \geqslant \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^{n} q$$

$$= \frac{1}{4n^2} \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n} \underset{\forall n \geqslant 2}{\geqslant} \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

Ainsi la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2}\right)_n = (u_{2n} - u_n)$ ne converge pas vers 0 ce qui contredit la convergence de la suite $(u_n)_n$ donc la série $\sum_n \frac{\sigma(n)}{n^2}$ est divergente. retour à l'exercice

3. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma(n) \geqslant 1$, on a $\frac{\sigma(n)}{n\ln(n)} \geqslant \frac{1}{n\ln(n)} \geqslant 0$ et la série $\sum_n \frac{1}{n\ln(n)}$ est une série de Bertrand divergente dont la série $\sum_n \frac{\sigma(n)}{n\ln(n)}$ est divergente. retour à l'exercice

4. A finir retour à l'exercice