SERIES NUMERIQUES 2

Abdellah BECHATA

Nature de $\sum u_n$ où (u_n) est définie par la récurrence $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ avec $u_0 > 0$. ▸ solution

Soit $a > 0$. Etudier la suite définie par $u_0 > 0$ et
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$
Nature de la série de terme général $u_n - \ell$, où ℓ est la limite de u_n.

▸ solution

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{a_n + u_n + 1}$.

1. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, que dire de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? solution
2. Inversement, si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? solution
3. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la limite ℓ, que peut-on dire de la série $\sum |u_n - \ell|$? solution
4. Si $a_n = \dfrac{1}{n}$, calculer la somme de la série $\sum |u_n - \ell|$. solution

1. Montrer que pour $a > 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^a}.$$

solution

2. En déduire la valeur de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(2n+1)}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)8^n}.$$

solution

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $u_n = (-1)^n \int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et calculer le cas échéant la somme. solution

Soit $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

1. Nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n u_n$. solution
2. Etablir une relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_n$. solution
3. Donner un équivalent de u_n. solution

1. Etudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où
$$u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+\cdots+x^n}.$$ solution

2. Etudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ où
$$v_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^n}dx.$$ solution

On pose $f(x) = \dfrac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{x}$ pour $x \in [1, +\infty[$.

1. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(u)du - f(n)$. solution
2. Etudier la nature de $\sum \dfrac{\cos\left(\sqrt{n}\right)}{n}$. solution

Soit $x \in \,]0, 2\pi[$. On pose $u_n(t) = t^{n-1}e^{inx}$ et $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t)$.

1. Quand la série de terme général $u_n(t)$ converge-t-elle ?
   ▸ solution
2. Pour ls valeurs de t obtenues précédemment, mettre $S_n(t)$ sous la forme $\dfrac{P_n(t)}{Q(t)}$, où P_n et Q sont des polynômes. ▸ solution
3. Soit $I(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(t)dt$. Calculer I puis

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

▸ solution

Convergence de la suite $(u_n)_n$. Puisque $u_0 > 0$, on a immédiatement $u_1 \geqslant 0$ et une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$. En outre, on a

$$u_{n+1} - u_n = \underbrace{u_n}_{\geqslant 0} \underbrace{\left(\overbrace{e^{-u_n}}^{\leqslant 1} - 1\right)}_{\leqslant 0} \leqslant 0$$

donc la suite $(u_n)_n$ est décroissante et elle est minorée par 0 donc elle converge dans $\mathbb{R}$ vers une certaine limite $L \geqslant 0$ vérifiant

$$L = Le^{-L} \Leftrightarrow L(1 - e^{-L}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} L = 0 \\ 1 - e^{-L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = 0 \\ L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L = 0$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.
Convergence de la série $\sum_n u_n$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \exp(-u_n) \Rightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \quad \prod_{n=0}^{N} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \prod_{n=0}^{N} \exp(-u_n) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{u_{N+1}}{u_0} = \exp\left(-\sum_{n=0}^{N} u_n\right) \Rightarrow \lim_{N \to +\infty} \exp\left(-\sum_{n=0}^{N} u_n\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n = +\infty
\end{aligned}$$

Par conséquent, la série $\sum_n u_n$ est divergente. retour à l'exercice

Convergence de (u_n). On introduit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ dont $\mathbb{R}_+^\times$ est un intervalle stable. Puisque $u_0 \in \mathbb{R}_+^\times$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{R}_+^\times$. Déterminons les points fixes de f, le signe de $f(x) - x$ et les variations de f sur $\mathbb{R}_+^\times$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x \Leftrightarrow x^2 + a = 2x^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 = a \underset{x \geqslant 0}{\Leftrightarrow} x = a \\
f(x) - x &\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{a - x^2}{2x} \geqslant 0 \underset{x \geqslant 0}{\Leftrightarrow} x^2 \leqslant a \underset{x \geqslant 0}{\Leftrightarrow} 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{a} \\
f'(x) &\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2} \leqslant 1 \\
&\Leftrightarrow a^2 \leqslant x^2 \underset{x, a \geqslant 0}{\Leftrightarrow} a \leqslant x
\end{aligned}$$

On en déduit le tableau suivant :

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)-x$		$+$		$-$	

Premier cas $u_0 \in \left[\sqrt{a}, +\infty\right[$: Etant donné que $u_0 \in \left[\sqrt{a}, +\infty\right[$ qui est un intervalle stable par f, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[\sqrt{a}, +\infty\right[$. En outre, la fonction $x \mapsto f(x) - x$ étant négative sur cet intervalle, on peut affirmer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante $(u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leqslant 0)$. Puisque cette suite est minorée par $\sqrt{a}$, on en déduit qu'elle converge vers un point fixe de f appartenant à $\left[\sqrt{a}, +\infty\right[$ c'est-à-dire vers $\sqrt{a}$.

Deuxième cas $u_0 \in \left]0, \sqrt{a}\right[$: Etant donné que $u_0 \in \left]0, \sqrt{a}\right[$, on a $u_1 = f(u_0) \in f\left(\left]0, \sqrt{a}\right[\right) = \left]\sqrt{a}, +\infty\right[\subset \left[\sqrt{a}, +\infty\right[$ ce qui nous ramène au cas précédent et la suite $(u_n)_n$ converge également vers $\sqrt{a}$.

Convergence de la série $\sum\limits_n \left(u_n - \sqrt{a}\right)$. D'après le raisonnement

précédent, on a $\forall n \geqslant 1, \quad u_1 \geqslant \sqrt{a}$. Estimons la différence $u_n - \sqrt{a}$. Pour tout entier n, on a :

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{u_n^2 + a - 2\sqrt{a}}{2u_n} \\
&= \frac{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2}{2u_n} \leqslant \frac{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2}{2\sqrt{a}} \\
&\Leftrightarrow \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \leqslant \frac{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2}{\left(2\sqrt{a}\right)^2} = \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^2.
\end{aligned}$$

La suite $(u_n)_n$ converge vers $\sqrt{a}$, on est assuré de l'existence d'un rang N tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad 0 \leqslant \frac{u_N - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \leqslant \frac{1}{2}$$

ce qui nous permet d'écrire pour tout $n \geqslant N$:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \frac{u_n - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \leqslant \left(\frac{u_{n-1} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^2 \leqslant \left(\left(\frac{u_{n-2} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^2\right)^2 \\ &= \left(\frac{u_{n-2} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^4 \leqslant \left(\left(\frac{u_{n-3} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^4\right)^2 = \left(\frac{u_{n-3} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^8 \end{aligned}$$

$$\leqslant \quad \cdots \leqslant \left(\frac{u_{n-(n-N)} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-N}} = \left(\frac{u_N - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-N}}$$

$$\leqslant \quad \frac{1}{2^{2^{n-N}}} \leqslant \frac{1}{2^{n-N}} \text{ (car, par récurrence sur } k \geqslant 1, \text{ on a } 2^k \geqslant k)$$

La série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{2^{n-N}} = 2^N \sum_n \frac{1}{2^n}$ est convergente (série géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in \left]-1, 1\right[$) ce qui nous assure la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)$ donc de la série $\displaystyle\sum_n \left(u_n - \sqrt{a}\right)$. retour à l'exercice

1. Supposons que la suite $(u_n)_n$ vers un réel L alors pour tout entier, on a :

$$\frac{1}{u_{n+1}} = a_n + u_n + 1 \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{u_{n+1}} - u_n - 1.$$

Si $L \neq 0$ alors $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{L} - L - 1$ donc la suite $(a_n)_n$ converge. Si $L = 0$ alors $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (puisque la suite $(u_n)_n$ est strictement positive). Par conséquent, si la suite (u_n) converge alors $(a_n)_n$ converge ou bien diverge vers $+\infty$.

retour à l'exercice

2. Commençons par remarquer que $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
Etudions la monotonie de la suite $(u_n)_n$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{a_n + u_n + 1} - u_n \underset{u_n, a_n \geqslant 0}{=} \frac{1 - u_n(a_n + u_n + 1)}{a_n + u_n + 1} \leqslant 0 \\
u_{n+1} &= \frac{1}{a_n + \dfrac{1}{a_{n-1} + u_{n-1+1}} + 1} \\
&= \frac{a_{n-1} + u_{n-1}}{(a_{n-1} + u_{n-1} + 1)(a_n + 1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} &= a_n + u_n + 1 - (a_{n-1} + u_{n-1} + 1) \\
&= a_n - a_{n-1} + u_n - u_{n-1} \\
u_{n+1} &= \frac{1}{L + 1 + u_n + o(1)} \\
u_{n+1} - u_n &= \frac{a_{n-1} - a_n + u_{n-1} - u_n}{(1 + a_n + u_n)(1 + a_{n-1} + u_{n-1})}
\end{aligned}$$

donc la suite $(u_n)_n$ est décroissante et positive donc elle converge. retour à l'exercice

3. A finir retour à l'exercice
4. A finir retour à l'exercice

1. On commence par remarquer que

$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad \dfrac{1}{1+\alpha} = \displaystyle\int_0^1 x^\alpha dx$ donc pour tout entier N, on a

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{an+1} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 x^{an} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{an} dx$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-x^a)^n \, dx = \int_0^1 \frac{1-(-x^a)^{N+1}}{1+x^a} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^a} - (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{x^{a(N+1)}}{1+x^a} dx.$$

$$\left|(-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{x^{a(N+1)}}{1+x^a}dx\right| = \int_0^1 \frac{x^{a(N+1)}}{1+x^a}dx \leqslant \int_0^1 x^{a(N+1)}dx$$

$$= \frac{1}{a(N+1)+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{an+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^a}$$

ce qui entraine la convergence de la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{an+1}$ et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{an+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^a}$.

retour à l'exercice

2. D'après la question précédente, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p+1} = -\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} = -\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

$$= -\left[\ln|1+x|\right]_{x=0}^{x=1} = -\ln(2)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\right) - \frac{(-1)^0}{2\times 0+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - 1$$

$$= \left[\arctan(x)\right]_{x=0}^{x=1} - 1 = \frac{\pi}{4} - 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}\right) - \frac{(-1)^0}{3\times 0+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} - 1$$

Pour calculer cette dernière intégrale de fractions rationnelles, on utilise la décomposition en élements simples. Le polynôme $X^3 + 1$ admet -1 pour racine évidente simple donc il se factorise par $X + 1$. En effectuant la division euclidienne de $X^3 + 1$ par $X + 1$, on obtient

$$X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1).$$

Le polynôme $X^2 - X + 1$ étant du second degré à coefficients réels avec $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$, on en déduit qu'il est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$. Par conséquent, il existe trois réels a, b, c tels que

$$(\mathcal{E}) : \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}.$$

En multipliant cette relation par $x+1$ puis en faisant tendre x vers -1, on en déduit que

$$\frac{x+1}{x^3+1} = \frac{x-(-1)}{x^3-(-1)^3} \underset{x\to -1}{\longrightarrow} \frac{1}{(x^3)'_{|x=-1}} = \frac{1}{3},$$

$$a + \frac{(bx+c)(x+1)}{x^2-x+1} \underset{x\to -1}{\longrightarrow} a$$

donc $a = \dfrac{1}{3}$. D'autre part en multipliant la relation par x puis en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient

$0 = a + b \Leftrightarrow b = -\dfrac{1}{3}$ et en évaluant la relation $(\mathcal{E})$ en $x = 0$, on obtient $1 = a + c \Leftrightarrow c = \dfrac{2}{3}$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} 3\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} + \int_0^1 \left(\frac{-\frac{1}{2}(2x-1) + \frac{3}{2}}{x^2-x+1} \right) dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\ln|1+x|\right]_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \ln(2) - \frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2-x+1\right|\right]_{x=0}^{x=1} + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}
\end{aligned}
$$

$$= \ln(2) + \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} dx}{\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]}$$

$$= \ln(2) + \sqrt{3} \left[\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \ln(2) + \sqrt{3} \left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \ln(2) + 2\sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \ln(2) + 2\sqrt{3} \times \frac{\pi}{6}$$

$$= \ln(2) + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - 1$$

Pour la quatrième somme, on remarque que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(2n+1)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{3}{3n+1} - \frac{2}{2n+1}\right] \\ &= 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \\ &= \ln(2) + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

car toutes les séries considérées sont convergentes.
Pour la dernière série, en suivant un argumentaire absolument

similaire qu'à la question 1, on a

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(3n+1)8^n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{8^n} \int_0^1 x^{3n} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{x^3}{8}\right)^n dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1-\left(\frac{x^3}{8}\right)^{N+1}}{1-\frac{x^3}{8}} dx = \int_0^1 \frac{1}{1-\frac{x^3}{8}} dx - \underbrace{\frac{1}{8^{N+1}}}_{\to 0} \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{3(N+1)}}{1-\frac{x^3}{8}} dx}_{\to 0}$$

donc la série $\sum_n \frac{1}{(3n+1)8^n}$ converge et sa somme S vaut :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)8^n} = \int_0^1 \frac{1}{1-\frac{x^3}{8}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+\left(-\frac{x}{2}\right)^3}$$

$$\underset{t=-x/2}{=} -2\int_0^{-1/2} \frac{dt}{1+t^3} = 2\int_{-1/2}^{0} \frac{dt}{1+t^3}$$

donc

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2}S &= \left[\ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln\left|t^2-t+1\right| + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-1/2}^{0} \\
&= \sqrt{3}\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{4}\right) \\
&\quad -\sqrt{3}\arctan\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right) \\
&= -\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\ln(7) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}
$$

retour à l'exercice

Pour tout entier N, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \int_0^1 x^n f(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n f(x)dx \\ &= \int_0^1 f(x) \sum_{n=0}^{N}(-x)^n dx = \int_0^1 f(x)\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx + (-1)^N \int_0^1 \frac{x^{N+1}f(x)}{1+x}dx.\end{aligned}$$

La fonction f étant continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée donc $M = \sup_{[0,1]} |f|$ existe ce qui nous permet d'écrire pour tout entier N :

$$\begin{aligned}
\left|(-1)^N \int_0^1 \frac{x^{N+1} f(x)}{1+x} dx\right| &= \left|\int_0^1 \frac{x^{N+1} f(x)}{1+x} dx\right| \leqslant \int_0^1 \frac{|x|^{N+1} |f(x)|}{|1+x|} dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{N+1} |f(x)|}{1+x} dx \leqslant \int_0^1 x^{N+1} M dx \\
&= M \left[\frac{x^{N+1}}{N+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{M}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on est assuré que $\lim\limits_{N \to +\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{N} u_n \right) = \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx$

c'est-à-dire la série $\sum\limits_n u_n$ converge et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx.$$

◂ retour à l'exercice

1. On commence par remarquer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ est positive, continue sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\frac{1}{(1+t^3)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3n}}.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3n}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (intégrale de Riemann avec $3n \geqslant 3 > 1$) donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ l'est aussi. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ étant continue sur le segment $[0,1]$, elle est intégrable sur $[0,1]$ donc sur $\mathbb{R}_+$.

Supposons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$ converge. Etant donné que pour tout entier n, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{(1+t^3)^n} \right| dt = \sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$$

converge, on est assuré que la fonction $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}.$$

Or pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+^\times$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(1+t^3)^n} &= \frac{1}{1+t^3} + \frac{1}{(1+t^3)^2} + \frac{1}{(1+t^3)^3} + \cdots \\
&= \frac{1}{1+t^3}\left[1 + \frac{1}{1+t^3} + \frac{1}{(1+t^3)^2} + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{1+t^3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} \\
&= \frac{1}{1+t^3}.\frac{1}{1-\frac{1}{1+t^3}} = \frac{1}{t^3}
\end{aligned}$$

car il s'agit d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{1+t^3} \in \left]-1,1\right[$. Or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3} = f(t)$ n'est pas intégrable sur $\left]0,1\right[$ (intégrale de Riemann avec $3 > 1$) donc f

n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ceci est absurde donc la série $\sum_n u_n$ diverge.

Etablissons la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n$. En effet, pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned}
\forall n &\geqslant 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant \frac{1}{1+t^3} \leqslant 1 \underset{\times(1+t^3)^{n-}\geqslant 0}{\Rightarrow} \\
&\leqslant \frac{1}{(1+t^3)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{(1+t^3)^n} \Rightarrow \\
0 &\leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^{n+1}} \leqslant \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^3)^n}.
\end{aligned}$$

donc la suite $(u_n)_n$ est positive et décroissante. Etablissons mainteant que la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall t > 0, \quad 0 \leqslant \frac{1}{(1+t^3)^n} \leqslant \frac{1}{1+t^3},$$

$$\forall t > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} = 0 \quad (1+t^3 > 1).$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^3}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et indépendante de n, le théorème de convergence dominé s'applique donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n} = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} 0 dt = 0.$$

Ainsi la série $\sum_n (-1)^n u_n$ satisfait à tous les hypothèses du théorème des séries alternées donc elle converge. ◂ retour à l'exercice

2. Pour tout entier n et tout $X \geqslant 0$, une intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned}
\int_0^X \frac{dt}{(1+t^3)^n} &= \int_0^X 1.\frac{1}{(1+t^3)^n}\,dt \\
&= \left[t.\frac{1}{(1+t^3)^n}\right]_{t=0}^{t=X} - \int_0^X t.\frac{n(-3t^2)}{(1+t^3)^{n+1}}\,dt \\
&= \frac{X}{(1+X^3)^n} + 3n\int_0^X \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{X}{(1+X^3)^n} + 3n\int_0^X \frac{(1+t^3)-1}{(1+t^3)^{n+1}}dt$$

$$= \frac{X}{(1+X^3)^n} + 3n\left(\int_0^X \frac{dt}{(1+t^3)^n} - \int_0^X \frac{dt}{(1+t^3)^{n+1}}\right).$$

En faisant tendre X vers $+\infty$ (ce qui est licite puisque les intégrales u_n et u_{n+1} convergent et que $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{(1+X^3)^n} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{X^{3n}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X^{3n-1}} = 0$ car $3n-1>0$), on en déduit que

$$u_n = 3n\left(u_n - u_{n+1}\right) \Leftrightarrow 3nu_{n+1} = (3n-1)u_n$$

$$\underset{n>0}{\Leftrightarrow} u_{n+1} = \left(1-\frac{1}{3n}\right)u_n$$

retour à l'exercice

3. On pose $v_n = \ln\left(n^\alpha u_n\right)$ alors la suite $(v_n)_n$ converge si et seulement si la série $\sum_n (v_{n+1} - v_n)$ converge. Or on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln\left(\frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{(n+1)^\alpha u_n}\right) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1-\frac{1}{3n}\right)\right) \\ &= \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n}\right) \\ &= \alpha\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{\alpha - 1/3}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Si $\alpha - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}$ alors $v_{n+1} - v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ étant à termes positifs et convergente, on en déduit que la série $\sum_n (v_{n+1} - v_n)$ donc la suite $(v_n)_n$ converge. Soit $L \in \mathbb{R}$ sa limite alors

$$n^{1/3} u_n = \exp(v_n) \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} \exp(L) > 0 \Leftrightarrow u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\exp(L)}{n^{1/3}}.$$

◂ retour à l'exercice

1. Pour tout entier n, on a

$$\forall x \in [0,1], \quad \underbrace{1+x+x^2+\cdots+x^n}_{(n+1)\text{ termes}} \leqslant \underbrace{1+1+\cdots+1}_{=(n+1)\text{ termes}}$$

$$= (n+1) \Rightarrow \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^n} \geqslant \frac{1}{(n+1)}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x+\cdots+x^n} \geqslant \int_0^1 \frac{dx}{n+1} = \frac{1}{n+1} \geqslant 0.$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1} = \sum_{p\geqslant 1} \frac{1}{p}$ étant divergente et à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_n u_n$ diverge également. retour à l'exercice

2. On remarque que pour tout entier n, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{1-x^{n+1}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n}{1-x^{n+1}}(1-x)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{n+1}\ln\left|1-x^{n+1}\right|(1-x)\right]_{x=0}^{x=1} \\ &\quad + \int_0^1 \frac{1}{n+1}\ln\left|1-x^{n+1}\right|\,dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln(1-x^{n+1})dx$$

$$\underset{t=x^{n+1}}{=} \frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln(1-t)\frac{t^{1/(n+1)-1}}{n+1}dt$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}\int_0^1 t^{1/(n+1)}\frac{\ln(1-t)}{t}dt.$$

Etant donné que pour tout entier $n \geqslant 0$, la fonction $f_n : t \mapsto t^{1/(n+1)}\dfrac{\ln(1-t)}{t}$ est continue sur $]0,1[$ et que

$$f_n(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{1/(n+1)}\left(-\frac{t}{t}\right) = -t^{1/(n+1)} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0,$$

on en déduit que la fonction f_n se prolonge continûment sur $[0,1[$. En outre, on dispose de l'équivalent suivant $f_n(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} -\ln(1-t)$.La fonction $t \mapsto -\ln(1-t)$ étant positive sur $[0,1[$ et intégrable sur cet intervalle (car l'une de ses primitives est $t \mapsto (1-t)\ln(1-t)+t$ qui possède une limite finie lorsque $t \to 1^-$ d'après les croissances comparées), on en déduit que la fonction f_n est aussi intégrable sur $[0,1[$. D'autre part, on dispose de la domination suivante :

$$\begin{aligned}\forall n &\geqslant 0, \quad \forall t \in]0,1[, \quad |f_n(t)| = -f_n(t) \\ &= \underbrace{t^{1/(n+1)}}_{\leqslant 1}\underbrace{(-\ln(1-t))}_{\geqslant 0} \leqslant -\ln(1-t).\end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto -\ln(1-t)$ est positive, indépendante de n et intégrable sur $]0,1[$ car l'intégrale

$$\int_0^1 -\ln(1-t)dt \underset{x=1-t}{=} \int_1^0 \ln(t) = -\int_0^1 \ln(t)dt$$

converge (la fonction ln étant continue sur $]0,1[$ possède la fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$ pour primitive et cette dernière possède une limite finie lorsque $x \to 0$). Pour finir, pour tout

$t \in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = -\ln(1-t)$ donc on peut affirmer que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt &= \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_0^1 -\ln(1-t)dt \\
&= -\int_0^1 \ln(t) = -\lim_{x\to 0} \left[t\ln(t) - t\right]_{x=x}^{t=1} \\
&= -\lim_{t\to 0} (-1 - t\ln(t) + t) = 1 \\
&\Rightarrow \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ étant une série à termes positifs et convergente (série de Riemann avec $2>1$), on en déduit que la série $\sum_n v_n$ converge également.

retour à l'exercice

1. Etant donné que la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{x}$ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, nous allons transformer l'expression de u_n via une intégration par parties

$$
\begin{aligned}
u_n &= \int_{n-1}^{n} f(u)du - \int_{n-1}^{n} f(n)du = \int_{n-1}^{n} 1.\left(f(u) - f(n)\right) du \\
&= \left[\left(u - (n-1)\right)\left(f(u) - f(n)\right)\right]_{u=n}^{u=n+1} \\
&\quad - \int_{n-1}^{n} \left(u - (n+1)\right) f'(u)du
\end{aligned}
$$

$$= -\int_{n-1}^{n} (u-(n-1))\left(-\frac{1}{2\sqrt{u}}.\sin\left(\sqrt{u}\right).\frac{1}{u}-\frac{\cos\left(\sqrt{u}\right)}{u^2}\right)du$$

$$= \int_{n-1}^{n} (u-(n-1))\left(\frac{\sqrt{u}\sin\left(\sqrt{u}\right)+2\cos\left(\sqrt{u}\right)}{2u^2}\right)du.$$

On en déduit que

$$\forall n \geqslant 2, \quad \forall u \in [n-1,n], \quad 0 \leqslant u-(n-1) \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$|u_n| \leqslant \int_{n-1}^{n} |u-(n-1)| \frac{\left|\sqrt{u}\sin\left(\sqrt{u}\right)+2\cos\left(\sqrt{u}\right)\right|}{\left|2u^2\right|}du$$

$$\leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\left|\sqrt{u}\sin\left(\sqrt{u}\right)\right| + \left|2\cos\left(\sqrt{u}\right)\right|}{2u^2} du \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\sqrt{u}+2}{2u^2} du$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \geqslant 5, \quad \forall u \in [n-1, n], \quad \sqrt{u} \geqslant \sqrt{n-1} \geqslant \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{aligned} |u_n| &\leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{2\sqrt{u}}{2u^2} du = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{u^{3/2}} du = \left[-\frac{u^{-1/2}}{2}\right]_{u=n-1}^{u=n} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

La série

$$\sum_{n \geqslant 5} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n \geqslant 5}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

étant à termes positifs et convergente (car la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_n$ converge), on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 5} |u_n|$ converge donc la série $\sum_{n\geqslant 5} u_n$ converge d'où la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$. retour à l'exercice

2. Etant donné que l'on a

$$\forall N \geqslant 2, \quad \sum_{n=2}^{N} u_n = \sum_{n=2}^{N} \left(\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \right)$$
$$= \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)dt - \sum_{n=2}^{N} f(n) = \int_{1}^{n} f(t)dt - \sum_{n=2}^{N} f(n)$$

et que la suite $\left(\sum_{n=2}^{N} u_n\right)_n$ converge (puisque la série $\sum_n u_n$ converge) alors la suite $\left(\sum_{n=2}^{N} f(n)\right)_N$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^N f(t)dt\right)_N$ converge. Autrement dit, la série $\sum_n f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^N f(t)dt\right)_N$

converge. A l'aide d'une intégration par parties, on a :

$$\int_1^N \frac{\cos\left(\sqrt{u}\right)}{u} du = \int_1^N \frac{2}{\sqrt{u}} \left(\frac{1}{2\sqrt{u}} \cos\left(\sqrt{u}\right) \right) du$$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{u}} \sin\left(\sqrt{u}\right) \right]_{u=1}^{u=N} - \int_1^N - \frac{1}{u^{3/2}} . \sin\left(\sqrt{u}\right) du$$

$$= \frac{2\sin\left(\sqrt{N}\right)}{\sqrt{N}} - 2\sin(1) + \int_1^N \frac{\sin\left(\sqrt{u}\right)}{u^{3/2}} du.$$

La fonction $g : u \mapsto \dfrac{\sin\left(\sqrt{u}\right)}{u^{3/2}}$ étant continue sur $[1, +\infty[$ avec $\forall u \geqslant 1, \quad |g(u)| \leqslant \dfrac{1}{u^{3/2}}$ et la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^{3/2}}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$, on en déduit que la fonction g est également intégrable sur $[1,+\infty[$. Par conséquent, la suite $\left(\displaystyle\int_1^N \frac{\sin\left(\sqrt{u}\right)}{u^{3/2}}du\right)_N$ converge vers $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{u}\right)}{u^{3/2}}du$ et la suite $\left(\dfrac{2\sin\left(\sqrt{N}\right)}{\sqrt{N}} - 2\sin(1)\right)_N$ convergeant vers $-2\sin(1)$ (car la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{N}}\right)_N$ tend vers 0 et la suite $\left(2\sin\left(\sqrt{N}\right)\right)_N$ est bornée), on en déduit que la suite $\left(\displaystyle\int_1^N \frac{\cos\left(\sqrt{u}\right)}{u}du\right)_N$ converge. On est ainsi assuré de la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \frac{\cos\left(\sqrt{n}\right)}{n}$.

retour à l'exercice

1. Soit $t \in \mathbb{R}$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad u_n(t) = \left(te^{in}\right)^{n-1} e^{ix} \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} u_n(t)$$
$$= e^{ix} \sum_{n\geqslant 1} \left(te^{ix}\right)^{n-1} = e^{ix} \sum_{n\geqslant 0} \left(te^{ix}\right)^{n}.$$

Etant donné que la série géométrique $\sum_n q^n$ (de raison complexe q) converge si et seulement si $|q| < 1$, on en déduit que la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si $\left|te^{ix}\right| < 1 \Leftrightarrow |t| < 1.$ retour à l'exercice

2. Lorsque $|t| < 1$ alors $\left|te^{ix}\right| = |t| < 1$ donc $te^{ix} \neq 1$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent, lorsque $0 < |t| < 1$, on a

$$\begin{aligned} S_n(t) &= e^{ix} \sum_{k=1}^{n} \left(te^{ix}\right)^{k-1} = e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} \left(te^{ix}\right)^{k} = e^{ix}.\frac{1-\left(te^{ix}\right)^n}{1-te^{ix}} \\ &= e^{ix}.\frac{1-t^n e^{inx}}{1-te^{ix}}. \end{aligned}$$

retour à l'exercice

3. Pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 S_n(t)dt &= \int_0^1 e^{ix}.\frac{1-t^n e^{inx}}{1-te^{ix}}dt \\ &= e^{ix}\int_0^1 \frac{dt}{1-te^{ix}} - e^{i(n+1)x}\int_0^1 \frac{t^n}{1-te^{ix}}dt.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \frac{t^n}{1-te^{ix}}dt\right| &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{t^n}{1-te^{ix}}\right| dt = \int_0^1 \frac{|t^n|}{|1-te^{ix}|}dt \\
&= \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2-2t\cos(x)}}dt \\
&= \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{(t-\cos(x))^2+\sin^2(x)}}
\end{aligned}$$

Lorsque $x \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ alors $\sin(x) \neq 0$ et l'on a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \frac{t^n}{1-te^{ix}}dt\right| &\leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{\sin^2(x)}}dt = \frac{1}{|\sin(x)|}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{1}{(n+1)\,|\sin(x)|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Lorsque $x = \pi$ alors $\sin(x) = 0$ et $\cos(x) = -1$ ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{t^n}{1 - te^{i\pi}} dt \right| &= \left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \\ &\leqslant \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, quel que soit $x \in [0, 2\pi]$, on est assuré que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(t)\,dt = e^{ix} \int_0^1 \frac{dt}{1 - te^{it}}.$$

$$\Rightarrow I(x) = e^{ix} \int_0^1 \frac{dt}{1 - te^{it}}.$$

Pour calculer $I(x)$, on utilise pour commencer la quantité conjuguée

$$\begin{aligned}
e^{-ix}I(x) &= \int_0^1 \frac{1-te^{-ix}}{\left(1-te^{ix}\right)\left(1-te^{-ix}\right)}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-t\cos(x)+it\sin(x)}{1+t^2-2t\cos(x)}dt \\
&= \underbrace{\int_0^1 \frac{1-t\cos(x)}{1+t^2-2t\cos(x)}dt}_{=J} \\
&\quad +i\sin(x)\underbrace{\int_0^1 \frac{t}{1+t^2-2t\cos(x)}dt}_{=K}
\end{aligned}$$

Calculons chacune de ces intégrales par primitivation **A finir**

retour à l'exercice