SERIES NUMERIQUES REELLES

Abdellah BECHATA

Nature des séries de terme général :

1. $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$. solution
2. $\cos\left(\pi n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$. solution
3. $\sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$. solution

Nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^{2/3}+\cos n}$. ▸ solution

Nature des séries de termes généraux $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha+(-1)^n}} \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+)$

solution

Nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ solution

Etudier la convergence de la série $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + 2(-1)^n n^\beta}$ selon les valeurs de $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^\times)^2$. solution

Soit $\alpha > 0$; on pose $a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^\alpha$.

1. Trouver un équivalent de a_n
   Indication : *On pourra découper la somme selon les pairs et les impairs.* ▸ solution
2. Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$. ▸ solution

1. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{E\left(\sqrt{n}\right)}}{n}$. solution
2. Même question avec $v_n = \dfrac{(-1)^{E(\ln n)}}{n}$. solution

Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2n+2k}{2n+2k-1}$.

solution

Soit $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$. Trouver la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{u_n^2}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{u_n}$. solution

Nature des séries $\sum P_n$ et $\sum(-1)^n P_n$, où
$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right).$$ solution

Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \to +\infty} f(x) - \ln(x) = 0$ et

$$\forall x > -1, \quad f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x+1}$$

1. Prouver que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ a une limite finie γ lorsque $n \to +\infty$. ▸ solution
2. Prouver que $\forall x > -1, \quad f(x) = -\gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$.
   ▸ solution
3. Montrer que f est monotone et concave. ▸ solution

Nature des séries de terme général

$$u_n = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{6} \ (\alpha > 0).$$ solution

On pose $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$ et $v_n = (-1)^n u_n$.

1. Montrer que $\sum u_n$ diverge et que $\sum v_n$ converge. ▸ solution
2. Trouver un équivalent de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. ▸ solution
3. Montrer que $S_{2n} - S_n = \ln(2)\ln(n) + \dfrac{(\ln(2))^2}{2} + o(1)$.
   ▸ solution
4. Soit $T_n = \sum\limits_{k=2}^{n} v_k$; calculer $S_{2n} + T_{2n}$ puis en déduire la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$. ▸ solution

On pose $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ et l'on note R_n le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$.

1. Etudier la convergence de la série $\sum R_n$ lorsque $\alpha > 1$ puis lorsque $\alpha = 1$.
   Indication : *dans ce dernier cas, on pourra exploiter la convexité de* $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$. ▸ solution
2. Etudier la convergence de la série $\sum R_n$ lorsque $0 < \alpha < 1$
   Indication : *on pourra utiliser la convexité de* $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$)
   ▸ solution

On pose $a_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Vérifier que a_n est bien défini, justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ puis calculer sa somme. ▸ solution

Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ les suites réelles définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k a_{n-k}.$$

Etudier la nature des séries de termes généraux a_n et b_n. Que peut-on en conclure ? solution

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels. On pose $b_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$.

1. Montrer que si la suite (a_n) converge, alors la suite (b_n) converge. solution
2. Montrer que si la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n$ converge, alors la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} b_n$ converge, les sommes étant les mêmes. solution

1. On utilise les développements asymptotiques pour obtenir un équivalent $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+1} &= \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \\
&\underset{n\geqslant 0}{=} n\left(1+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\
&= n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Compte-tenu de la formule

$$\begin{aligned}
\sin(x+n\pi) &= \sin(x)\cos(n\pi)+\cos(x)\sin(n\pi) \\
&= \sin(x)\cos(n\pi) = (-1)^n\sin(x)
\end{aligned}$$

et du développement asymptotique précédent, on a

$$
\begin{aligned}
\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) &= \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= (-1)^n [\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + O\left(\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^3\right) \\
&= (-1)^n \left[\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \\
&= (-1)^n \left[\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] = \frac{(-1)^n\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}
$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \pi}{2n}$ étant une série alternée avec $\left|(-1)^n \frac{\pi}{2n}\right| = \frac{\pi}{2n} \underset{n\to+\infty}{\downarrow} 0$, le critère spécial s'applique donc elle est convergente. En outre, la série $\sum_n \frac{1}{n^3}$ étant à termes positifs et convergente, les relations de comparaison assure que la série $\sum_n O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ est convergente donc la série $\sum_n \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ est convergente. retour à l'exercice

2. On procède de la même façon.

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$\Rightarrow \pi n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\pi n-\frac{\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Compte-tenu de la formule

$$\begin{aligned}\cos(x+n\pi) &= \cos(x)\cos(n\pi)-\sin(x)\sin(n\pi)\\ &= \cos(x)\cos(n\pi)=(-1)^n\cos(x)\end{aligned}$$

et du développement asymptotique précédent, on a

$$\begin{aligned}
\cos\left(\pi n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) &= \cos\left(\pi n - \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= (-1)^n \left[\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2\right)\right] \\
&= (-1)^n \left[\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = (-1)^n \left[\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= \frac{(-1)^n \pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Comme dans la question, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n \pi}{2n}$ est convergente et la série $\sum_n \dfrac{1}{n^3}$ étant à termes positifs et convergente, les relations de comparaison assure que la série $\sum_n O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ est convergente donc la série $\sum_n \cos\left(\pi n^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$ est convergente. retour à l'exercice

3. On exploite l'astuce suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{N}.$$

En effet, en utilisant la formule du binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}
& \left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n} \\
= \; & \left(\sqrt{3}+2\right)^{n}+\left(-\sqrt{3}+2\right)^{n} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sqrt{3}\right)^{k}2^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-\sqrt{3}\right)^{k}2^{n-k} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sqrt{3}\right)^{k}2^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}\left(\sqrt{3}\right)^{k}2^{n-k} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[1+(-1)^{k}\right]\left(\sqrt{3}\right)^{k}2^{n-k}.
\end{aligned}$$

Etant donné que $1+(-1)^k = 0$ si k est impair et 2 si k est pair, on en déduit que

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} 2\binom{n}{k}\left(\sqrt{3}\right)^k 2^{n-k}$$

$$= \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} 2\binom{n}{2p}\left(\sqrt{3}\right)^{2p} 2^{n-2p} = \sum_{0\leqslant p\leqslant n/2} 2\binom{n}{2p} 3^p 2^{n-2p} \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad & \pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n = 0 \bmod (\pi) \\
\Leftrightarrow \quad & \pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n = -\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n \bmod (\pi) \\
\Rightarrow \quad & \left|\sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)\right| = \left|\sin\left(-\pi\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^n\right| \\
= \quad & \left|\sin\left(\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)\right|
\end{aligned}$$

Etant donné que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 - \sqrt{3}\right)^n = 0$ (car $0 \leqslant 2 - \sqrt{3} < 1$), on en déduit que

$$\begin{aligned} \left|\sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)\right| &= \left|\sin\left(\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)\right| \\ \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n &\geqslant 0 \end{aligned}$$

et cette série étant convergente (série géométrique avec $2 - \sqrt{3} \in [0, 1[$), on en assuré de la convergence de la série $\sum\limits_n \left|\sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)\right|$ donc de la série $\sum\limits_n \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$.

retour à l'exercice

Cette série est alternée mais

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^{2/3}+\cos(n)}\right| = \frac{1}{n^{2/3}+\cos(n)}$$

n'est pas décroissante (s'en convaincre via un calculateur quelconque) ce qui interdit l'application du critère spécial. Un équivalent du terme général est $\dfrac{(-1)^n}{n^{2/3}}$ qui n'est pas de signe constant et qui n'est pas le terme général d'une série absolument convergente donc on procède par développement asymptotique.

$$\frac{(-1)^n}{n^{2/3}+\cos(n)} = \frac{(-1)^n}{n^{2/3}\left[1+\dfrac{\cos(n)}{n^{2/3}}\right]} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^{2/3}}.\left[1+O\left(\frac{\cos(n)}{n^{2/3}}\right)\right]$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^{2/3}}.\left[1+O\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)\right] \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^{2/3}}+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$$

La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^{2/3}}$ est convergente car il s'agit d'une série alternée avec $\left|\frac{(-1)^n}{n^{2/3}}\right| = \frac{1}{n^{2/3}} \underset{n\to+\infty}{\downarrow} 0$. La série $\sum_n \frac{1}{n^{4/3}}$ est à termes positifs et convergente donc la série $\sum_n O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$ converge ce qui permet d'affirmer la convergence de la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^{2/3}+\cos(n)}$.

retour à l'exercice

Pour que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+(-1)^n}}$ converge, il est indispensable que $\frac{(-1)^n}{n^{\alpha+(-1)^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, on a

$$\frac{(-1)^{2n+1}}{n^{\alpha+(-1)^{2n+1}}} = -\frac{1}{n^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$$

donc la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+(-1)^n}}$ diverge grossièrement si $\alpha \leqslant 1$. Si $\alpha > 1$, on a la majoration suivante :

$$0 \leqslant \left|\frac{(-1)^n}{n^{\alpha+(-1)^n}}\right| = \frac{1}{n^{\alpha+(-1)^n}} \underset{n\geqslant 1}{\leqslant} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ converge lorsque $\alpha - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \left| \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+(-1)^n}} \right|$ converge ce qui assure la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+(-1)^n}}$.

Il reste à étudier le cas où $1 < \alpha \leqslant 2$. Pour tout entier $N \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+(-1)^n}} &= \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 2N \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^{\alpha+1}} + \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 2N \\ n \text{ impair}}} \frac{-1}{n^{\alpha-1}} \\
&= \sum_{1\leqslant 2p\leqslant 2N} \frac{1}{(2p)^{\alpha+1}} - \sum_{1\leqslant 2p+1\leqslant 2N} \frac{1}{(2p+1)^{\alpha-1}} \\
&= \frac{1}{2^{\alpha+1}} \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^\alpha} - \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

Puisque $\alpha > 1$, la série $\sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{p^\alpha}$ converge c'est-à-dire que la suite $\left(\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^\alpha}\right)_N$ converge. D'autre part, on a

$$\frac{1}{(2p+1)^{\alpha-1}} \underset{p \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2^{\alpha-1} p^{\alpha-1}} \geqslant 0,$$

la série $\sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$ étant divergente (car $\alpha - 1 \leqslant 2 - 1 = 1$), on en déduit la divergence de la série $\sum_{p \geqslant 0} \frac{1}{(2p+1)^{\alpha-1}}$ donc la divergence de la suite $\left(\sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^{\alpha-1}}\right)_N$. Par conséquent, la suite

$\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+(-1)^n}}\right)_N$ diverge ce qui entraine la divergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+(-1)^n}}$.

Conclusion : la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+(-1)^n}}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$. retour à l'exercice

Cette série est alternée car

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) &\geqslant 0 \Leftrightarrow 1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow (-1)^n \geqslant 0 \Leftrightarrow n \text{ est pair.}\end{aligned}$$

Par contre, $\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right|$ n'est pas décroissant (s'en convaincre via un calculateur quelconque) ce qui interdit l'application du critère spécial. Un équivalent du terme général est $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui n'est pas de signe constant et qui n'est pas le terme général d'une série absolument convergente donc on procède par développement asymptotique.

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente car il s'agit d'une série alternée avec $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\downarrow} 0$. D'autre part, on dispose de l'équivalent suivant :

$$-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n} \leqslant 0.$$

La série $\sum_n -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{2}\sum_n \frac{1}{n}$ est à termes de signe constant et divergente donc la série $\sum_n \left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ est divergente. Par conséquent, la série $\sum_n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge. retour à l'exercice

Premier cas $\beta > \alpha$: Alors $n^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{\beta})$ ce qui nous fournit l'équivalent suivant :

$$\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}+2(-1)^n n^{\beta}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2(-1)^n n^{\beta}} = \frac{1}{2n^{\beta}} \geqslant 0.$$

La série $\sum_n \frac{1}{2n^{\alpha}}$ étant à termes positifs et convergente si et seulement si $\beta > 1$, on en déduit que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}+2(-1)n^{\beta}}$

converge si et seulement si $\beta > 1$.

Deuxième cas : $\beta < \alpha$ alors $n^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\alpha)$ donc

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + 2(-1)^n n^\beta} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha\left[1 + 2(-1)^n n^{\beta-\alpha}\right]}$$

$$\underset{\beta-\alpha<0}{=} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left[1 - 2(-1)^n n^{\beta-\alpha} + o\left(n^{\beta-\alpha}\right)\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \underbrace{- \frac{2}{n^{2\alpha-\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}\right)}_{=w_n}.$$

La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est alternée et $\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\downarrow} 0$ donc la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge. D'autre part, on dispose de l'équivalent suivant :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{n^{2\alpha-\beta}} \leqslant 0.$$

La série $\sum_n -\frac{2}{n^{2\alpha-\beta}} = -2\sum_n \frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}$ est une série à termes de signe constant et elle converge si et seulement si $2\alpha - \beta > 1 \Leftrightarrow \beta < 2\alpha - 1$ donc la série $\sum_n w_n$ converge si et seulement si $\beta < 2\alpha - 1$. Par conséquent, la série

$\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha + 2(-1)^n n^\beta}$ converge si et seulement si $\beta < 2\alpha - 1$.

Troisième cas $\alpha = \beta$: On a donc

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + 2(-1)^n n^\beta} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + 2(-1)^n n^\alpha}$$

$$= \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{(-1)^n}{1 + 2(-1)^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{3n^\alpha} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{n^\alpha} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{1}{3n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{(-1)^n}{1 + 2(-1)^n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

Si la série $\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{(-1)^n}{1 + 2(-1)^n}$ converge, puisqu'elle est à termes positifs, l'encadrement précédent entraine que la série

$\sum_n \dfrac{1}{3n^\alpha} = \dfrac{1}{3}\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge c'est-à-dire que $\alpha > 1$.

Réciproquement si $\alpha > 1$, la série $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge donc la majoration précédente entraine que la série $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha}.\dfrac{(-1)^n}{1+2(-1)^n}$ converge. Par conséquent, la série $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha}.\dfrac{(-1)^n}{1+2(-1)^n}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Conclusion : La série $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + 2(-1)^n n^\beta}$ converge si et seulement si $(\beta > \alpha \text{ et } \beta > 1)$ ou $(\beta < \alpha \text{ et } \beta < 2\alpha - 1)$ ou $(\alpha = \beta \text{ et } \alpha > 1)$. Ces deux derniers cas se regroupant en un seul, on obtient que la série $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + 2(-1)^n n^\beta}$ converge si et seulement si $(\beta > \alpha \text{ et } \beta > 1)$ ou $(\beta \leqslant \alpha \text{ et } \beta < 2\alpha - 1)$. retour à l'exercice.

1. Soit $b_n = a_{2n}$ alors

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= -(2n+2)^{\alpha} + (2n+1)^{\alpha} \\ \underset{n\to+\infty}{\sim} -\alpha(2n)^{\alpha-1} &= -\alpha 2^{\alpha-1} n^{\alpha-1} \end{aligned}$$

(par application du théorème des accroissements finis à la fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ entre les points $2n+2$ et $2n+1$ ou par développement asymptotique). Puisque $\alpha > 0$, la série de Rieman $n^{\alpha-1}$ est divergente et l'utilisation des sommes partielles de séries divergentes pour permet d'écrire

$$\begin{aligned} b_n &= b_n - b_0 = \sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} -\alpha 2^{\alpha-1} n^{\alpha-1} \\ &= -\alpha 2^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n} n^{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -2^{\alpha-1} n^{\alpha} \end{aligned}$$

(le dernier équivalent s'obtient soit par comparaison série-intégrale, soit par utilisation des sommes de Riemann pour la fonction $x \mapsto x^{\alpha-1}$ sur l'intervalle $[0,1]$. Ainsi, on a obtenu que

$$(*) : b_n = a_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} -2^{\alpha-1} n^\alpha = -\frac{(2n)^\alpha}{2}.$$

De même, posons $c_n = a_{2n+1}$ alors

$$c_{n+1} - c_n = -(2n+2)^\alpha + (2n+3)^\alpha \underset{n \to +\infty}{\sim} \alpha(2n)^{\alpha-1}.$$

Par le même type de raisonnement que précédemment, on aboutit à

$$(**) : a_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2^{\alpha-1} n^\alpha = \frac{(2n)^\alpha}{2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{(2n+1)^\alpha}{2}.$$

Des deux équivalents (*) et (**), on en déduit que les deux suites extraites pair impair de la suite $\frac{a_n}{(-1)^{n-1}n^\alpha}$ converge vers $\frac{1}{2}$ donc la suite $\frac{a_n}{(-1)^{n-1}n^\alpha}$ converge vers $\frac{1}{2}$ c'est-à-dire

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n-1}n^\alpha}{2}$$

retour à l'exercice

2. Si $\alpha > 1$, alors la série de terme général $\left|\frac{1}{a_n}\right|$ est positive, équivalente à la série de Riemann $\frac{2}{n^\alpha}$ donc elle est convergente et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n}$ est convergente.

Si $0 < \alpha < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n}$ n'est pas absolument convergente. L'équivalent $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^{n-1} n^\alpha}{2}$ montre que pour n assez grand le signe de a_n est celui de $(-1)^{n-1}$ c'est-à-dire que l'on a affaire à une série alternée. Etudions la montonie de la suite $|a_n| = (-1)^{n-1} a_n$. Il a été vu dans la première question que la suite (a_{2n}) est décroissante et la suite (a_{2n+1}) est croissante. Puisque, pour n assez grand, la suite (a_{2n}) est négative et la suite (a_{2n+1}) positive, on en déduit que la suite $(|a_{2n}|)$ est croissante et la suite $(|a_{2n+1}|)$ est croissante (il suffit de faire un dessin). Il ne reste plus qu'à comparer $|a_{2n}|$ et $|a_{2n+1}|$ c'est-à-dire trouver le signe de $|a_{2n+1}| - |a_{2n}| = a_{2n+1} + a_{2n}$. Nous allons commencer par réécrire ces sommes en les découpant selon les nombres pairs ou impairs, c'est-à-dire si l'on écrit que

$$a_{2n+1} = -\sum_{k=0}^{n}(2k)^{\alpha} + \sum_{k=0}^{n}(2k+1)^{\alpha} \text{ et}$$

$$a_{2n} = -\sum_{k=0}^{n}(2k)^{\alpha} + \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^{\alpha}$$

alors $a_{2n+1} + a_{2n} = -(2n+1)^{\alpha} + 2\sum_{k=0}^{n}((2k+1)^{\alpha} - (2k)^{\alpha})$

Puisque $\alpha \in]0,1[$, la fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ est concave donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left(\frac{k+(k+1)}{2}\right)^{\alpha} \geqslant \frac{1}{2}k^{\alpha} + \frac{1}{2}(k+1)^{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(2k+1)^{\alpha} \geqslant (2k)^{\alpha} + (2k+2)^{\alpha}.$$

Nous sommons cette inégalité de 0 à n, ce qui nous donne

$$2\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^{\alpha} \geqslant \sum_{k=0}^{n}(2k)^{\alpha} + \sum_{k=0}^{n}(2k+2)^{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$2\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^{\alpha} \geqslant \sum_{k=0}^{n}(2k)^{\alpha} + \sum_{k=1}^{n+1}(2k)^{\alpha} = 2\sum_{k=0}^{n}(2k)^{\alpha} + (2n+2)^{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^{\alpha} - \sum_{k=0}^{n}(2k)^{\alpha}\right] \geqslant (2n+2)^{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow a_{2n+1} + a_{2n} \geqslant (2n+2)^{\alpha} - (2n+1)^{\alpha} > 0.$$

On en déduit immédiatement que $|a_{2n+1}| \geqslant |a_{2n}|$. En se rappelant que les suites $|a_{2n}|$ et $|a_{2n+1}|$ sont croissantes, la suite (a_{2n}) négative et la suite (a_{2n+1}) positive et avec un petit dessin, on se convainc que la suite $(|a_n|)$ est croissante. Puisqu'elle tend vers $+\infty$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n}$ satisfait au théorème spécial des séries alternées donc elle converge. ◂ retour à l'exercice

1. A finir ◂ retour à l'exercice
2. A finir ◂ retour à l'exercice

On transforme pour commencer ce produit que l'on note P_n :

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=1}^{n} \frac{2n+2k}{2n+2k-1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2n+2k)^2}{(2n+2k-1)(2n+2k)} \\ &= \frac{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2n+2k)\right)^2}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2n+\underbrace{2k-1}_{\text{impair}})(2n+\underbrace{2k}_{\text{pair}})} = \frac{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2n+2k)\right)^2}{\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}(2n+k)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\prod_{k=1}^{n}(2(n+k))\right)^2}{\prod_{p=2n+1}^{4n} p} = \frac{\left(2^n \prod_{k=1}^{n}(n+k)\right)^2}{\prod_{p=2n+1}^{4n} p} = \frac{2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right)^2}{\prod_{p=2n+1}^{4n} p}$$

$$= \frac{2^{2n}\left(\prod_{p=n+1}^{2n} p\right)^2}{\prod_{p=2n+1}^{4n} p} = \frac{2^{2n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^2}{\frac{(4n)!}{(2n)!}} = \frac{2^{2n}\left((2n)!\right)^3}{(n!)^2\,(4n)!}$$

En utilisant l'équivalent de Stirling $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, on obtient

$$P_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}\left(\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}\right)^3}{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right)^2\left(\left(\frac{4n}{e}\right)^{4n}\sqrt{8\pi n}\right)}$$

$$= \frac{2^{2n}.2^{6n}n^{6n}.e^{-6n}2^3\pi^{3/2}n^{3/2}}{n^{2n}e^{-2n}2\pi n 4^{4n}n^{4n}e^{-4n}2^{3/2}\pi^{3/2}n^{1/2}}$$

$$= \frac{2^{8n+3}n^{6n+3/2}e^{-6n}\pi^{3/2}}{2^{8n++5/2}n^{6n+3/2}e^{-6n}\pi^{5/2}}$$

$$= \frac{2^{1/2}}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \Rightarrow P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

retour à l'exercice

Pour tout entier n, on a $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \geqslant \sqrt{n}$. En particulier, $\forall n \geqslant 1, \quad u_n \geqslant 1$. Compte-tenu de la majoration $\sqrt{x} \leqslant x$ lorsque $x \geqslant 1$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\forall n &\geqslant 1, \quad u_n \leqslant n + u_{n-1} \Leftrightarrow u_n - u_{n-1} \leqslant n \\
&\Rightarrow \forall N \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{N} (u_n - u_{n-1}) \leqslant \sum_{n=1}^{N} n \\
&\Leftrightarrow u_N - u_0 \leqslant \frac{N(N+1)}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant u_0 + \frac{N(N+1)}{2} \\
&\Rightarrow u_N \underset{N\to+\infty}{=} O\left(N^2\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a successivement :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n + O((n-1)^2)} = \sqrt{n + O(n^2)} = \sqrt{O(n^2)} = O(n) \\ u_n &= \sqrt{n + O(n-1)} = \sqrt{O(n)} = O\left(\sqrt{n}\right) \\ u_n &= \sqrt{n + O\left(\sqrt{n-1}\right)} = \sqrt{n + O(\sqrt{n})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n} \\ &\Rightarrow \frac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \geqslant 0 \end{aligned}$$

et la série $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge donc la série $\sum_n \frac{1}{u_n^2}$ est aussi divergente.

La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{u_n}$ n'est pas absolument convergente car

$$\left|\frac{(-1)^n}{u_n}\right| = \frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0$$

et la série $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_n \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge $(\frac{1}{2} \leqslant 1)$. La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{u_n}$ étant alternée et son terme général tendant vers 0 mais l'étude de la monotonie est mal aisée (elle résulte d'un développement asymptotique à 3 termes de u_n qui en soit est suffisant pour étudier la convergence de la série considérée !).
Etant donné que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n} + o\left(\sqrt{n}\right)$ ce qui nous permet d'écrire :

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1} + o\left(\sqrt{n-1}\right)} = \sqrt{n + \sqrt{n}\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + +o\left(\sqrt{n}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{1}{n}}++o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)} \\
&= \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+o(1)\right)+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \\
&= \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \\
&= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
&= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)=\sqrt{n}+\frac{1}{2}+o\left(1\right).
\end{aligned}
$$

En réinjectant de nouveau cette égalité dans la relation de récurrence vérifiée par u_n, on obtient

$$
\begin{aligned}
u_n &= \sqrt{n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}+o(1)} = \sqrt{n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
&= \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\
&= \sqrt{n}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2\right. \\
&\quad \left.+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2\right] \\
&= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{4n}-\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$= \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

On en déduit aisément le développement asymptotique de $\dfrac{(-1)^n}{u_n}$.

$$\frac{(-1)^n}{u_n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.\frac{1}{1 + \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^2 \right) \right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{2n} + \frac{(-1)^n}{8n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{2n}$ sont alternées avec $\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\downarrow} 0$ et $\left|-\dfrac{(-1)^n}{2n}\right| = \dfrac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\downarrow} 0$ donc elles sont convergentes. En outre, on a

$$\left|\frac{(-1)^n}{8n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\frac{(-1)^n}{8n^{3/2}}\right| = \frac{1}{8n^{3/2}} \geqslant 0$$

et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\cancel{8}n^{3/2}} = \frac{1}{8}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (série de Riemann avec $\dfrac{3}{2} > 1$) donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{(-1)^n}{8n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)$ est convergente. Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{u_n}$ est convergente.

retour à l'exercice

On commence par effectuer un développement asymptotique de P_n. On remarque que

$$\ln(P_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$$

c'est-à-dire que le développement asymptotique de $\ln(P_n)$ est celui de la série $\sum_{k\geqslant 1} \ln\left(1 - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$. Or on a le développement asymptotique suivant :

$$\ln\left(1-\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \underset{k\to+\infty}{=} -\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2}\left(-\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)^2 + O\left(\left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)^3\right)$$

$$\underset{k\to+\infty}{=} -\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2k} \underset{k\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$$

La série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^{3/2}}$ étant à termes positifs et convergente, on en déduit que la série $\sum_{k\geqslant 1}\left[\ln\left(1-\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2k}\right]$

converge c'est-à-dire qu'il existe un réel L tel que

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1-\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}+\frac{1}{2k}\right]\underset{n\to+\infty}{=}L+o(1)$$

$$\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)\underset{n\to+\infty}{=}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+L+o(1).$$

La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ étant alternée avec $\left|\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{k}}\underset{k\to+\infty}{\downarrow}0$, le critère spécial nous assure qu'elle est converge. Autrement dit, il existe un réel L' tel que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\underset{n\to+\infty}{=}L'+o(1).$$

D'autre part, on dispose du développement asymptotique classique suivant :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

où γ est la constante d'Euler. On obtient donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} -L' - \frac{1}{2}\left(\ln(n) + \gamma + o(1)\right) + L + o(1)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2}\ln(n) \underbrace{-L' - \frac{1}{2}\gamma + L}_{=C\in\mathbb{R}} + o(1) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$P_n = \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(n) + C + o(1)\right) = \frac{\overbrace{e^C}^{>0}\ \overbrace{e^{o(1)}}^{\to 1}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^C}{\sqrt{n}} \geqslant 0.$$

La série $\sum_n \frac{e^C}{\sqrt{n}} = e^C \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ étant à termes positifs et divergente (série de Riemann avec $\frac{1}{2} \leqslant 1$), on en déduit que la série $\sum_n P_n$ diverge également.
Pour étudier la convergence de la série $\sum_n (-1)^n P_n$, il faut affiner notre développement asymptotique de P_n. Classiquement, on introduit

$$u_n = \ln(P_n) + \frac{\ln(n)}{2} - C$$

qui converge vers 0 d'après les calculs précédents, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \ln\left(\frac{P_{n+1}}{P_n}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= \ln\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= -\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{2}\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)^3\\
&\quad +O\left(\left(\frac{1}{3}\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)\right)^4\right)+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{(n+1)^{3/2}} + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/2} + \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{(-1)^n}{(n+1)^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{(-1)^n}{(n+1)^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{2n^{3/2}} + \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3/2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{2n^{3/2}} + \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{2n^{3/2}} + \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

La série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ étant à termes positifs et convergente, on en déduit que la série $\sum_n \left(u_{n+1} - u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est convergente

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \left(u_{n+1} - u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = O\left(\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

(d'après la comparaison série-intégrale par exemple). Or la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ étant convergente, on en déduit que

$$\sum_{n=N}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) - \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{N}\right)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n=N}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Puisque l'on a

$$\sum_{n=N}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=N}^{m}(u_{n+1}-u_n)=\lim_{m\to+\infty}(u_{m+1}-u_N)=-u_N$$

car la suite $(u_n)_n$ tend vers 0 donc

$$\begin{aligned}
-u_N &= \sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}+O\left(\frac{1}{N}\right)\Leftrightarrow u_N=-\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}+O\left(\frac{1}{N}\right)\\
&\Leftrightarrow \ln(P_N)=-\frac{1}{2}\ln(N)+C-\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}+O\left(\frac{1}{N}\right)\\
&\Leftrightarrow P_N=\exp\left(-\frac{1}{2}\ln(N)+C-\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^C}{\sqrt{N}} \exp\left(-\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) \\
&= \frac{e^C}{\sqrt{N}}[1 + \left(-\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) \\
&\quad + O\left(\left(-\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)^2\right)]
\end{aligned}$$

D'après le critère spécial des séries alternées, on dispose de la majoration suivante :

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^N}{\sqrt{N}}\right| = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 \leqslant \frac{1}{N} \Rightarrow \left(\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$(-1)^N P_N = (-1)^n\frac{e^C}{\sqrt{n}}\left[1-\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{N}\right)\right]$$

$$= \frac{(-1)^N e^C}{\sqrt{N}} - \frac{(-1)^N e^C}{\sqrt{N}}\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right)$$

Il reste à étudier la convergence de la série à termes positifs

$$\frac{(-1)^N \exp(C)}{\sqrt{N}} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

A FINIR. retour à l'exercice

1. On note $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln(n)] = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{n}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ étant à termes positifs et convergente, on en déduit que la série $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ converge. Autrement dit la suite $\left(\sum_{n=1}^{N-1}(u_{n+1}-u_n)\right)_N = (u_N-u_0)_N$ converge ce qui entraine la convergence de la suite $(u_N)_N$.. retour à l'exercice

2. Pour tout entier N et tout $x>-1$, on a

$$\begin{aligned}
& f(x+n+1)-f(x+n)=\frac{1}{x+n+1} \\
\Rightarrow & \sum_{n=0}^{N}(f(x+n+1)-f(x+n))=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{x+n+1} \\
\Leftrightarrow & f(x+N+1)-f(x)=\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{x+n} \\
\Leftrightarrow & f(x)=f(x+N+1)-\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{x+n}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = [f(x+N+1) - \ln(x+N+1)] + \ln(x+N+1) - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{x+n}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = [f(x+N+1) - \ln(x+N+1)] + \ln(N+1) + \ln\left(1+\frac{x}{N+1}\right) - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{x+n}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = [f(x+N+1) - \ln(x+N+1)] + \left(\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k}\right) - u_n + \ln\left(1+\frac{x}{N+1}\right) - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{x+n}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = [f(x+N+1) - \ln(x+N+1)]$$
$$-u_N + \ln\left(1 + \frac{x}{N+1}\right) + \sum_{n=1}^{N+1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right).$$

Etant donné que $\lim_{N\to+\infty}(f(x+N+1) - \ln(x+N+1)) = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \ln(x) = 0$, que $\lim_{N\to+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{N+1}\right) = 0$ et que $u_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$, on en déduit que

$$\lim_{N\to+\infty}\left(f(x) - [f(x+N+1) - \ln(x+N+1)] - u_N\right.$$
$$\left.+\ln\left(1+\frac{x}{N+1}\right)\right) = f(x) - [-\gamma]$$
$$\Rightarrow \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N+1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right) = f(x) + \gamma.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)$ converge et sa somme vaut $f(x)-[-\gamma]$ c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)=f(x)+\gamma$$

$$\Leftrightarrow f(x)=-\gamma+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)$$

retour à l'exercice

3. Soit $-1 < x \leqslant y$ alors pour tout entier $n \geqslant 1$

$$0 < -1+n \leqslant x+n \leqslant y+n \Rightarrow \frac{1}{y+n} \leqslant \frac{1}{x+n}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y+n} \geqslant -\frac{1}{x+n} \Leftrightarrow \frac{1}{n}-\frac{1}{y+n} \geqslant \frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}$$

Par sommation des séries convergentes, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{y+n}\right) \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right)$$
$$\Leftrightarrow f(y)+\gamma \geqslant f(x)+\gamma \Leftrightarrow f(y) \geqslant f(x)$$

ce qui entraine la croissance de f sur $]-1,+\infty[$. De même, la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ étant concave sur $\mathbb{R}_+^\times$ (sa dérivée $x \mapsto \frac{1}{x^2}$

est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\times$) on a pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tout $a, b \in \mathbb{R}_+^\times$,

$$-\frac{1}{\lambda a + (1-\lambda)b} \geqslant -\frac{\lambda}{a} + -\frac{1-\lambda}{b}$$

$$\Rightarrow \forall x, y > -1, \quad \forall n \geqslant 1, \quad x+n, y+n > 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{\lambda(n+x) + (1-\lambda)(n+y)} \geqslant -\frac{\lambda}{n+x} - \frac{1-\lambda}{n+y}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{n + \lambda x + (1-\lambda)y} \geqslant -\frac{\lambda}{n+x} - \frac{1-\lambda}{n+y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n+\lambda x+(1-\lambda)y} \geqslant \frac{1}{n} - \frac{\lambda}{n+x} - \frac{1-\lambda}{n+y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n+\lambda x+(1-\lambda)y} \geqslant \frac{\lambda}{n} + \frac{1-\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n+x} - \frac{1-\lambda}{n+y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n+\lambda x+(1-\lambda)y}$$

$$\geqslant \lambda\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y}\right)$$

Par sommation des séries convergentes, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\lambda x+(1-\lambda)y}\right)$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\lambda\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)+(1-\lambda)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+y}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\lambda x+(1-\lambda)y}\right)$$

$$\geqslant \lambda\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)+(1-\lambda)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+y}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

donc la fonction f est bien concave sur $]-1,+\infty[$.

◂ retour à l'exercice

Etant donné que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\pi}{6} = 0$, la série n'est pas grossièrement diverge. Pour commencer, on remarque que

$$
\begin{aligned}
u_n &= \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\arccos'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}.\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \\
&= \frac{-2(-1)^n}{n^\alpha} \Rightarrow |u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^\alpha} \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Par conséquent, les séries $\sum_n |u_n|$ et $\sum_n \frac{2}{n^\alpha} = 2\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature. Or cette dernière converge si et seulement si $\alpha > 1$. Ainsi lorsque $\alpha > 1$, la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente donc convergente. Si $\alpha \in \left]0, 1\right]$, il faut effectuer un développement asymptotique de u_n. Pour cela, il est nécessaire d'effectuer un développement limité de $x \mapsto \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + x\right)$ au voisinage de

0. Pour tout x au voisinage de 0, on a

$$\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+x\right)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+x\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\sqrt{3}x+x^2}}$$

$$= -\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{1-4\sqrt{3}x+4x^2}} = -2(1\underbrace{-4\sqrt{3}x+4x^2}_{\to 0})^{-1/2}$$

$$\underset{x\to 0}{=} -2\left(1+\frac{1}{2}\left(-4\sqrt{3}x+4x^2\right)+o\left(-4\sqrt{3}x+4x^2\right)\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} -2\left(1-2\sqrt{3}x+2x^2+o(x)\right) \underset{x\to 0}{=} -2\left(1-2\sqrt{3}x+o(x)\right)$$

donc on obtient

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+x\right)-\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \underset{x\to 0}{=} \int_0^x -2\left(1-2\sqrt{3}t\right)\,dt+o(x^2)$$

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+x\right)-\frac{\pi}{6} \underset{x\to 0}{=} -2x+2\sqrt{3}x^2+o(x^3)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{-2(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{2\sqrt{3}}{n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

La série $\sum_n \frac{-2(-1)^n}{n^\alpha}$ est alternée avec $\left|\frac{-2(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \frac{2}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\downarrow} 0$ donc cette série est convergente. Par conséquent, la série $\sum_n u_n$

converge si et seulement si la série $\sum_n \left(u_n + \frac{2(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge.

Etant donné que l'on a

$$u_n + \frac{2(-1)^n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2\sqrt{3}}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{3}}{n^{2\alpha}} \geqslant 0$$

on en déduit que les séries $\sum_n \left(u_n + \frac{2(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ et

$\sum_n \frac{2\sqrt{3}}{n^{2\alpha}} = 2\sqrt{3}\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature. Or cette dernière série converge si et seulement si $2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$. Par conséquent, la série $\sum_n \left(u_n + \frac{2(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$ donc la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

retour à l'exercice

1. Pour tout entier $n \geqslant 3$, on a $\dfrac{\ln(n)}{n} \geqslant \dfrac{\ln(3)}{n} \geqslant \dfrac{\ln(e)}{n} = \dfrac{1}{n} \geqslant 0$ et la série $\sum_n \dfrac{1}{n}$ diverge donc la série $\sum_n \dfrac{\ln(n)}{n}$ est également divergente.

   En outre, la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est décroissante sur $[e, +\infty[$ car cette fonction est dérivable sur cet intervalle et l'on a

$$\forall x \geqslant e, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2} \leqslant \frac{1-\ln(e)}{x^2} = 0.$$

   Par conséquent, la suite $\left|\dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n}\right| = \dfrac{\ln(n)}{n}$ est décroissante et elle tend vers 0 (par croissance comparée) donc la série alternée $\sum_{n \geqslant 3} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ converge ce qui assure la convergence de la série $\sum_n (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

◂ retour à l'exercice

2. La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ étant positive et décroissante sur $[e, +\infty[$, on peut utiliser la comparaison série-intégrale.

$$\begin{aligned}
\forall k \geqslant 3, \quad \forall t \in [k, k+1], \quad & \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \frac{\ln(t)}{t} \leqslant \frac{\ln(k)}{k} \\
\Rightarrow \quad & \int_k^{k+1} \frac{\ln(k+1)}{k+1} dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln(k)}{k} dt \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\ln(k+1)}{k+1} [k+1-k] \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leqslant \frac{\ln(k)}{k} [k+1-k] \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leqslant \frac{\ln(k)}{k}.
\end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout entier $N \geqslant 4$, on a

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\ln(4)}{4} \leqslant \displaystyle\int_3^4 \frac{\ln(t)}{t}dt \leqslant \frac{\ln(3)}{3} \\ \vdots \\ \dfrac{\ln(N)}{N} \leqslant \displaystyle\int_{N-1}^N \frac{\ln(t)}{t}dt \leqslant \frac{\ln(N-1)}{N-1} \end{array}\right\}$$

et en sommant ces inégalités, on obtient

$$S_n - \frac{\ln(3)}{3} - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(1)}{1} \leqslant \int_3^N \frac{\ln(t)}{t}dt$$

$$\leqslant S_n - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(1)}{1} + \frac{\ln(N)}{N}$$

On calcule ensuite l'intégrale ci-dessus :

$$\begin{aligned}\int_3^N \frac{\ln(t)}{t}dt &= \int_3^N \ln'(t)\ln(t)dt = \left[\frac{(\ln(t))^2}{2}\right]_{t=3}^{t=N} \\ &= \frac{(\ln(N))^2}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2}\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} S_n - \frac{\ln(3)}{3} - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(1)}{1} &\leqslant \frac{(\ln(N))^2}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2} \\ &\leqslant S_n - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(1)}{1} + \frac{\ln(N)}{N}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_n \leqslant \dfrac{(\ln(N))^2}{2} - \dfrac{(\ln(3))^2}{2} + \dfrac{\ln(3)}{3} + \dfrac{\ln(2)}{2} \\ S_n \geqslant \dfrac{(\ln(N))^2}{2} - \dfrac{(\ln(3))^2}{2} + \dfrac{\ln(2)}{2} - \dfrac{\ln(N)}{N} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(\ln(N))^2}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2} + \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(N)}{N} \leqslant S_n$$

$$\leqslant \frac{(\ln(N))^2}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2} + \frac{\ln(3)}{3} + \frac{\ln(2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\ln(N))^2}{2} + o\left((\ln(N))^2\right) \leqslant S_n \leqslant \frac{(\ln(N))^2}{2} + o\left((\ln(N))^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{1 + o(1)}_{\to 1} \leqslant \frac{2S_n}{(\ln(N))^2} \leqslant \underbrace{1 + o(1)}_{\to 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{N \to +\infty} \frac{2S_n}{(\ln(N))^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{2S_n}{(\ln(N))^2} \underset{N \to +\infty}{\sim} 1$$

$$\Leftrightarrow S_N \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{(\ln(N))^2}{2}$$

◂ retour à l'exercice

3. On commence par remarquer que $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$. En utilisant de nouveau la comparaison intégrale, on a

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\ln(n+2)}{n+2} \leqslant \displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \frac{\ln(t)}{t}\,dt \leqslant \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \\ \vdots \\ \dfrac{\ln(2n)}{2n} \leqslant \displaystyle\int_{2n-1}^{2n} \frac{\ln(t)}{t}\,dt \leqslant \dfrac{\ln(2n-1)}{2n-1} \end{array}\right\}$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$S_{2n} - S_n - \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_{n+1}^{2n} \frac{\ln(t)}{t} dt \leqslant S_{2n} - S_n - \frac{\ln(2n)}{2n}$$

$$\Leftrightarrow S_{2n} - S_n + o(1) \leqslant \left[\frac{(\ln(t))^2}{2}\right]_{t=n+1}^{t=2n} \leqslant S_{2n} - S_n + o(1)$$

$$\Leftrightarrow o(1) \leqslant \left[\frac{(\ln(t))^2}{2}\right]_{t=n+1}^{t=2n} - (S_{2n} - S_n) \leqslant o(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{(\ln(t))^2}{2}\right]_{t=n+1}^{t=2n} - (S_{2n} - S_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow S_{2n} - S_n = \left[\frac{(\ln(t))^2}{2}\right]_{t=n+1}^{t=2n} + o(1)$$

Calculons l'intégrale du calcul ci-dessus puis effectuons son développement asymptotique

$$\left[\frac{(\ln(t))^2}{2}\right]_{t=n+1}^{t=2n} = \frac{(\ln(2n))^2}{2} - \frac{(\ln(n+1))^2}{2}$$

$$= \frac{(\ln(2)+\ln(n))^2}{2} - \frac{\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2}{2}$$

$$= \frac{(\ln(n))^2 + 2\ln(2)\ln(n) + (\ln(2))^2}{2} - \frac{\left(\ln(n)+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}{2}$$

$$= \frac{(\ln(n))^2}{2} + \ln(2)\ln(n) + \frac{(\ln(2))^2}{2} - \frac{(\ln(n))^2 + o(1)}{2}$$

$$= \ln(2)\ln(n) + \frac{(\ln(2))^2}{2} + o(1)$$

$$\Rightarrow S_{2n} - S_n = \ln(2)\ln(n) + \frac{(\ln(2))^2}{2} + o(1)$$

1. Pour commencer, la série $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ est alternée et $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right| \underset{n\to+\infty}{\downarrow} 0$ (car $\alpha > 0$) donc le critère spécial permet d'affirmer que la série $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ est convergente ce qui justifie l'existence de la suite $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}$.

Premier cas $\alpha > 1$: Toujours d'après le critère spécial, on a

$$|R_n| \leqslant \left|\frac{(-1)^{(n+1)-1}}{(n+1)^\alpha}\right| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

La série $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ étant convergente lorsque $\alpha > 1$, on en déduit que la série $\sum_n |R_n|$ converge ce qui entraine la convergence de la série $\sum_n R_n$.

Second cas $\alpha = 1$: La suite $(R_n)_n$ converge vers 0 (reste partielle d'une série convergente). En outre, pour tout entier n, le signe de R_n est celui de

$$\frac{(-1)^{(n+1)-1}}{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

qui est celui de $(-1)^n$ donc la série $\sum_n R_n$ est bien alternée. Il reste à justifie la décroissance de $|R_n| = (-1)^n R_n$ (d'après le signe de R_n).

$$|R_n| - |R_{n+1}| = (-1)^n R_n - (-1)^{n+1} R_{n+1} = (-1)^n R_n + (-1)^n R_{n+1}$$
$$= (-1)^n [R_n + R_{n+1}] = (-1)^n \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right]$$

$$= (-1)^n \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \right]$$

$$= (-1)^n \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^k}{k+1} \right) \right]$$

$$= (-1)^n \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right]$$

$$= (-1)^n \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)} \right]$$

La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$ étant alternée avec $\left|\dfrac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}\right| = \dfrac{1}{k(k+1)} \underset{k\to+\infty}{\downarrow} 0$, le critère spécial montre que sa somme est celui de son premier terme c'est-à-dire le signe de $\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$. Autrement dit sa somme a le signe de $(-1)^n$ sont $(-1)^n\left[\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}\right]$ est positif donc la suite $(|R_n|)_n$ est décroissante. Ceci permet d'appliquer le critère spécial d'où la convergence de la série $\displaystyle\sum_n R_n$.

2. La suite $(R_n)_n$ converge vers 0 (reste partielle d'une série convergente). En outre, pour tout entier n, le signe de R_n est celui de

$$\frac{(-1)^{(n+1)-1}}{(n+1)^\alpha}=\frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}$$

qui est celui de $(-1)^n$ donc la série $\sum_n R_n$ est bien alternée. Il reste à justifie la décroissance de $|R_n| = (-1)^n R_n$ (d'après le signe de R_n).

$$\begin{aligned}
|R_n| - |R_{n+1}| &= (-1)^n R_n - (-1)^{n+1} R_{n+1} \\
&= (-1)^n R_n + (-1)^n R_{n+1} = (-1)^n \left[R_n + R_{n+1}\right] \\
&= (-1)^n \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}\right] \\
&= (-1)^n \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k}}{(k+1)^\alpha}\right] \\
&= (-1)^n \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} + \frac{(-1)^{k}}{(k+1)^\alpha}\right)\right] \\
&= (-1)^n \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)\right]
\end{aligned}$$

Si l'on parvient à établir la décroissance de la suite $\left(\frac{1}{k^{\alpha}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha}}\right)_k$ alors le critère spécial permet d'affirmer que le signe de la somme ci-dessus est celui de

$$
\begin{aligned}
& (-1)^n(-1)^{n+1-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} - \frac{1}{(n+2)^{\alpha}}\right) \\
= \quad & \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} - \frac{1}{(n+2)^{\alpha}} \geqslant 0
\end{aligned}
$$

ce qui entrainera la décroissance de la suite $(|R_n|)_n$ donc la convergence de la série $\sum_n R_n$. La décroissance de la suite

$\left(\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right)_k$ est équivalente aux inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
\forall k \quad &\geqslant \quad 1, \quad \frac{1}{(k+1)^\alpha} - \frac{1}{(k+2)^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{2}.\frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{2}.\frac{1}{(k+2)^\alpha}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\left(\dfrac{k+(k+2)}{2}\right)^\alpha} \leqslant \frac{1}{2}.\frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{2}.\frac{1}{(k+2)^\alpha}.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^\times$. En effet, sa dérivée seconde est la fonction $x \mapsto -\alpha(-\alpha-1)x^{\alpha-2} = \alpha(\alpha+1)x^\alpha$ qui est positive sur $\mathbb{R}_+^\times$ ce qui achève la preuve. retour à l'exercice

La série $\sum\limits_{k\geqslant n}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ est une série alternée avec $\left|\dfrac{(-1)^k}{2k+1}\right|=\dfrac{1}{2k+1}\underset{k\to+\infty}{\downarrow}0$ donc la série $\sum\limits_{k\geqslant n}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ converge. En remarquant que $\displaystyle\int_0^1 x^{2k}\,dx=\left[\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_{x=0}^{x=1}=\dfrac{1}{2k+1}$, on a pour tout entier naturel $N\geqslant n$

$$\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\sum_{k=n}^{N}(-1)^k\int_0^1 x^{2k}\,dx=\int_0^1\sum_{k=n}^{N}\left(-x^2\right)^k dx$$

$$= \int_0^1 \left((-x^2)^n + (-x^2)^{n+1} + \cdots + (-x^2)^N\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left((-x^2)^n + (-x^2)^{n+1} + \cdots + (-x^2)^N\right) dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2)^n \left[1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + \cdots + (-x^2)^{N-n}\right] dx$$

$$= \int_0^1 (-1)^n x^{2n} . \frac{1 - (-x^2)^{N-n+1}}{1+x^2} dx$$

$$= (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx + (-1)^N \int_0^1 \frac{x^{2(N-n+1)}}{1+x^2} dx.$$

On remarque alors que

$$\left|(-1)^N \int_0^1 \frac{x^{2(N-n+1)}}{1+x^2}\,dx\right| = \int_0^1 \frac{x^{2(N-n+1)}}{1+x^2}\,dx$$

$$\underset{0\leqslant 1}{\leqslant} \int_0^1 x^{2(N-n+1)}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2(N-n+1)+1}}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to+\infty} (-1)^N \int_0^1 \frac{x^{2(N-n+1)}}{1+x^2}\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$$

Par conséquent, pour tout entier N, on a

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \sum_{n=0}^{N} (-x^2)^n\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} . \frac{1-(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} + (-1)^N \int_0^1 \frac{x^{2(N+1)}}{1+x^2}\,dx$$

$$\left| (-1)^N \int_0^1 \frac{x^{2(N+1)}}{1+x^2}\,dx \right| = \int_0^1 \frac{x^{2(N+1)}}{1+x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 x^{2(N+1)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2(N+1)+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)_N$ converge vers $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ c'est-à-dire que la série $\sum_n a_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} \underset{x=\tan(t)}{=} \int_{t=\arctan(0)}^{t=\arctan(1)} \frac{(1+\tan^2(t))}{(1+\tan^2(t))^2} dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2(t)} dt = \int_0^{\pi/4} \cos^2(t) dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_{t=0}^{t=\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

retour à l'exercice

Il est immédiat que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ est alternée avec $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\downarrow} 0$ donc elle est convergente. D'autre part, pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k+1}\sqrt{n+1-k}} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n+1-k}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} b_n &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k+1}\sqrt{n+1-k}} \\ &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n\leqslant N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k+1}\sqrt{n+1-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k+1}\sqrt{n+1-k}} =\end{aligned}$$

A FINIR retour à l'exercice

1. **A FINIR** ◂ retour à l'exercice
2. **A FINIR** ◂ retour à l'exercice