SERIES NUMERIQUES POSITIVES 1

Abdellah BECHATA

Convergence de la série de terme général (u_n) définie par
$u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(n+p)^{\alpha}}$ avec $\alpha > 0$. ▸ solution

(Centrale) Nature de la série de terme général $u_n = \prod_{k=1}^{n} (1 - e^{1/k})$.

solution

(Mines-Pont, Centrale) Etude de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \sum_{k=1}^{n} k \ln^2(k)}.$$

solution

Nature des séries de terme général :

1. $\dfrac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$ solution
2. $e^{-\sqrt{n}}$. solution

Soient a et b deux réels strictement positifs. Nature de la série de terme général

1. $\dfrac{n^n}{(2n)!}$ solution
2. $\sin(2\arctan n)$ solution
3. $\arccos \dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha}$ solution
4. $\left(\cos\left(\dfrac{1}{n^a}\right)\right)^n$ solution
5. $\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$ solution

Soit $\alpha > 1$ et $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Nature de $\sum u_n$? solution

Soit $\alpha > 0$. On pose $\sigma_n(\alpha) = (\ln 1)^\alpha + (\ln 2)^\alpha + \cdots + (\ln n)^\alpha$.

1. Montrer que $\sigma_n(\alpha) \sim n(\ln n)^\alpha$. solution
2. Soit $\beta > 0$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = (\sigma_n(\alpha))^{-\beta}$. solution

Convergence et calcul de $\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{5\times 7}+\dfrac{1}{9\times 11}+\cdots$ solution

Soit la série

$$\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}+\frac{1}{5\times 6\times 7\times 8}+\frac{1}{9\times 10\times 11\times 12}+\cdots\;.\;.$$

1. Montrer la convergence de cette série puis calculer sa somme. solution
2. Donner un équivalent du reste. solution

Convergence de la série $\sum a^{1+1/2+\cdots+1/n}$, $a > 0$. solution

On fixe $x \in \mathbb{R}_+^\times$. Pour $n \in \mathbb{N}^\times$, on pose $u_n = \dfrac{n!}{x^n} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$.

1. Etudier la suite de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge et préciser sa limite. solution
2. Etablir l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ converge. solution
3. Etablir l'existence de $A \in \mathbb{R}^\times$ tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n^\alpha}$. solution
4. Etudier la convergence de la série de terme général u_n. solution

1. Nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ (absolument convergente ? convergente ?). ▸ solution
2. En cas de convergence, calculer sa somme. ▸ solution

Convergence puis calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$. solution

Le terme u_n nous fait penser à juste titre à une somme de Riemann. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(n+p)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{p}{n}\right)^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(\frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{p}{n}\right)^\alpha} \right)$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^\alpha}$ est continue sur $[0,1]$ donc le théorème sur les sommes de Riemann s'applique ce qui nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{\left(1+\frac{p}{n}\right)^\alpha} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^\alpha} = C(\alpha) > 0.$$

(Nous n'explicitons pas $C(\alpha)$ car, dans la suite, nous n'exploiterons que le fait qu'elle soit non nulle). En remarquant que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{p}{n}\right)^{\alpha}} &= \underbrace{\frac{1}{2^{\alpha}n}}_{\to 0}+\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{p}{n}\right)^{\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0+C(\alpha)=C(\alpha)\\ &\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{p}{n}\right)^{\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\sim} C(\alpha) \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C(\alpha)}{n^{\alpha-1}}\end{aligned}$$

La suite (u_n) est équivalente à une suite positive qui est une série de Riemann d'indice $\alpha-1$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $\alpha-1>1 \Leftrightarrow \alpha>2$. retour à l'exercice

On commence par remarquer que

$$u_n = \underbrace{(-1)^n \prod_{k=1}^{n}\left(e^{1/k}-1\right)}_{\geqslant 0}, \quad |u_n| = \prod_{k=1}^{n}\left(e^{1/k}-1\right),$$

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = e^{1/(n+1)} - 1 \leqslant \underbrace{e^{1/2}-1}_{\simeq 0.65} < 1$$

Ainsi la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est une série alternée avec $(|u_n|)_{n\geqslant 1}$ qui est une suite de réels positifs décroissante. Par conséquent, cette série converge si et seulement la suite $(|u|_n)_n$ tend vers 0. En utilisant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \mapsto e^x$ sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient

$$\forall x \in [0,1], \quad |e^x - 1| \leqslant e(x-1) \Rightarrow \forall k \geqslant 1, \quad \left|e^{1/k} - 1\right| \leqslant \frac{e}{k}$$

$$\Rightarrow \quad |u_n| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{e}{k} = \frac{e^n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'après les croissances comparées donc la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ est convergente. retour à l'exercice

On va utiliser la comparaison série-intégrale pour obtenir un équivalent de $T_n = \sum_{k=1}^{n} k \ln^2(k)$. On introduit la fonction $f : t \mapsto t \ln^2(t)$ qui est clairement croissante sur $[1, +\infty[$ donc

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^\times, \quad & \forall t \in [k, k+1], \quad f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k+1) \\
\Rightarrow \quad & \int_k^{k+1} f(k) dt \leqslant \int_k^{k+1} f(t) dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k+1) dt \\
\Leftrightarrow \quad & f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(t) dt \leqslant f(k+1)
\end{aligned}$$

Autrement dit, on a pour tout $n \geqslant 2$:

$$f(1) \leqslant \int_1^2 f(t)dt \leqslant f(2), \quad f(2) \leqslant \int_2^3 f(t)dt \leqslant f(3),$$

$$\cdots, \quad f(n-1) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)dt \leqslant f(n)$$

En sommant ces encdrements, on obtient, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1) \leqslant \int_1^n f(t)dt \leqslant f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$$

$$\Leftrightarrow T_n - f(n) \leqslant \int_1^n f(t)dt \leqslant T_n \Leftrightarrow \begin{cases} T_n - f(n) \leqslant \displaystyle\int_1^n f(t)dt \\ \displaystyle\int_1^n f(t)dt \leqslant T_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (E) : \int_1^n f(t)dt \leqslant T_n \leqslant \int_1^n f(t)dt + f(n)$$

On calcule alors l'intégrale considérée par intégration par partie

$$\begin{aligned}\int_1^n t(\ln(t))^2 dt &= \left[\frac{t^2}{2}(\ln(t))^2\right]_1^n - \int_1^n \frac{t^2}{2}.2.\frac{\ln(t)}{t} dt \\ &= \frac{n^2(\ln(n))^2}{2} - \int_1^n t\ln(t) dt \\ &= \frac{n^2(\ln(n))^2}{2} - \left(\left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^n - \int_1^n \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} dt\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{n^2(\ln(n))^2}{2} - \frac{n^2\ln(n)}{2} + \frac{1}{2}\int_1^n t dt$$

$$= \frac{n^2(\ln(n))^2}{2} - \frac{n^2\ln(n)}{2} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2(\ln(n))^2}{2}$$

En divisant l'encadrement (E) par $\frac{n^2(\ln(n))^2}{2}$ lorsque $n \geqslant 2$, on obtient

$$\underbrace{1 - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n(\ln(n))^2} - \frac{1}{n^2(\ln(n))^2}}_{\to 1} \leqslant \frac{T_n}{\frac{n^2(\ln(n))^2}{2}}$$

$$\leqslant \underbrace{1 - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n(\ln(n))^2} - \frac{1}{n^2(\ln(n))^2} + \frac{2}{n}}_{\to 1}$$

et l'application du théorème d'encadrement montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{T_n}{\dfrac{n^2(\ln(n))^2}{2}} = 1 \Leftrightarrow T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2(\ln(n))^2}{2}$$

$$\Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^{\alpha+2}(\ln(n))^2} \geqslant 0$$

L'équivalent suivant étant positif, on est en mesure d'affirmer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha+2}(\ln(n))^2}$ est convergente.

- Si $\alpha + 2 > 1$ alors, pour tout $n \geqslant 3 \geqslant e$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{n^{\alpha+2}(\ln(n))^2} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha+2}(\ln(e))^2} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha+2}}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha+2}}$ étant convergente puisque $\alpha + 2 > 1$, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha+2}(\ln(n))^2}$ est convergente donc la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ aussi.

- Si $\alpha + 2 < 1$, il existe $\varepsilon \in \left]0, 1\right[$ tel que $\alpha + 2 + \varepsilon < 1$ donc

$$\frac{\frac{1}{n^{\varepsilon}}}{n^{\alpha+2}(\ln(n))^2} = \frac{1}{n^{\alpha+2+\varepsilon}(\ln(n))^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'après les croissances comparées ce qui entraine que $\frac{1}{n^{\varepsilon}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}(\ln(n))^2}\right)$. Ces deux séries étant positive et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\varepsilon}}$ étant divergente (puisque $\varepsilon < 1$), on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha+2}(\ln(n))^2}$ est divergente donc la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ aussi.

- Si $\alpha + 2 = 1$, étudions la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$. On introduit la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t(\ln(t))^2}$ qui est clairement décroissante sur $[2, +\infty[$. En utilisant la comparaison série-intégrale, on obtient pour tout entier $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^2} \leqslant \int_2^n \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt \underset{x=\ln(t)}{=} \int_{\ln(2)}^{\ln(n)} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\ln(2)}^{\ln(n)}$$

$$= \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(2)}$$

Par conséquent, la suite $\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^2}\right)_{n\geqslant 2}$ est croissante (comme somme de termes positifs) et majorée donc elle converge ce qui signfie que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ est convergente donc la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ aussi.

retour à l'exercice

1. On remarque simplement

$$\forall n \geqslant e^{e^2}, \quad \ln(n) \geqslant e^2 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}} \leqslant \frac{1}{(e^2)^{\ln(n)}}$$
$$= \frac{1}{e^{2\ln(n)}} = \frac{1}{e^{\ln(n^2)}} = \frac{1}{n^2}$$

et, comme la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente ($\alpha = 2 > 1$), on en déduit que la série $\sum_n \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n}}$ est convergente. retour à l'exercice

2. On a

$$\forall n \geqslant 1, \quad n^2 e^{-\sqrt{n}} = \exp\left(2\ln(n) - \sqrt{n}\right),$$

$$2\ln(n) - \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \Rightarrow n^2 e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par conséquent, on peut affirmer que $e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série de Riemann $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^2}$ étant absolument convergente ($\alpha = 2 > 1$), on en déduit que la série $\displaystyle\sum_n e^{-\sqrt{n}}$ est également convergente. retour à l'exercice

1. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n^n}{(2n)!}$ qui est strictement positif et, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}.\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^n}{n^n}.\frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{2(2n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)} \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

Puisque $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \dfrac{1}{n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on en déduit que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Le critère de d'Alembert entraine que la série $\sum\limits_n u_n$ est convergente.

retour à l'exercice.

2. En remarquant que $\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(\pi - 2\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sin\left(2\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} 2\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n} \end{aligned}$$

La série $\sum_n \frac{2}{n}$ étant positive et divergente (série de Riemann avec $\alpha = 1$), on en déduit que la série $\sum_n u_n$ est divergente.

retour à l'exercice

3. Etant donné que

$$\forall x \in \left]0,1\right], \quad \tan(\arccos(x)) = \frac{\sin(\arccos(x))}{\cos(\arccos(x))} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$
$$= \frac{\sqrt{1-x}\times\sqrt{1+x}}{x} \underset{x\to 1^-}{\sim} 2\sqrt{1-x},$$

on en déduit que

$$\tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{1-\frac{n^a}{1+n^a}} = 2\sqrt{\frac{1}{1+n^a}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{1}{n^a}} = \frac{2}{n^{a/2}}$$

En outre, il est immédiat que
$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \arccos\left(\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$ appartient à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et tend vers $\arccos(1) = 0$ donc $\tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ ce qui nous donne

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^{a/2}}$. Cette dernière suite étant le terme général d'une série positive et étant convergente si et seulement si $\dfrac{a}{2} > 1 \Leftrightarrow a > 2$, on en déduit que la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement $a > 2$. retour à l'exercice

4. En utilisant l'écriture exponentielle et les développements limités, on a

$$\begin{aligned}
u_n &= \exp\left(n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^a}\right)\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{2n^{2a}}+o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(n\left(-\frac{1}{2n^{2a}}+o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)+o\left(-\frac{1}{2n^{2a}}+o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(-\frac{1}{2n^{2a-1}}+o\left(\frac{1}{n^{2a-1}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Etant donné que

$$-\frac{1}{2n^{2a-1}} + o\left(\frac{1}{n^{2a-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2a-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2n^{2a-1}} + o\left(\frac{1}{n^{2a-1}}\right)\right) = -\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{2a-1}}$$

on en déduit que

- si $2a-1>0$ (resp. $2a-1=0$) alors $u_n \to \exp(0)=1\neq 0$ (resp. $u_n \to \exp\left(-\frac{1}{2}\right)\neq 0$) et la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.

- si $2a-1<0$ alors $u_n \to 0$. Dans ce cas, puisque
$\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^{1-2a}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{2a-1}}\right)$ on a

$$\begin{aligned} n^2 u_n &= \exp\left(2\ln(n) - \frac{1}{2n^{2a-1}} + o\left(\frac{1}{n^{2a-1}}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2n^{2a-1}} + o\left(\frac{1}{n^{2a-1}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_n$ étant le terme général d'une série absolument convergente (de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), on en déduit que la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente (donc convergente). retour à l'exercice

5. En utilisant l'écriture exponentielle et les développements limités, on a $u_n = \exp\left(n^2 \ln\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)\right)$ donc

$$\ln n(u_n) = n^2 \ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right) = n^2 \ln\left(\frac{1+\dfrac{a}{n}}{1+\dfrac{b}{n}}\right)$$

$$= n^2\left(\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{b}{n}\right)\right)$$

$$= n^2\left[\left(\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{b}{n} - \frac{b^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
\ln(u_n) &= n^2\left[\frac{a-b}{n}-\frac{a^2-b^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&= (a-b)n-\frac{(a^2-b^2)}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\\
\Rightarrow u_n &= \exp\left((a-b)n-\frac{a^2-b^2}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= (\exp(a-b))^n\exp\left(-\frac{a^2-b^2}{2}\right)\underbrace{\exp(\overbrace{o(1)}^{\to 0})}_{\to 1}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} (\exp(a-b))^n\exp\left(-\frac{a^2-b^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Cette dernière suite étant positive, la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement la série géométrique

$\sum_n (\exp(a-b))^n \exp\left(-\frac{a^2-b^2}{2}\right)$ ce qui est le cas si et seulement $\exp(a-b) < 1$ (la raison est positive) i.e. si et seulement si $a-b<0$. retour à l'exercice

On utilise la comparaison série-intégrale pour obtenir un équivalent de u_n. Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ qui est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^\times, \quad \forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{dt}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k^\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\Rightarrow \forall n, m \in \mathbb{N}^\times, \quad \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_n^{n+m+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_n^{n+m+1} \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+m+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^\alpha}$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow u_n \leqslant \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}} \leqslant u_n + \frac{1}{n^{\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u_n \leqslant \dfrac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}} \\ \dfrac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}} \leqslant u_n + \dfrac{1}{n^{\alpha}} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u_n \leqslant \dfrac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}} \\ \dfrac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha}} \leqslant u_n \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{(1-\alpha)}{n} \leqslant u_n(1-\alpha)n^{\alpha-1} \leqslant 1$$

En appliquant le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(1-\alpha)n^{\alpha-1} = 1 \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha}}$$

Cette dernière suite étant positive, la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement la série de Riemann $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha}}$ est convergente ce qui est le cas si et seulement $\alpha - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$. retour à l'exercice

1. La fonction $t \mapsto (\ln(t))^\alpha$ étant positive et croissante, on utilise la classique comparaison série-intégrale

$$
\begin{aligned}
\forall k &\in [\![1, n]\!], \quad \forall t \in [k, k+1], \\
(\ln(k))^\alpha &\leqslant (\ln(t))^\alpha \leqslant (\ln(k+1))^\alpha \\
&\Rightarrow \int_k^{k+1} (\ln(k))^\alpha dt \leqslant \int_k^{k+1} (\ln(t))^\alpha dt \leqslant \int_k^{k+1} (\ln(k+1))^\alpha dt \\
&\Leftrightarrow (\ln(k))^\alpha (k+1-k) \leqslant \int_k^{k+1} (\ln(t))^\alpha dt \\
&\leqslant (\ln(k+1))^\alpha (k+1-1) \\
&\Leftrightarrow (\ln(k))^\alpha \leqslant \int_k^{k+1} (\ln(t))^\alpha dt \leqslant (\ln(k+1))^\alpha
\end{aligned}
$$

On additionne alors tous ces encadrements pour $k \in [\![1, n]\!]$ ce qui nous donne pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$(\ln(1))^\alpha + \cdots + (\ln(n))^\alpha \leqslant \int_1^2 (\ln(t))^\alpha dt + \int_2^3 (\ln(t))^\alpha dt +$$

$$\cdots + \int_n^{n+1} (\ln(t))^\alpha dt \leqslant (\ln(2))^\alpha + \cdots + (\ln(n+1))^\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sigma_n(\alpha) \leqslant \int_1^{n+1} (\ln(t))^\alpha dt \leqslant \sigma_{n+1}(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_n(\alpha) \leqslant \displaystyle\int_1^{n+1} (\ln(t))^\alpha dt \\ \displaystyle\int_1^{n+1} (\ln(t))^\alpha dt \leqslant \sigma_{n+1}(\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n \geqslant 1, \quad \sigma_n(\alpha) \leqslant \int_1^{n+1} (\ln(t))^\alpha dt \text{ et}$$

$$\forall m \geqslant 2, \quad \int_1^{m} (\ln(t))^\alpha dt \leqslant \sigma_m(\alpha) \quad (m = n+1 \geqslant 1+1 = 2)$$

$$\Rightarrow (\mathcal{E}) : \forall n \geqslant 2, \quad \int_1^{n} (\ln(t))^\alpha dt \leqslant \sigma_n(\alpha) \leqslant \int_1^{n+1} (\ln(t))^\alpha dt.$$

Evaluons maintenant l'intégrale $\int_1^n (\ln(t))^\alpha dt$ à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^n (\ln(t))^\alpha dt &= \int_1^n 1(\ln(t))^\alpha dt = [t(\ln(t))^\alpha]_{t=1}^{t=n} \\ -\int_1^n t\left(\frac{\alpha}{t}(\ln(t))^{\alpha-1}\right) dt &= n(\ln(n))^\alpha - \alpha\int_1^n (\ln(t))^{\alpha-1} dt.\end{aligned}$$

Vérifions que l'intégrale $\int_1^n (\ln(t))^{\alpha-1} dt$ est négligeable devant $n(\ln(n))^\alpha$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Premier cas $\alpha \geqslant 1$. Puisque $\alpha - 1 \geqslant 0$, on a l'encadrement suivant :

$$\begin{aligned}
\forall t \quad &\in \quad [1, n], \quad 0 \leqslant (\ln(t))^{\alpha-1} \leqslant (\ln(n))^{\alpha-1} \\
&\Rightarrow \quad \int_1^n 0 dt \leqslant \int_1^n (\ln(t))^{\alpha-1} dt \leqslant \int_1^n (\ln(n))^{\alpha-1} dt \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \int_1^n (\ln(t))^{\alpha-1} dt \leqslant (n-1)(\ln(n))^{\alpha-1} \\
&\leqslant \quad n(\ln(n))^{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{=} o(n(\ln(n))^{\alpha})
\end{aligned}$$

Deuxième cas $0 < \alpha < 1$. Puisque $\alpha - 1 < 0$, on dispose de l'encadrement suivant :

$$\forall t \in [e, n], \quad \ln(t) \geqslant 1 \underset{\alpha-1<0}{\Rightarrow} 0 \leqslant (\ln(t))^{\alpha-1} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow \forall n \geqslant 3, \quad \int_e^n 0 dt \leqslant \int_e^n (\ln(t))^{\alpha-1} dt \leqslant \int_e^n dt$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqslant \int_e^n (\ln(t))^{\alpha-1} dt \leqslant n - e \leqslant n \underset{\ln \geqslant 0 \text{ sur } [1,e]}{\Rightarrow}$$

$$0 \leqslant \int_1^e (\ln(t))^{\alpha-1} dt \leqslant \int_1^n (\ln(t))^{\alpha-1} \leqslant n + \int_1^e (\ln(t))^{\alpha-1} dt$$

Ce dernier majorant étant négligeable devant $n(\ln(n))^\alpha$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ puisque $\alpha > 0$.
Par conséquent, on peut affirmer que

$$\int_1^n (\ln(t))^\alpha dt \underset{n\to+\infty}{=} n(\ln(n))^\alpha + o(n(\ln(n))^\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \int_1^n (\ln(t))^\alpha dt \underset{n\to+\infty}{\sim} n(\ln(n))^\alpha, \quad n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

$$\ln(n+1) = \underbrace{\ln(n)}_{\to+\infty} + \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to\ln(1)=0} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

$$\Rightarrow \int_1^{n+1} (\ln(t))^\alpha dt \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)(\ln(n+1))^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} n(\ln(n))^\alpha$$

Les équivalents précédent et l'encadrement $(\mathcal{E})$ nous permette d'écrire

$$\underbrace{\frac{1}{n(\ln(n))^{\alpha}}\int_{1}^{n}(\ln(t))^{\alpha}dt}_{\to 1} \leqslant \frac{\sigma_n(\alpha)}{n(\ln(n))^{\alpha}}$$

$$\leqslant \underbrace{\frac{1}{n(\ln(n))^{\alpha}}\int_{1}^{n+1}(\ln(t))^{\alpha}dt.}_{\to 1} \underset{\text{th. d'encadrement}}{\Rightarrow}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sigma_n(\alpha)}{n(\ln(n))^{\alpha}} = 1 \Leftrightarrow \sigma_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} n(\ln(n))^{\alpha}.$$

retour à l'exercice

2. Puisque la série $\sum_{n\geqslant 2}(\sigma_n(\alpha))^{-\beta}$ est à termes positifs et que $(\sigma_n(\alpha))^{-\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha(\ln(n))^{\alpha\beta}}$, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 2}(\sigma_n(\alpha))^{-\beta}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n^\alpha(\ln(n))^{\alpha\beta}}$ converge. Cette dernière série étant une série de Bertrand, elle converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\alpha\beta > 1$. ◂ retour à l'exercice

Il s'agit de la série $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{(4n+1)(4n+3)}$. Etant donné que $\dfrac{1}{(4n+1)(4n+3)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{16n^2}$ qui est positif et est le terme général d'une série convergente (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc la série $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{(4n+1)(4n+3)}$ est convergente. Soit $N \in \mathbb{N}$, en remarquant que $\dfrac{1}{2n+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,dt$, on a

$$2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \sum_{n=0}^{N} \left[\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (t^{4n} - t^{4n+2})\,dt = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (1-t^2)(t^4)^n\,dt$$

$$= \int_0^1 (1-t^2) \sum_{n=0}^{N} (t^4)^n\,dt = \int_0^1 (1-t^2)\frac{1-(t^4)^{N+1}}{1-t^4}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1-t^{4N+4}}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^1 \frac{t^{4N+4}}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{t^{4N+4}}{1+t^2}\,dt$$

Montrons maintenant que l'intégrale précédente tend vers 0

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant \frac{t^{4N+4}}{1+t^2} \leqslant t^{4N+4}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{4N+4}}{1+t^2} dt \leqslant \int_0^1 t^{4N+4} dt = \frac{1}{4N+5}$$

L'application du théorème d'encadrement montre que

$\lim\limits_{N\to+\infty} \int_0^1 t^{4N+4} dt = 0$ donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{\pi}{8}$$

retour à l'exercice

1. Il s'agit de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}$.
Etant donné que
$\displaystyle\frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4^4 n^4}$ qui est positif et est le terme général d'une série convergente (Riemann avec $\alpha = 4 > 1$) donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}$ est convergente. En utilisant la décomposition en éléments simples suivante

$$\frac{1}{(4x+1)(4x+2)(4x+3)(4x+4)} = \frac{1}{6(4x+1)} - \frac{1}{2(4x+2)} + \frac{1}{2(4x+3)} - \frac{1}{6(4x+4)}$$

ainsi que la formule $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$, on en déduit que, pour tout entier N,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)} \\
= \quad & \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{N}\left[\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+4}\right]-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\left[\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+3}\right] \\
= \quad & \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{N}\int_0^1 (t^{4n}-t^{4n+3})dt-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}(t^{4n+1}-t^{4n+2})dt \\
= \quad & \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{N}\int_0^1 t^{4n}(1-t^3)dt-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}t^{4n}(t-t^2)dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-t^3)\sum_{n=0}^{N}(t^4)^n dt - \frac{1}{2}\int_0^1 (t-t^2)\sum_{n=0}^{N}(t^4)^n dt$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-t^3)\frac{1-(t^4)^{N+1}}{1-t^4} dt - \frac{1}{2}\int_0^1 (t-t^2)\frac{1-(t^4)^{N+1}}{1-t^4} dt$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (1+t+t^2)\frac{1-(t^4)^{N+1}}{(1+t)(1+t^2)} dt - \frac{1}{2}\int_0^1 t\frac{1-(t^4)^{N+1}}{(1+t)(1+t^2)} dt$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{(1+t)(1+t^2)} dt - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{(1+t)(1+t^2)} t^{4N+4} dt$$

Montrons maintenant que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{(1+t)(1+t^2)} t^{4N+4} dt$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant \frac{(1-t)^2 t^{4N+4}}{(1+t)(1+t^2)} \leqslant t^{4N+4}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^2 t^{4N+4}}{(1+t)(1+t^2)} dt \leqslant \int_0^1 t^{4N+4} dt = \frac{1}{4N+5}$$

L'application du théorème d'encadrement montre que $\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{(1+t)(1+t^2)} t^{4N+4}\,dt = 0$ donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)} \\
= \quad & \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)} \\
= \quad & \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{(1+t)(1+t^2)}\,dt
\end{aligned}$$

On calcule cette dernière intégrale en décomposant en éléments simples la fraction rationnelle ci-dessus. Après calcul, on obtient

$$\frac{(1-t)^2}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{2}{t+1} - \frac{t+1}{t^2+1} = \frac{2}{t+1} - \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2 \cdots}$$

$$\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{(1+t)(1+t^2)}dt = \frac{1}{6}\left[2\ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| - \arctan(t \cdots\right.$$

$$= \frac{1}{4}\ln(2) - \frac{\pi}{24}$$

◂ retour à l'exercice

2. A finir ◂ retour à l'exercice

Il est immédiat que si $a \geqslant 1$ alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a^{1+1/2+\cdots+1/n} \geqslant 1$ donc la série $\sum_n a^{1+1/2+\cdots+1/n}$ est grossièrement divergente. Si $a \in \left]0,1\right[$, en utilisant le classique développement asymptotique de la série harmonique

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1),$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} a^{1+1/2+\cdots+1/n} &= a^{\ln(n)+\gamma+o(1)} = a^{\gamma} a^{\ln(n)} \underbrace{a^{\overbrace{o(1)}^{\to 0}}}_{\to 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} a^{\gamma} a^{\ln(n)} \\ &= a^{\gamma} \exp(\ln(n)\ln(a)) = a^{\gamma} \exp\left(\ln\left(n^{\ln(a)}\right)\right) \\ &= a^{\gamma} n^{\ln(a)} = \frac{a^{\gamma}}{n^{-\ln(a)}} \end{aligned}$$

Cette dernière suite étant positive, la série $\sum_n a^{1+1/2+\cdots+1/n}$ converge si et seulement si la série $\sum_n \frac{a^\gamma}{n^{-\ln(a)}}$ converge. Cette dernière étant une série de Riemann de paramètre $-\ln(a)$, elle converge si et seulement si
$-\ln(a) > 1 \Leftrightarrow \ln(a) < -1 \Leftrightarrow a < e^{-1}$.
Conclusion : la série $\sum a^{1+1/2+\cdots+1/n}$ converge si et seulement si $a < e^{-1}$. retour à l'exercice

1. Un calcul direct nous donne

$$\begin{aligned}
\ln(u_n) &= \ln(1 \times 2 \times \cdots \times n) - \ln(x^n) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - n\ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right) \\
\Rightarrow \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \ln(n+1) - \ln(x) + \ln\left(\ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\right) \\
&= \ln\left[\frac{n+1}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\right]
\end{aligned}$$

Etant donné que $\dfrac{x}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut utiliser le $\mathrm{DL}(0)$ de $\ln(1+u)$.

$$\begin{aligned}
& \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \\
= \quad & \ln\left[\frac{n+1}{x}\left(\frac{x}{n+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n+1}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x}{n+1}\right)^2\right)\right)\right] \\
= \quad & \ln\left[\frac{n+1}{x}\left(\frac{x}{n+1} - \frac{x^2}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] \\
= \quad & \ln\left[1 - \frac{x}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\
= \quad & -\frac{x}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(-\frac{x}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
= \quad & -\frac{x}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{2n}.
\end{aligned}$$

Puisque $-\dfrac{x}{2n} \leqslant 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équivalent précédent nous assure que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} [\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)]$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} -\dfrac{x}{2n} = -\dfrac{x}{2}\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ sont de même nature. Or cette dernière est une série de Riemann divergente donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} [\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)]$ diverge. Cette série étant à termes négatifs à partir d'un certain rang (en raison de l'équivalent obtenu précédemment), on en déduit qu'elle diverge vers $-\infty$. Par conséquent, on a

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)\right]=-\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{N\to+\infty}\left[\ln(u_{N+1})-\ln(u_0)\right]=-\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{N\to+\infty}\ln(u_{N+1})=-\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{N\to+\infty}u_{N+1}=0 \Leftrightarrow \lim_{N\to+\infty}u_N=0$$

retour à l'exercice

2. D'après le calcul précédent, on a

$$
\begin{aligned}
&\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \\
= \;& \ln\left[\frac{n+1}{x}\left(\frac{x}{n+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n+1}\right)^2 + O\left(\left(\frac{x}{n+1}\right)^3\right)\right)\right] \\
= \;& \ln\left[1 - \frac{x}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
= \;& \left(-\frac{x}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + O\left(\left(-\frac{x}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2\right) \\
= \;& -\frac{x}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{x}{2n}.\frac{1}{1+1/n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{x}{2n}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{x}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= -\frac{x}{2}.\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{x}{2}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= -\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\Rightarrow \ln(u_{n+1})-\ln(u_n)+\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ étant à termes positifs et convergente, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left[\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)+\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ est convergente. retour à l'exercice

3. D'après la question précédente, la suite $\left(\sum_{n=1}^{N-1}\left[\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)+\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\right)_N$ est converge vers un réel L. Donnons une écriture simplifiée de cette suite.

Pour tout entier $N \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N-1}\left[\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) + \frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{N-1}[\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)] + \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \ln(u_N) - \ln(u_1) + \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{N-1}[\ln(n+1) - \ln(n)] \\
&= \ln(u_N) - \ln(u_1) + \frac{x}{2}[\ln(N) - \ln(1)] \\
&= .\ln(u_N) - \ln(u_1) + \frac{x}{2}\ln(N) = \ln\left(\frac{u_N}{u_1} \times N^{x/2}\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent, on peut affirmer que:

$$\lim_{N\to+\infty} \ln\left(\frac{u_N}{u_1}\times N^{x/2}\right) = L \Rightarrow \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{u_N}{u_1}\times N^{x/2}\right) = e^L$$

$$\Leftrightarrow \quad u_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{u_1 e^L}{N^{x/2}}$$

et comme $e^l > 0$ et que $u_1 = \dfrac{1!}{x^1}\left(1+\dfrac{x}{1}\right) = 1+\dfrac{1}{x} > 0$, on est assuré que $u_1 e^L > 0$. retour à l'exercice

4. Puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est à valeurs positives, l'équivalent obtenu à la question précédente montre alors qu'elle converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_1 e^L}{N^{x/2}} = u_1 e^L \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{N^{x/2}}$ converge ce qui est le cas si et seulement si $\frac{x}{2} > 1 \Leftrightarrow x > 2$.

retour à l'exercice

1. Etudions pour commencer la convergence absolue de cette série i.e. la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$. On commence par remarquer que pour tout entier n, on a

$$\forall x\in[0,1],\quad \frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{1+x}\leqslant 1 \underset{\times^n\geqslant 0}{\Rightarrow} \frac{x^n}{2}\leqslant\frac{x^n}{1+x}\leqslant x^n$$

$$\underset{0\leqslant 1}{\Rightarrow}\int_0^1 \frac{x^n}{2}dx\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\leqslant\int_0^1 x^n dx$$

$$\Leftrightarrow 0\leqslant\frac{1}{2(n+1)}\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\leqslant\frac{1}{n+1}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ étant une série divergente (série de Riemann avec $\alpha = 1$), on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ est également divergente donc la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ n'est pas absolument convergente.

La suite $\left(\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx\right)_n$ est positive, décroissante et tend vers 0 puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \underset{x^n \geqslant 0}{\Rightarrow} 0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$$
$$\underset{1+x>0}{\Rightarrow} 0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$$
$$\Rightarrow 0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leqslant \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ est convergente.

◂ retour à l'exercice

2. Etudions sa convergence en transformant ses sommes partielles. Pour tout entier N, on a

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n x^n}{1+x}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\left(\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\times\frac{1-(-x)^N}{1-(-x)}dx$$

$$= .\int_0^1 \frac{1-(-x)^N}{(1+x)^2}dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{x^N}{(1+x)^2}dx$$

$$= 1+(-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{x^N}{(1+x)^2}dx.$$

D'après la question précédente, on a $\lim\limits_{N\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^N}{(1+x)^2}dx = 0$ et comme la suite $((-1)^N)_N$ est bornée, on est assuré que $\lim\limits_{N\to+\infty}(-1)^{N+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^N}{(1+x)^2}dx$ ce qui établit la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 1.$$

retour à l'exercice

Il est immédiat que $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ étant une série de Riemann convergente $(\alpha = 2 > 1)$, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$ est convergente.
En utilisant la fameuse formule explicitant la somme des n premiers carrés puis en effectuant la décomposition en éléments simples de la fraction obtenue, on a

$$\frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} = 6\left(\frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1} + \frac{1}{n}\right).$$

Si l'on note $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$, on a pour tout entier N

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}S_N &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \\
&= \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n} - 4\sum_{\substack{3\leqslant p\leqslant 2N+1\\ p \text{ impair}}}\frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{N+1} - 1 + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - 4\sum_{3\leqslant \leqslant p 2N+1}\frac{1}{p} - 4\sum_{\substack{3\leqslant p\leqslant 2N+1\\ p \text{ pair}}}\frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{N+1} - 1 + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - 4\sum_{p=3}^{2N+1}\frac{1}{p} + 4\sum_{3\leqslant 2n\leqslant 2N}\frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N+1} - 1 + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - 4\left(\sum_{p=1}^{2N+1}\frac{1}{p} - \frac{1}{2} - 1\right) + 2\sum_{2\leqslant n\leqslant N}\frac{1}{n}\\
&= \frac{1}{N+1} + 5 + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - 4\sum_{p=1}^{2N+1}\frac{1}{p} + 2\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\frac{1}{n} - 1\right)\\
&= \frac{1}{N+1} + 3 + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - 4\sum_{p=1}^{2N+1}\frac{1}{p} + 2\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\frac{1}{n}\\
&= \frac{1}{N+1} + 3 + 4\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{p=1}^{2N+1}\frac{1}{p}\right)
\end{aligned}$$

En utilisant le classiquement développement asymptotique $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} S_N &\underset{N\to+\infty}{=} \frac{1}{N+1} + 3 + 4\left[\ln(N) + \gamma + o(1)\right] \\
&\quad -4\left[\ln(2N+1) + \gamma + o(1)\right] \\
&\underset{N\to+\infty}{=} \frac{1}{N+1} + 3 + 4\ln\left(\frac{N}{2N+1}\right) + o(1) \\
&\underset{N\to+\infty}{\to} 3 + 4\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + 4\ln(2)
\end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $(S_N)_N$ converge vers $18 - 24\ln(2)$ c'est-à-dire la série $\sum_n \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$ converge et l'on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} = 18 - 24\ln(2).$$

retour à l'exercice