Exercices de mathématiques MP-MP* et PSI*

par Abdellah BECHATA

www.mathematiques.ht.st

Table des matières

1 Arithmétique.

www.mathematiques.ht.st

Exercice 1.1
Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $C_p^k = 0 \ mod(p) \ \forall k \in \{1, .., p-1\}$.
2. En déduire que $a^p = a \ mod(p) \ \forall a \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1.2
L'indicatrice d'Euler est définie sur $\mathbb{N}^{\times}$ par $\varphi(k) = \text{card}(\{1 \leq q \leq k$ tel que $(q, k) = 1\}$

1. Montrer que $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ si $(n, m) = 1$.
2. Calculer $\varphi(p^\alpha)$ lorsque p est un nombre premier et α un nombre entier.
3. En déduire le calcul de $\varphi(n)$ lorsque n est un entier quelconque.
4. Montrer que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Exercice 1.3 (MP*)

1. Montrer que $2 \nmid m$ alors $2^m + 1$ n'est pas un nombre premier.
2. Supposons que m est de la forme $2^q(2k+1)$ où q et k sont des entiers supérieurs à 1. Montrer que $2^m + 1$ n'est pas un nombre premier.
3. Soit p un diviseur premier de $2^{2^n} + 1$. Montrer que l'ordre de 2 dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$ est égale à 2^{n+1}. En déduire que p est de la forme $k2^{n+1} + 1$.

Exercice 1.4 (MP*)
Soit p un nombre premier et m un entier tel que $(p, m) = 1$.
Montrer que $C_{p^\alpha m}^{p^\alpha} = m \ mod(p)$ (on pourra considérer le polynôme $(X+1)^n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

2 Polynômes.

Exercice 2.1
Soient n et m deux nombres entiers. Calculer $pgcd(X^n - 1, X^m - 1)$.

Exercice 2.2
Soient $(n_i)_{1\leq i\leq k-1}$ une suite d'entiers tels que $n_i = i(mod\ k)$.
Montrer que $\sum_{j=1}^{k-1} X^j \mid \sum_{j=1}^{k-1} X^{n_j}$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{Z}[X]$ (seulement pour les MP*).

Exercice 2.3
1. Soit G un sous groupe borné de $(\mathbb{C}^\times, \times)$. Montrer que $G \subset \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mid z \mid = 1\}$.
2. Déterminer les polynomes P appartenant à $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.
3. Même question mais avec P appartenant à $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2.4
Déterminer les polynomes P appartenant à $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Exercice 2.5 (MP*)
$\forall P \in \mathbb{Z}[X]\backslash\{0\}$, on note $c(P)$ (le contenu de P) le pgcd des coefficients du polynôme P. Le polynôme P de $\mathbb{Z}[X]$ est dit primitif si $c(P) = 1$.

1. (a) Montrer que le produit de deux polynômes primitifs de $\mathbb{Z}[X]$ est primitif (on pourra travailler modulo un diviseur premier p de $c(PQ)$).
   (b) Que vaut $c(PQ)$ si P et Q sont deux polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[X]$?
   (c) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{Z}[X]$, premiers entre eux dans $\mathbb{Z}[X]$ (leurs seuls diviseurs communs sont les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$). Montrer qu'ils sont premiers entre eux dans l'anneau $\mathbb{Q}[X]$.
   (d) En déduire que P appartenant à $\mathbb{Z}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ ssi P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et $c(P) = 1$.
2. Applications :
   (a) Lemme d'Eisenstien : soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme appartenant à $\mathbb{Z}[X]$ tel que $p \mid a_k\ \forall k \in \{0, ..., n-1\}$, $p^2 \nmid a_0$ et $p \nmid a_n$. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) Soit p un nombre premier, montrer que le polynôme $\Phi_p(X) = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ (on pourra considérer $\Phi_p(X+1)$).

Exercice 2.6 (MP*)
Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ n nombres entiers relatifs deux à deux distincts.
Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$:
a) $P(X) = 1 + \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)^2$ b) $Q(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k) - 1$.

3 Groupes, anneaux, corps.

Exercice 3.1
Soient n un nombre entier et d un diviseur de n

1. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, \text{ tel que } z^n = 1\}$.
2. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe H_d de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de cardinal d. Expliciter ce sous-groupe et en déduire tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Dénombrer le nombre délements d'ordre d de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ puis montrer que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ (où φ est définie dans l'exercice 1.2).

Exercice 3.2
Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^\times)^2$, $A_1, ..., A_p$ p des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ deux à deux distinctes et inversibles ; on suppose que $\{A_1, \ldots, A_p\}$ est stable pour la multiplication.

1. $(\{A_1, \ldots, A_p\}, \times)$ est-il un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$? (en justifiant)
2. Montrer que $tr(\sum_{i=1}^{p} A_i) \equiv 0\ [p]$.
3. Montrer que $(\{A_1, \ldots, A_p\}, \times)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ ssi il est isomorphe à un sous-groupe fini de $GL_m(\mathbb{R})$ avec $m \leqslant n$.

Exercice 3.3 (MP*)
Soit p un nombre premier. On dit qu'un groupe (non nécessairement commutatif) est un p-groupe si son cardinal est une puissance de p.
Soit G un p-groupe opèrant sur un ensemble X. On note $X^G = \{x \in X \text{ tel que } g.x = x\ \forall g \in G\}$.

1. Montrer que $\text{card}(X) = \text{card}(X^G)\ mod(p)$ (on pourra considérer l'équation des classes)
2. En déduire que le centre $Z_G = \{h \in G \text{ tel que } gh = hg\ \forall g \in G\}$ de G est n'est pas réduit à $\{1\}$ (On pourra considérer l'action de G sur lui-même par congugaison i.e. $g.h = ghg^{-1}$).

Exercice 3.4 (MP*)
Soit G un groupe. On suppose que $card(G) = p^\alpha m$ avec $(m,p) = 1$. On dit que H est sous-groupe de Sylow de G si H est un p-groupe de cardinal p^α.
Soit X l'ensemble des parties à p^α éléments de G. On fait agir G sur X par $g.A = \{ga,\ a \in A\}$ où $g \in G$ et $A \in X$.

1. (a) A l'aide l'exercice 1.4, montrer qu'il existe A appartenant à X dont le cardinal de l'orbite n'est pas divisible par p.
   (b) Soit $H = Stab_A$. Montrer que $H \subset Aa^{-1}$ pour un certain $a \in A$.
   (c) Montrer que H est un p-sous-groupe de Sylow.
2. Soient H et H' deux sous-groupes de Sylow de G. On pose $X = G/H = \{gH,\ g \in G\}$ et on fait agir H' sur X par $h'.gH \underset{def}{=} h'gH$
   (a) Calculer le cardinal de X.
   (b) A l'aide de la question de l'exercice 3.3, montrer que $H' = aHa^{-1}$ pour un certain a.

Exercice 3.5
$SL(2,\mathbb{Z})$ est le groupe des matrices 2×2 à coefficients entiers et de déterminant 1.

1. Montrer $(SL(2,\mathbb{Z}), \times)$ est un groupe.
2. Montrer que $(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ définie une action du groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{Z}^2$.
3. Montrer que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ appartiennent à la même orbite ssi $\text{pgcd}(x,y) = \text{pgcd}(x',y')$.
4. En déduire que $SL(2,\mathbb{Z})$ est engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

4 Endomorphismes et formes linéaires.

Exercice 4.1
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. La matrice A est-elle inversible ? si oui, expliciter son inverse.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(A - 2I_3) \oplus \ker(A - 4I_3)$.
4. Montrer qu'il existe matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale
5. Déterminer une base de $\ker(A - 2I_3)$ et une de $\ker(A - 4I_3)$.
   Expliciter une matrice P possible pour la question 4.
6. Retrouver A^n

Exercice 4.2
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie.
2. En déduire que si f commute avec tous les éléments de $\mathcal{L}(E)$ alors f est une homothétie.

Exercice 4.3
Soient p, q deux projecteurs tels que $p \circ q = 0$. Montrer que $p + q$ est un projecteur et le caractériser.

Exercice 4.4
1. Soient $(a, b, c, d) \in k^4$.
   Montrer que pour tout polynôme P de degré 4 et unitaire $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & P(a) \\ 1 & b & b^2 & P(b) \\ 1 & c & c^2 & P(c) \\ 1 & d & d^2 & P(d) \end{vmatrix}$
   En choisissant convenablement P, calculer $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$
2. Généraliser cette méthode pour calculer les déterminants de Vandermond

Exercice 4.5
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que la suite $(Ker\ f^p)_{p\geq 0}$ (resp. $(Im\ f^p)_{p\geq 0}$) est une suite croissante (resp. décroissante) d'ensembles.
2. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq p_0$ $Ker\ f^p = Ker\ f^{p_0}$ et $Im\ f^p = Im\ f^{p_0}$.
3. Montrer que $p_0 \leq dim(E)$ et $E = Ker\ f^{p_0} \bigoplus Im\ f^{p_0}$

Exercice 4.6
Considérons la matrice $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

1. Expliciter $\ker(M - I_3)$, $\ker(M - 2I_3)$ et $\ker(M - 3I_3)$.
2. Montrer que M est diagonalisable,diagonaliser M et expliciter un polynôme annulateur de M.
3. Soit X une matrice 3×3 vérifiant l'équation (E) : $X^2 = M$. La matrice X est-elle diagonalisable ?
4. Montrer que si e est un vecteur propre de X, alors e est un vecteur propre de M. En déduire les solutions de (E).

Exercice 4.7
Soit E un espace vectoiel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est nilpotent s'il existe un entier k tel que $f^k = 0$. Le plus petit entier k pour lequel $f^k = 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de f et on le note $I(f)$.

1. Déterminer les endomorphismes nilpotents diagonalisables.
2. Montrer que $I(f) \leqslant n$.
3. On suppose que $I(f) = n$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $mat(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ . & 0 & 1 & . & \\ . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4.8
Soient E un ev de dimension finie, $u, v \in \mathcal{L}(E)$ avec v nilpotent.

1. Montrer que $\det(Id + v) = 1$.
2. Montrer que $\det(u + v) = \det u$ si $u \circ v = v \circ u$.

Exercice 4.9
Soit la matricie réelle $A = \begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n $(n \in \mathbb{Z})$

Exercice 4.10
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Etudier l'endomorphisme $\varphi_\lambda : \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto XP' - \lambda P \end{array}$

Exercice 4.11
Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq 3}$ trois nombres réels.
On définit quatre formes linéaires sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $\varphi_i(P) = P(a_i)$ $\forall i \in \{1, .., 3\}$ et $\vartheta(P) = \int\limits_{a_1}^{a_2} P(t)dt$.

1. Déterminer sur CNS sur la famille $(a_i)_{1 \leq i \leq 3}$ pour que ces quatres formes linéaires soient indépendantes.
2. Expliciter une relation de dépendance linéaire lorsqu'elles sont liées.

Exercice 4.12
Soit φ une forme linéaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi(X) = Tr(AX)$ $\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice 4.13
Soient $b_0, ..., b_n$ $n+1$ nombres réels. Déterminer une condition suffisante pour qu'il existe $c_0, ..., c_n$ tels que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int\limits_0^1 P(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k P(b_k)$.

Exercice 4.14
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r. Déterminer la dimension de l'ensemble $\{B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, telle que $ABA = 0\}$

Exercice 4.15
Soit P un projecteur. Montrer l'équivalence
$(rgP = 1) \Leftrightarrow (\forall Q$ projecteur, $(PQ = QP = Q \Rightarrow P = Q))$

Exercice 4.16
Calculer le déterminant $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (b) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (a) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $a, b, (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des nombres complexes avec $a \neq b$.

Indication : on pourra commencer par étudier $\Delta(x) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 + x & & & (b+x) \\ & \lambda_2 + x & & \\ & & \ddots & \\ (a+x) & & & \lambda_n + x \end{pmatrix}$

Exercice 4.17
Calculer $\det(\dfrac{1}{a_i+b_j})$ où $(a_i)_{1\leq i\leq n}, (b_j)_{1\leq j\leq n}$ sont des nombres complexes tels que $a_i+b_j\neq 0\ \forall i,j$.

Exercice 4.18
Calculer le déterminant $\det\begin{pmatrix} 1 & & & (2) \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ (2) & & & n \end{pmatrix}$

Exercice 4.19
Calculer $D_n = \det\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \cdots & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & ... & b_2 \\ b_3 & \ddots & \ddots & \ddots & b_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n & \cdots & b_3 & a_n+b_n \end{pmatrix}$

Exercice 4.20
$E=\mathbb{R}_n[X]$. Soit u l'application définie sur E par $u(P)=X^nP(\dfrac{1}{X})$.
Montrer que $u\in\mathcal{L}(E)$. Calculer u^2 puis caractériser u.

Exercice 4.21
Soit $n\in\mathbb{N}^\times$, $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et f_A l'application de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f_A(X)=AX+XA$.
Calculer $tr(f_A)$.

Exercice 4.22
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $n\in\mathbb{N}^*$, $(A,B)\in(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et C la matrice de $\mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{K})$ définie par blocs $C=\begin{pmatrix} A & B \\ B & A\end{pmatrix}$.
Montrer que $\mathcal{X}_C=\mathcal{X}_{A+B}\mathcal{X}_{A-B}$ ($\mathcal{X}$ désigne le polynôme caractéristique).

Exercice 4.23
Soit k un entier non nul. L'équation $X^k=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 1 \\ 0 & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$ possède-t-elle des solutions dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 4.24
On considère la matrice $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $\left\{\begin{array}{c} a_{i,j}=C_j^i \text{ si } i\leqslant j \\ 0 \text{ sinon}\end{array}\right.$.

1. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
(Indication : on explicitera l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont la matrice dans la base canonique est A.
2. Soit $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ deux familles de nombres complexes telles que
$$\forall j\in\{1,..,n\},\ b_j=\sum_{k=1}^n C_j^k a_k.$$
Expliciter les a_i en fonction des b_j.
3. Application : on veut dénombrer l'ensembles des surjections de $\{1,..,n\}$ dans $\{1,..,p\}$ (avec $n\geq p$). On note
$\cdot$ $F_{n,p}$ l'ensemble des applications de $\{1,..,n\}$ dans $\{1,..,p\}$
$\cdot$ $S_{n,p}$ l'ensembles des surjections de $\{1,..,n\}$ dans $\{1,..,p\}$
$\cdot$ $F(n,p)=card(F_{n,p})$ et $S(n,p)=card(S_{n,p})$
(a) Calculer $F(n,p)$.
(b) Montrer que $F(n,p)=\sum\limits_{k=1}^{p} C_p^k S(n,k)$.
(c) En déduire $S(n,p)$

Exercice 4.25
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ et $x_0\in E$ tel que $(f^p(x_0))_{1\leq p\leq n}$ forme une base de E.
On appelle commutant de f l'ensemble $C(f)=\{g\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f\circ g=g\circ f\}$.

1. Montrer qu'il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i f^i$

2. Montrer que $C(f) = \{P(f),\, P \in \mathbb{R}[X]\}$.

3. Quelle est la dimension de $\mathcal{C}(N)$?

Exercice 4.26
Soit $E = \mathbb{R}^3$ et v un vecteur non nul de E. L'endomorphisme f défini par $f(x) = v \wedge (v \wedge x)$ est il diagonalisable ?

Exercice 4.27
Soit $A \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^{n+1} = 0_{n+1}$ et $A^n \neq 0_{n+1}$. Soit f de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $f(P) = P(A)$
f est -elle injective ? surjective ?

Exercice 4.28
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^\times$, $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2$.
Montrer que $(\forall\ X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ tr(AX) = tr(BX)) \implies A = B$.

Exercice 4.29
Soit $E = C^\infty([-1, 1], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note φ_n la forme linéaire sur E qui à f associe $f^{(n)}(0)$.
La famille des $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle libre ?

Exercice 4.30
Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ et (E) l'équation : $y'' + py' + qy = 0$.
On note S l'ensemble des solutions de (E) et D l'application de S dans S définie par $D(f) = f'$.

1. D peut elle être une homothétie ?

2. Déterminer les valeurs de p et q pour lequelles D n'est pas un isomorphisme de S.

3. Vérifiez que $D \circ D + pD + qId_S = 0$ et montrer qu'il existe des nombres complexes r_1 et r_2 tels que : $(D - r_1 Id_S) \circ (D - r_2 Id_S) = 0$.

4. Les applications $D - r_1 Id_S$ $D - r_2 Id_S$ peuvent-elles être inversibles ?

Exercice 4.31 (MP*)
Soit λ un nombre complexe, n un nombre entier non nul et f une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.
On pose $(A_\lambda^n(f))(x) = \int\limits_0^x e^{-\lambda(t-x)} \dfrac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$.

1. Montrer que A_λ^n est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $A_\lambda^n = (A_\lambda^1)^n$

2. Montrer que $(\dfrac{d}{dx} - \lambda)^n A_\lambda^n = Id_{C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

3. Montrer que $A_\lambda^1(\dfrac{d}{dx} - \lambda) = Id_{C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} - p$ où p est un certain projecteur que l'on caractérisera (ainsi A_λ^1 est "quasiment l'inverse" de l'opérateur $(\dfrac{d}{dx} - \lambda)$ et l'application $\lambda \mapsto A_\lambda^1$ est appelée traditionnellement la résolvante de l'opérateur $\dfrac{d}{dx}$).

4. En déduire l'image de A_λ^1 ainsi que son noyau.

5. Soit P un polynôme appartenant à $\mathbb{C}[X]$. Supposons que la décomposition de $\dfrac{1}{P}$ en éléments simples soit de la forme $\dfrac{1}{P(X)} = \sum\limits_{l=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{\alpha_{l,k}}{(X - \lambda_l)^k}$.
Montrer que la fonction $g = \sum\limits_{l=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{r} \alpha_{l,k} A_{\lambda_l}^k(f)$ est solution de l'équation différentielle $P(\dfrac{d}{dx})u = f$.

5 Réductions des endomorphismes.

Exercice 5.1
Soient a, b deux complexes, $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $F = \{u \in E \text{ tel que } u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0\}$.
On introduit l'endomorphisme Δ de E définit par $(\Delta u)_n = u_{n+1}$

1. Montrer que F est un espace vectoriel. Retrouver ce résultat en exprimant F à l'aide de Δ.
2. On suppose que $a^2 \neq 4b$.
   (a) Montrer qu'il existe deux complexes r_1 et r_2 tels que $F = \ker(\Delta - r_1 Id) \oplus \ker(\Delta - r_2 Id)$.
   (b) Expliciter chacun de ses noyaux.
   (c) En déduire F.
3. On suppose que $b^2 = 4a$.
   (a) Montrer que $F = \ker(\Delta - r_1 Id)^2$ pour un certain complexe r_1.
   (b) On considère l'opérateur R défini sur E par $u \mapsto (r_1^n u_n)$.
   Expliciter l'opérateur $H = R^{-1}\Delta R$ puis montrer que $u \in F$ ssi $R^{-1}u \in \ker H^2$.
   (c) Expliciter $\ker H^2$.puis déterminer F

Exercice 5.2
La matrice réelle $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 5.3
Soit a un nombre réel non nul et $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable, dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, à $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 5.4
Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus n. On pose : $\varphi(P) = (1+X)P' + P$.
Montrer que φ est un endomorphisme de E et étudier sa diagonalisabilité.

Exercice 5.5
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(k)$. Supposons qu'il existe λ et $\mu \in k$ et deux matrices U et V telles que (E) $\begin{cases} A = \lambda U + \mu V \\ A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \\ A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V \end{cases}$

1. Déterminer un polynôme annulateur de A
2. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^{\times}$, $A^p = \lambda^p U + \mu^p V$.
3. On suppose que $\lambda \neq \mu$. Soit X un vecteur propre de A. Montrer que X est un vecteur propre de U et de V.
4. On suppose en outre que $\mu\lambda \neq 0$, déterminer toutes les matrices A satisfaisant à (E).

Exercice 5.6
La matrice complexe $\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 5.7
On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique ssi il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), .., u^{n-1}(x_0))$ avec $n = \dim E$.

1. Montrer que si u possède n valeurs propres distinctes alors u est cyclique.

2. Montrer que si u est cyclique, alors u est nilpotent ssi u est nilpotent d'ordre n.

Exercice 5.8
Soient $0 < a_1 < .. < a_n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & a_4 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & 0 & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det A$.

2. Montrer que λ est valeur propre de A ssi $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{a_i + \lambda} = 1$.

3. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5.9
Effectuer la réduction de $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ -1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ puis déterminer ses puissances et ses racines carrées.

Exercice 5.10

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ tel que A^2 est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable ssi $\ker A = \ker A^2$.

2. Résoudre l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. Le résultat de 1 est-il encore vrai si l'on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

Exercice 5.11
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Effectuer la réduction de A.

2. Déterminer le commutant de A, $C(A) = \{M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AM = MA\}$.

3. Montrer que ce sont des polynômes de A.

4. Trouver les droites et les plans de$\mathbb{R}^3$ stables par A.

Exercice 5.12
A désigne la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Effectuer la réduction de A.

2. L'équation $X^2 = A$ est-elle soluble dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 5.13
Résoudre l'équation $X^3 + X^2 + X = 0$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$

Exercice 5.14
Soit N un matrice nilpotente. Discuter l'équation matricielle $X^2 = N$.

Exercice 5.15
Soit $A \in \mathfrak{M}_{3n}(\mathbb{K})$ tel que $A^3 = 0$ et $rg(A) = 2n$

1. On suppose que $n = 1$. Montrer que $A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Supposons n quelconque. Montrer $A \sim \begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$

Exercice 5.16
$E = \mathbb{R}_n[X]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f_{\alpha,\beta} : \begin{array}{c} E \to E \\ P \mapsto ((\alpha X + \beta)P)' \end{array}$

1. Déterminer les valeurs propres de $f_{\alpha,\beta}$ ainsi que les espaces propres correspondants.
2. Déterminer une CNS sur α, β pour que $f_{\alpha,\beta}$ soit diagonalisable.

Exercice 5.17
Soit $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MA\}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier rapidement que $\mathcal{C}(A)$ est un espace vectoriel.
2. A est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, la diagonaliser.
3. Déterminer $\mathcal{C}(A)$.

Exercice 5.18
Résoudre les équations matricielles sivantes
Indication : on pourra dans chaque diagonaliser la matrice qu second membre.

1. $X^2 = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -3 \\ -4 & 12 & 2 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$
2. $X^2 + X = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 8 \\ 3 & 2 & 6 \\ -7 & -7 & -11 \end{pmatrix}$

Exercice 5.19
Résoudre l'équation matricielle $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -6 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 5.20
On considère l'équation matricielle $X^2 + X = A$ où $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_n$

1. Déterminer un polynôme annulateur de A puis un polynôme annulateur de X.
2. Montrer que X est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
3. Montrer que tout vecteur propre de X est un vecteur propre de A.
4. Diagonaliser A. En déduire les solutions de (E).
5. Qu'en est-il sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5.21
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MA\}$.

1. A quelle condition sur a, A est-elle diagonalisable ?
2. Si la condition précédente sur a est satisfaite, montrer que $\mathcal{C}(A) = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}[X]\}$. Est-ce vrai si la condition sur a n'est pas satisfaite ?

Exercice 5.22
Soient deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A et B sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$

2. En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 2A & A \\ A & 3A \end{pmatrix}$ est diagonalisable

Exercice 5.23
Soit $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. On appelle indice de nilpotence de N le plus petit entier p non-nul tel que $N^p = 0$.

1. Montrer que $p \leqslant n$
2. Discuter l'existence de solutions à l'équation $X^2 = N$.
3. Discuter l'existence de solutions à l'équation $X^2 = I_n + N$
(on pourra considérer un polynôme P convenable tel que $\sqrt{1+x} \underset{x \to 0}{=} P(x) + o(x^n)$).)
4. Discuter l'existence de solutions à l'équation $X^2 = aI_n + N$ où $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 5.24
$E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit λ un nombre réel et u_λ l'endomorphisme de E défini par $(u_\lambda(P))(X) = XP'(X) - \lambda P(X)$.
Déterminer $Ker\ u_\lambda$, $Im\ u_\lambda$.

Exercice 5.25
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & . & 0 \\ 2 & 0 & 1 & . & . \\ . & 0 & 0 & . & 0 \\ . & 0 & . & . & 1 \\ n & 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}_n$.
Montrer que M admet une unique valeur propre dans $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5.26
Soit E un espace vectoiel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $mat(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ . & 0 & 1 & . & \vdots \\ . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.27
Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, p un projecteur de E et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ définie par
$\forall\ u \in \mathcal{L}(E), \quad \varphi(u) = \frac{1}{2}(p \circ u + u \circ p)$.
Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

Exercice 5.28
$E = \mathbb{R}_n[X]$ et u l'endomorphisme de E défini par $u(P) = P(X) + P(X+1)$

1. Déterminer $Ker\ u$, $rg(u)$, $Im\ u$ et le spectre de u.
2. Même question avec $v = u - 2Id_E$.
3. Montrer qu'il existe une famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ telle que $\forall k \in \{1, ..., n\}$ $\left\{ \begin{array}{l} P_k(X+1) = P_k(X) + P_{k-1}(X) \\ P_k(0) = 0 \\ P_0(X) = 1 \end{array} \right.$

Exercice 5.29
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et Δ l'endomorphisme de E défini par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est endomorphisme nilpotent d'ordre n.
2. Montrer qu'il existe une famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ telle que $\forall k \in \{1, ..., n\}$ $P_k(X+1) - P_k(X) = P_{k-1}(X)$.
3. Vérifier que l'on peut choisir P_k tel que
$\forall k \in \{1, ..., n\}$ $P_k(X) = \dfrac{X(X-1)...(X-k+1)}{k!}$ et $P_0(X) = 1$.
4. Déterminer la base duale correspondante (on pourra utiliser avec profit les opérateurs Δ^k).

Exercice 5.30
Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E tel que
$(u - Id_E)^3(u + 2Id_E) = 0$ et $(u - Id_E)^2(u + 2Id_E) \neq 0$.
L'endomorphime u est-il diagonalisable ?

Exercice 5.31
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. A est-elle semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$?
3. Comment peut-on calculer A^n ?

Exercice 5.32
$E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $D = \dfrac{d}{dx}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer le noyau de $(D - \lambda)^\alpha$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer les solutions appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle $P(D)u = 0$.

Exercice 5.33
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \text{ telle que } AB = BA\}$

1. On suppose que A est diagonalisable. Si $\lambda \in Sp(A)$, on note $m(\lambda) = \dim E_\lambda$.
   Montrer que $\dim \mathcal{C}(A) = \sum\limits_{\lambda \in Sp(A)} (m(\lambda))^2$. En déduire que $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$.
2. Montrer que $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$ si A est nilpotente d'indice n.
3. Montrer que $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$ dans le cas général.

Exercice 5.34
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0_n$. Montrer que $rg(A)$ est pair.

Exercice 5.35
Soit J la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 1 \\ 1 & 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}_n$.

1. Diagonaliser J.
2. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & .a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_3 & . & . & . & . & a_2 \\ a_2 & . & . & . & . & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & . & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}_n$
   où $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ sont n nombres réels.
3. Calculer $det(A)$ lorsque $\forall k \in \{0, ..., n-1\}$ $a_k = k + 1$.

Exercice 5.36
Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients dans k telle que $A^3 + A^2 + A = 0_n$.

1. $k = \mathbb{C}$. Déterminer toutes les matrices A solutions .
2. $k = \mathbb{R}$. Montrer que A est semblable sur $\mathbb{R}$ à la matrice $\begin{pmatrix} 0_{n-2r} & 0_r & 0_r \\ 0_r & -\frac{1}{2}I_r & -\frac{\sqrt{3}}{2}I_r \\ 0_r & \frac{\sqrt{3}}{2}I_r & -\frac{1}{2}I_r \end{pmatrix}$ où r est un entier tel que $0 \leq r \leq \dfrac{n}{2}$.

Exercice 5.37 (MP*)
Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & e & c & b \\ b & c & e & a \\ c & b & a & e \end{pmatrix}$ où a, b, c, e sont des nombres réels.

Exercice 5.38
On considère l'équation dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ (E) : $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si la solution existe, elle commute avec A puis qu'elle est diagonaliable sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Exercice 5.39
Résoudre dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation matricielle
$A^3 + 2A^2 - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.40
Résoudre dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation matricielle $X^2 - X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 5.41 (MP*)
Soit A, B deux matrices appartenant à $\mathfrak{M}_n(k)$ telles que $AB = BA$.

1. On suppose que A et B sont diagonalisables.
   Montrer qu'il existe une matrice P appartenant à $GL(n, k)$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.
2. On suppose que A possède n racines distinctes. Montrer que B est diagonalisable dans une certaine base de vecteurs propres de A.

Exercice 5.42 (MP*)
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(k)$. On suppose que A est diagonalisable. Déterminer la dimension du commutant $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathfrak{M}_n(k)$ telle que $AB = BA\}$ de A

Exercice 5.43
Résoudre dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation matricielle $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & -8 & -1 \\ 4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.44 (MP*)
$GL(2, \mathbb{Z}) = \{g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ avec $\forall k \in \{1, .., 4\}$, $a_k \in \mathbb{Z}$ et $det(g) = \pm 1\}$
Soit g un élément d'ordre fini de $GL(2, \mathbb{Z})$ i.e. il existe k tel que $g^k = I_2$.

1. Montrer que $g^{12} = I_2$.
2. Quelles sont les valeurs possibles pour $Tr(g)$?
3. En déduire tous les éléments d'ordre fini de $GL(2, \mathbb{Z})$ puis montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de sous-groupes finis de $GL(2, \mathbb{Z})$.

6 Espaces eucliens et hermitiens.

Exercice 6.1
Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall\ x \in E,\ < u(x), x >= 0$

Montrer que $E = Ker\ u \overset{\perp}{\oplus} Im\ u.$ et que le rang de u est pair.

Exercice 6.2
Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, quelle est la transormation géométrique dont la matrice est

$\cdot\quad A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & -1 \\ -4 & 1 & -8 \end{pmatrix} \qquad \cdot\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

Exercice 6.3
$E = \mathbb{R}_n[X]$ si $P, Q \in E$ on pose $< P, Q >= \int\limits_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$

1. Vérifier que $<, >$ définit bien un produit scalaire
2. Soit H l'endomorphisme de E défini par
   $(H(P))(X) = XP''(X) + (1 - X)P'(X)$
   (a) Calculer ${}^tH$.
   (b) En déduire qu'il existe une base $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ de E constitué de vecteurs propres de H.
   (c) Que vaut $\int\limits_0^{+\infty} P_i(t)P_j(t)e^{-t}dt$?

Exercice 6.4
$E = \mathbb{R}_n[X]$ si $P, Q \in E$ on pose $< P, Q >= \int\limits_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

1. Vérifier que $<, >$ définit bien un produit scalaire
2. Soit H l'endomorphisme de E défini par
   $(H(P))(X) = -P''(X) + XP'(X)$
   Montrer que H est symétrique En déduire que H est diagonalisable

Exercice 6.5
Considérons la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A \in SO(3, \mathbb{R})$ ssi$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \end{cases}$
2. En déduire que a, b, c sont solutions d'une équation de la forme
   $x^3 - x^2 + k = 0$ avec $k \in [0, \frac{4}{27}]$

Exercice 6.6
On considère $E = \mathbb{R}^4$ muni de la base canonique et du produit scalaire canonique.
Soit$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ et $\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.
Dans la base canonique :

1. Déterminez la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F.
2. Donner l'expression de la distance d'un vecteur x à F.

Exercice 6.7
Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien et $e_1, ..., e_p$ une famille de vecteurs unitaires de E.

Montrer que $(e_1, ..., e_p)$ est une base orthonormale de E ssi $\forall x \in E, \parallel x \parallel^2 = \sum\limits_{i=0}^{p} |< x, e_i >|^2$.

Exercice 6.8
Soient A, B deux matrices appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 + B^2 = AB$ et $AB - BA \in GL_n(\mathbb{R})$
Montrer que $3 \mid n$ (on pourra considérer $S(x) = A + xB$ pour un x convenable)

Exercice 6.9
Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien et $u_1, ..., u_p$ une famille de vecteurs de E.
On pose $G(u_1, ..., u_p) = \det((< u_i, u_j >)_{i,j})$

1. (a) Montrer que la famille $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est libre ssi $G(u_1, ..., u_p) \neq 0$.
   (b) Supposons que la famille $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est libre. Soit $d(x, \mathrm{Vect}((u_i)_{1\leq i\leq p})$ la distance de x à $\mathrm{Vect}((u_i)_{1\leq i\leq p}$.
   Montrer que $d(x, \mathrm{Vect}((u_i)_{1\leq i\leq p})^2 = \dfrac{G(x, u_1, ..., u_p)}{G(u_1, ..., u_p)}$.
   (c) Calculer $\inf\limits_{(a_1,..,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int\limits_0^1 (1 + a_1x + a_2x^2 ... + a_nx^n)^n dx$.
2. **MP* : une version L^2 du théorème de Müntz**
   Soit $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de nombres réels positifs.
   (a) Soit k un entier positif. Calculer la distance de t^k à $\mathrm{Vect}(t^{\lambda_j}, j \in \mathbb{N})$ dans $L^2([0; 1])$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Vect}(t^{\lambda_j}, j \in \mathbb{N})$ est dense dans $L^2([0; 1])$ ssi la série $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{\lambda_j}$ est divergente.

Exercice 6.10 (Transformée de Fourier sur un groupe fini commutatif)
Soient $(G, +)$ un groupe fini commutatif de cardinal n et $E = \mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ (ensemble des fonctions de G dans $\mathbb{C}$).
$\forall u, v \in E$, on pose $< u, v >= \sum\limits_{g\in G} u(g)\overline{v(g)}$.

1. Montrer que $(E, <,>)$ est un préhilbert complexe de dimension n.
2. Pour tout $h \in G$, on défini T_h par $(T_hu)(g) = u(g + h)$.
   Calculer T_h^n, $T_hT_{h'}$ et $T_{h'}T_h$. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E qui diagonalise tous les T_h, $h \in G$.
3. On appelle caractère de G tout morphisme de $(G, +)$ dans $(\mathbb{U}, \times)$ et on note $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères de G.
   Soient e un vecteur de $\mathcal{B}$ et λ_h le nombre complexe tel que $T_he = \lambda_he$.
   Montrer que $h \mapsto \lambda_h$ est un caractère de G puis que $e = C\lambda$ pour une certaine constante.
4. En déduire que $card(\widehat{G}) = n$ et que si $h \neq 0 \Rightarrow \exists\lambda \in \widehat{G}$ tel que $\lambda_h \neq 1$ (on pourra considérer l'opérateur T_h).
5. Calculer $< \chi, \lambda >$ où $\chi, \lambda \in \widehat{G}$. En déduire que $\forall u \in E$, $u = \sum\limits_{\chi\in\widehat{G}} u_\chi\chi$ avec $u_\chi = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{g\in G} u(g)\overline{\chi(g)}$.

7 Réduction des endomorphismes autoadjoints.

Exercice 7.1
Quelle transformation géométrique représente $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$ euclidien.

Exercice 7.2
Soit A une matrice réelle symétrique. Discuter l'existence et le nombre de solutions réelles symétriques à l'équation $X^2 = A$.

Exercice 7.3
Soit S une matrice symétrique réelle d'ordre n et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres de S (non nécessairement distinctes). On note $S = [s_{ij}]$ avec $(i,j) \in \{1,..,n\}^2$.

1. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.
2. L'application qui à une matrice symétrique S associe $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2}$ (avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres de S (non nécessairement distinctes)) est -elle une norme ?
3. Montrer que $\max\limits_{i\in\{1,..,n\}} |\lambda_i| = \sup\limits_{||X||=1} ||SX||$.
4. On suppose maintenant que $0 < \lambda_1 < .. < \lambda_n$ et on désigne par e_i un vecteur propre unitaire associé à λ_i.
   Montrer que $\forall i \in \{1,..,n\} \quad \lambda_i = \sup\limits_{X\in F_i^{\perp}} ||SX||$ où $F_i = \mathrm{Vect}(e_{i+1},..,e_n)$

Exercice 7.4
On pose, pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\| A \|_2 = \sqrt{\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} {a_{i,j}}^2}$.

Montrer que si $\| A \|_2 < \sqrt{\dfrac{3n}{4}}$ l'équation $X^2 + X + I_n = A$ ne possède pas de solution X qui soit symétrique..

Exercice 7.5
On muni $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel. Soit A une matrice inversible antisymétrique de taille $2n$.

1. Montrer que si est H est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ stable par A, alors $H^{\perp}$ est stable par A.
2. Montrer que $\mathbb{R}^n$ s'écrit en somme directe de plan.
3. En déduire qu'il existe une matrice inversible P telle que $A = {}^t P \begin{pmatrix} 0_q & I_q \\ -I_q & 0_q \end{pmatrix} P$.

Exercice 7.6
Soit $S \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients réels symétrique définie positive (c'est-à-dire la forme quadratique associée est définie positive).

1. On suppose que $n = 2$. Montrer que l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \det \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & a & b \\ x_2 & c & d \end{pmatrix}$$

   où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = S$ est une forme quadratique définie négative.

2. Le résultat subsiste-t-il lorsque $n = 3$? lorsque n est quelconque ?

Exercice 7.7 (MP*)
$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice P triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont strictement positifs et telle que $A = ^t PP$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un convexe.
3. Montrer que l'application $det_{|\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$ est convexe.

Exercice 7.8
On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$. On pose pour tout entier k, $e_k(t) = \dfrac{d^k}{dt^k}((1-t^2)^k)$

1. Montrer que la famille $(e_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthogonale de $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que e_n possède n racines réelles distinctes $a_1, .., a_n$ appartenant à $]-1, 1[$.
3. Montrer qu'il existe n réels $b_1, .., b_n$ tels que
$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^{1} P(t)dt = \sum_{k=1}^{n} b_k P(a_k) \tag{7.1}$$
4. Montrer que l'égalité 7.1 est encore vraie si l'on suppose que $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$

Exercice 7.9
Soit q_A la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ euclidien définie par $q_A(x) = (Ax, x)$ où $A = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 2 \\ 7 & 11 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la signature de q_A et la réduire en base orthonormée.
2. Montrer que $(x, y) \mapsto (Ax, y)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$. On le notera par la suite $(,)_A$.
3. Soit M une matrice symétrique pour le produit scalaire usuel $(,)$.
Donner une CNS sur M pour que M soit symétrique pour le produit scalaire $(,)_A$.
4. Déterminer toutes les matrices symétriques B qui commutent avec A.
5. Résoudre dans $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'équation $(E) : M^2 = A$

Exercice 7.10
Soient $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des réels strictement plus grand que $\dfrac{1}{2}$.
Eudier la signature et le rang de la matrice $M = (a_{i,j})$ où $a_{i,j} = \dfrac{1}{a_i b_j + a_j b_i}$

Exercice 7.11
On considère sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. Soit H l'application définie par $(H(P))(X) = ((1-X^2)P'(X))' = (1-X^2)P''(X) - 2XP'(X)$.

1. Déterminer le spectre de H. Conclusion.
2. Calculer ${}^tH$. En déduire qu'il .il existe une base orthonormale $(L_k)_{1 \leq k \leq n}$ de E qui soient vecteurs propres de H et telle que
$$\forall k, l \in \{0, ..., n\} \quad \begin{cases} deg\ L_k = k \\ \int_{-1}^{1} L_k(t)L_l(t)dt = \delta_{kl}. \end{cases}$$
   (a) A l'aide d'intégrations par partie, montrer que $\forall q < k$, $\int_{-1}^{1} \dfrac{d^k}{dt^k}[(1-t^2)^k]L_q(t)dt = 0$.
   (b) En déduire que $\forall k \in \{0, ..., n\} \quad L_k(t) = c_k \dfrac{d^k}{dt^k}[(1-t^2)^k]$ où c_k est une constante que l'on calculera.
   (c) Montrer que L_k possède n racines appartenant à $]-1; 1[$.
3. Montrer que $\forall k \in \{0, ..., n-1\}$ $XL_k \in Vect(L_{k+1}, L_k, L_{k-1})$.

4. Expliciter trois nombres réels a, b, c tels que $L_{k+1}(X) + (aX + b)L_k(X) + cL_{k-1}(X) = 0$
   Les polynomes L_k sont les polynomes de Legendre. De façon générale, tous les polynômes orthogonaux (Laguerre, Tchebychev,...) s'obtiennent comme vecteurs propres de certains opérateurs sur des espaces euclidiens convenables. Ceci explique leurs interventions constantes en physique car chaque système physique est caractérisé par un opérateur agissant sur un espace de Hilbert.

Exercice 7.12
Soit $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $(A, B) = Tr(A^t B)$ défini un produit scalaire sur E.
   On considère par la suite que E est muni de ce produit scalaire.

2. Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que les applications $\varphi_P : A \mapsto AP$ et $\psi_P : A \mapsto P^{-1}AP$ sont orthogonales.

3. Réciproquement, si φ_P (resp. ψ_P) appartient à $O_n(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$, peut-on affirmer que $P \in O_n(\mathbb{R})$?

Exercice 7.13 (MP*)
Soit E_N l'ensemble des suites complexes N-périodiques.
$\forall\ u, v \in E_N$, on pose $< u, v >= \dfrac{1}{N} \sum\limits_{k=0}^{N-1} u_k \overline{v_k}$

1. Montrer que $(E_N, <, >)$; est un espace hermitien de dimension finie.
   Soit m un nombre entier positif. On définit l'opérateur T_m sur E_N par $\forall\ u \in E_N, \forall n \geq 0,\ (T_m u)_n = u_{n+m}$

2. Montrer que $\forall m \geq 0$, T_m est un opérateur unitaire.

3. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathfrak{B}$ de E_N qui diagonalise simultannément tous les T_m.

4. Expliciter une telle base.

Exercice 7.14 (MP*)
Soit G un sous-groupe fini de $GL(n, k)$ avec $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On désigne par $<, >$ le produit scalaire usuel sur k^n et posons $\forall x, y \in k^n \quad < x, y >_G = \dfrac{1}{\mathrm{card}(G)} \sum\limits_{k=1}^{n} < gx, gy >$.

1. (a) Montrer que $<, >_G$ un produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$.
   (b) Montrer que tout les éléments de G sont des endomorphismes hermitiens pour ce produit scalaire.
   (c) En déduire que G est conjugué à un sous groupe fini de $O(n, k)$.

2. Applications.
   (a) Montrer que tout sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{R}) = \{g \in GL(2, \mathbb{R})$ tel que $det(g) = 1\}$ est cyclique.
   (b) A l'aide de l'exercice 5.44 déterminer tous les sous-groupes finis de $SL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{R}) \bigcap GL(2, \mathbb{Z})$.
   (c) Plus difficile. Déterminer tous les sous-groupes finis de $GL(2, \mathbb{Z})$
   (indication : on pourra remarque que $H = G \bigcap SL(2, \mathbb{Z})$ est un sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{Z})$ et que $G = H \bigcup wH$ où $w \in G \backslash H$ avec $w^2 \in H\}$.

8 Fonctions d'une variable réelle.

Exercice 8.1
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{pq}{p^2+q^2} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \\ \dfrac{x}{x^2+x+1} & \text{sinon} \end{cases}$

Etudier la continuité de f.

Exercice 8.2
Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tel que $f(x+y)+f(x-y) = 2(f(x)+f(y))$.

Exercice 8.3
Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a;b]$ telle que $f(a) = f(b)$.

1. Montrer que $\forall x \in [a;b]$, $\exists\ c_x$ tel que $f(x) = f(a) + \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x)$.
2. En déduire que si $f'' \geq 0$ sur $[a;b]$, alors f est convexe sur $[a;b]$.

Exercice 8.4
Soit f une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$, telle que

1. $f(x) + f'(x) \underset{x\to+\infty}{\to} l$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} l$.
2. $f''(x) + f'(x) + f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} l$. . Que dire de f et f' en $+\infty$?

Exercice 8.5
Soit f une application de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x_0 \in]a,b[$, on dit que f admet une dérivée symétrique en x_0 si $\underset{h\to0}{lim}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$existe. Dans ce cas, on note $f'_s(x_0)$ cette limite.

1. A-t-on l'équivalence : (f admet en x_0 une dérivée à droite et une dérivée à gauche)$\Leftrightarrow$ ($f'_s(x_0)$ existe).
2. Montrer que f croissante et f admet une dérivée symétrique entraine f'_s positive.
3. A-t-on, pour f admettant une dérivée symétrique sur $]a,b[$, l'équivalence : (x_0 extremum)$\Leftrightarrow$ ($f'_s(x_0) = 0$).

Exercice 8.6
Soit f une fonction de classe C^n sur $]a,b[$. Soit $x_0 \in]a,b[$.
Calculer $\underset{h\to0}{lim}\dfrac{1}{h^n}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f(x_0+kh)$.

9 Suites numériques.

Exercice 9.1
Calculer le nombre $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+.....}}}$

Exercice 9.2
Etudier la suite $w_0 = \frac{1}{2}$ et $w_n = (1 - w_{n-1})^2$.

Exercice 9.3
Etudier la suite $v_0 = 0$ et $v_n = cos(v_{n-1})$.

Exercice 9.4
Soit α un nombre réel. On pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k\alpha)}{n+k}$.
Montrer que la suite u possède une limite et la calculer.

Exercice 9.5
Soit $a \in \mathbb{R}$. Etudier la suite $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}) \sin(ka)$.

Exercice 9.6
Montrer que $\forall n \geq 0, \exists! x_n \in \mathbb{R}$ tel que $x_n + ln(x_n) = n$.
Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.

Exercice 9.7
Etudier la suite $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$ où x_0 est un nombre strictemen positif puis donner une développement asymptotique à deux termes de cette suite.

Exercice 9.8
Soit x la suite définie par $x_{n+1} = x_n + x_n^2$ avec $x_0 > 0$.
Montrer qu'il existe un nombre C strictement positif tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C^{2^n}$.

10 Séries numériques.

Exercice 10.1
Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(1+\dfrac{2}{n(n+3)})$ et calcul éventuel de sa somme

Exercice 10.2
Etudier la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.

Exercice 10.3
Soit α un nombre réel, déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{(\ln n)^\alpha + (-1)^n}$

Exercice 10.4
Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{(ln(n))^{ln(n)}}$

Exercice 10.5
Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{n}ln(n)}{n^2+1} sin(n\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est fixé.

Exercice 10.6
Nature de la série de terme général $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ où $\alpha > 1$.

Exercice 10.7
On considère les deux suites a et b définies par $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geqslant 0$, $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$

1. Montrer que a converge vers une limite l que l'on explicitera
2. On pose $u_n = a_n - b_n$.
   (a) Majorer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la vitesse de convergence de u.
   (b) Nature de la série $\sum\limits_n (a_n - l)$

Exercice 10.8
a) Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ existe et donner sa valeur.
b) Que dire de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$?

Exercice 10.9
Etudier la série de terme général : $u_n = \sin(\sqrt{n^2+a^2}\pi)$ avec a un réel positif donné.

Exercice 10.10
Déterminer la nature de la série de terme général $(n \geq 1)$ $\int\limits_0^{\frac{1}{n}} \dfrac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}} dx$

Exercice 10.11
Soient α, β deux nombres réels tels que $\alpha \neq \beta$. Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$.

Exercice 10.12
Etudier les différents types de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{sin(n)+\sqrt{n}}$.

Exercice 10.13
On pose $u_n = \dfrac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ et $v_n = ln(\dfrac{u_{n+1}}{u_n})$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$ converge.

2. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C(\frac{n}{e})^n\sqrt{n}$.

3. A l'aide de l'exercice 16.1, déterminer C.

Exercice 10.14
On pose $R_k = \sum\limits_{n\geq k+1} \frac{(-1)^n}{n}$

1. Justifier l'existence de R_k.

2. Etudier la convergence absolue de la série $\sum\limits_{k\geq 1} R_k$.

3. Quel est le signe de R_k ? Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{k\geq 1} R_k$.

Exercice 10.15
Soient a, b, c trois nombres entiers positifs et z un nombre complexe de module strictement inférieur à 1.
Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{cn}}{1-z^{an+b}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{bn}}{1-z^{an+c}}$.

Exercice 10.16
Pour $s \in \mathbb{R}$, posons $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ et $\zeta_a(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$. Soient $2 = p_1 < p_2 < .. < p_n < ..$ la suite des nombres premiers.

1. Exprimer $\zeta_a(s)$ en fonction de $\zeta(s)$ pour $s > 1$.

2. Donner un développement asymptotique à deux termes de $\zeta(s)$ lorsque $s \to 1^+$.

3. Montrer que $\forall s > 1$, $\zeta(s) = \prod\limits_{n=1}^{+\infty} (1 - p_n^{-s})^{-1}$.

4. Pour $s > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} p_n^{-s}$ est-elle convergente ? La série $\sum\limits_{n\geq 1} p_n^{-1}$ est-elle convergente ?

Exercice 10.17
Montrer qu'il existe un réel A tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{ln(k)}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}ln^2(n) + A + o(1)$.

En déduire qu'il existe un réel C tel que $\prod\limits_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} Cn^{\frac{ln(n)}{2}}$

Exercice 10.18
Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!(n+1)}$

Exercice 10.19
Nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} ln(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}})$ en fonction du réel positif a

Exercice 10.20

1. Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ (on pourra calculer $\int\limits_0^1 t^{2k}dt$)

2. Nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \ln(\tan(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}))$

Exercice 10.21
On considère la suite x définie par $x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{x_n}$ avec $x_0 > 0$.

1. Déterminer la limite de x.

2. Etudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{\sqrt{x_n}}$.

3. Déterminer un équivalent de x_n lorsque $n \to +\infty$ (on pourra introduire $v_n = \ln x_n$)

Exercice 10.22
Soit $\alpha > 0$, on pose $R_n = \sum\limits_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^\alpha}$.
Etudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} R_n$ lorsque $\alpha \geqslant 1$ puis lorsque $0 < \alpha < 1$.

11 Suites de fonctions.

Exercice 11.1
Etudier les différents types de convergence de la suite de fonctions $n\sin(x)(\cos x)^n$.

Exercice 11.2
Etudier les différents types de convergence de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(t) = \dfrac{2^n t}{1+n2^n t^2}$.

Exercice 11.3
Etudier les différents types de convergence de la suite de fonctions définies sur $[0;\pi]$ par $f_n(t) = \dfrac{\sin^2(nt)}{n\sin^2(t)}$.

Exercice 11.4
On pose $u_n(x) = (1+\dfrac{x}{n})^n$.

1. Etudier la convergence simple de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
2. Etudier la convergence uniforme de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ sur tout compact (on pourra étudier auparavant la fonction $\dfrac{u_n}{\underset{n\to+\infty}{lim} u_n}$).
3. Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 11.5
On pose $u_n(x) = (1+\dfrac{x}{n})^n e^{-x} 1_{[0;n]}(x)$. Etudier les différents types de convergence de cette suite.

Exercice 11.6
Etudier la suite de fonctions définies de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x(1+nx)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$

Exercice 11.7
Etudier la convergence de la suite de fonctions définies sur $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ par :
$f_0(x) = x$ et $f_n(x) = sin(f_{n-1}(x))$.

Exercice 11.8 (MP*)
Soit, pour tout entier n non nul, $\varphi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c_n}(1-t^2)^n & \text{si } \mid t \mid \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ où $c_n = \int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt$.
Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi_n(t)dt$

1. Calculer c_n.
2. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \int\limits_{|t|>\varepsilon} \varphi_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
3. Montrer la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur tout segment.
4. En déduire une version faible du théorème de Stone-Weierstrass.

Exercice 11.9 (MP*)
Pour tout entier n non nul, on pose $\psi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{d_n}\dfrac{\sin^2(\frac{nt}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})} & \text{si } t \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n^2 \text{ sinon} \end{cases}$ où $d_n = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\sin^2(\frac{nt}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})}dt$.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, on pose $f_n(x) = \int\limits_0^{2\pi} f(x-t)\psi_n(t)dt$

1. Montrer que $\forall \varepsilon \in]0;\pi[, \int\limits_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \psi_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
2. Montrer la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[0;2\pi]$
3. En déduire que toute fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

12 Séries de fonctions.

Exercice 12.1
Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tel que $f(2x) - f(x) = \dfrac{4x^2}{1+2x}$?
Donner un équivalent des solutions f en $+\infty$.

Exercice 12.2
On pose $u_n(x) = x^{2n} \ln x$ pour tout $x \in [0,1]$.

1. Etudier la convergence simple de la série de terme général u_n et calculer la somme de cette série.
   (a) Etudier la convergence uniforme de cette série.
   (b) Montrer l'intégrabilité terme à terme sur $[0,1]$ de cette série et obtenir une égalité remarquable.

Exercice 12.3
Effectuer l'étude complète de la fonction $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

Exercice 12.4
Soit a un nombre réel strictement positif et f la fonction définie par $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n+a}$.

1. Détermner le domaine définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer une autre expression de f à l'aide de fonctions élémentaires

Exercice 12.5 (MP*)
Considérons les fonctions $R_k(x) = \sum\limits_{n \geq k+1} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ et $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} R_k(x)$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}^-$.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$ (monotonie, limite en $+\infty$ et 0 ainsi qu'un équivalent en 0 de f).
3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12.6
On pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n n}{n^2 + x^2}$.

1. Etudier la convergence simple de la série de terme général u_n.
2. Montrer que la convergence uniforme de la série de terme général u_n sur tout segment $[-a, a]$. Qu'en déduit-on ?
3. Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de terme général u_n.

Exercice 12.7
On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n + n^2 x}$
Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ puis que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{C}{x}$ pour une certaine constante C

Exercice 12.8
Etudier les différents types de convergence de $\sum\limits_{n \geq 0} n x^\alpha e^{-n^2 x}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Exercice 12.9
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On pose $\| f \|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} | f(x) |$.

1. On définie la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ par $f_0 = f$ et $\forall n \geqslant 0$, $f_{n+1}(x) = \int\limits_0^x f_n(t) dt$.
   (a) Montrer que $| f_n(x) | \leqslant \dfrac{x^n \| f \|_\infty}{n!}$ $\forall n \geqslant 0$.

(b) En déduire la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite (f_n).

2. On définie une autre suite de fonctions par $g_0 = f$ et $\forall n \geqslant 0$, $g_{n+1}(x) = 1 + \int\limits_0^x g_n(t)dt$.

   (a) On supose que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction g. Déterminer g.

   (b) Etudier la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite (g_n) (on pourra considérer $g_n - g$).

Exercice 12.10
Sur $]0,+\infty[$, on considère la suite de fonctions définies par :

$$f_0 = Id \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}).$$

1. Montrer que, pour tout n, f_n est bien définie.
2. Etudier sa convergence simple
3. Etudier sa convergence uniforme

Exercice 12.11
Soit une fonction $f : [a,b] \to [a,b]$ de classe C^1 sur son domaine, $(f_n)_n$ la suite des fonctions définie par:

$$f_0(x) = x, \ f_1 = f, \text{ et } f_n(x) = f(f_{n-1}(x)) \ \forall n \geqslant 1.$$

1. Montrer que si $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| < 1 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (f_k(x) - f_{k-1}(x))$ converge uniformément. sur $[a,b]$.
2. En déduire que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction constante C, que $f(C) = C$ et que C est unique.

Exercice 12.12
Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ une série convergente de complexes.
Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+$, telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \leqslant B_n$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n B_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ (on pourra introduite $A_{p,n} = \sum\limits_{k=p}^{n} a_k$).
2. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n(1) = 1$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 1, \ x<1} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n B_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

13 Séries entières.

Exercice 13.1
Calculer le rayon de convergence puis effectuer l'étude sur le disque de convergence de
a) $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n} z^n$ b) $\sum_{n\geq 0} ln(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}})z^n$.

Exercice 13.2
Soit $a \in]-\pi;\pi[$. Donner le développement en série entière de
$x \mapsto ln(1-2xcos(a)+x^2)$.

Exercice 13.3
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $b_{2n} = a_n$, $b_{2n+1} = 0$.
Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$?

Exercice 13.4
Soit l'équation différentielle : $x^2y" + 4xy' + (2-x^2)y - 1 = 0$.
Montrer que $x \mapsto \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$ est une solution développable en série entière. Y en a-t-il d'autres ?

Exercice 13.5
Déterminer les solutions développable en série entière (au voisinage de 0) de $(1+x^2)y" + xy' - 4y = 0$.

Exercice 13.6
1. Montrer qu'il existe deux suites complexes (a_n) et (b_n) telles que $\frac{z}{2z^2+5z+2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_nz^n + b_nz^{-n})$ si $|z| = 1$

1. En déduire le développement en série de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{5+4\cos x}$ (on posera $z = e^{ix}$).

2. Donner la valeur de $\int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{5+4\cos x}dx$

Exercice 13.7
1. Développer en série de Fourier la fonction $t \mapsto |\sin t|$.

1. Déterminer les solutions 2π-périodiques solutions de $y" - y = |\sin t|$

Exercice 13.8
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière telle que $R_c((a_n)_{n\geq 0}) = +\infty$. $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

1. Calculer $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta$. En déduire que si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante

2. Application : soit $P \in \mathbb{C}[X]$ qui ne possède pas de racines. Montrer que $\frac{1}{P}$ est constant. Conclusion

Exercice 13.9
Convergence et calul de $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(n+5)}{(n+1)(n+2)}$

Exercice 13.10
Soit α un nombre réel. Calculer le rayon de convergence puis la somme dans le disque de convergence de $\sum_{n\geq 0} \cos(\frac{2k\pi}{5}+\alpha)z^k$

Exercice 13.11
On note $d_{n,k} = card\{(n_1,...,n_k) \in \mathbb{N}^k$ tel que $n_1+n_2+...+n_k = n\}$.

1. Développer en série entières de deux façons différentes $\frac{1}{(1-z)^k}$.

2. En déduire l'expression de $d_{n,k}$ en fonction de n et k.

Exercice 13.12
On pose $d_n = card\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^k$ tel que $2n_1 + 3n_2 = n\}$.
Exprimer d_n en fonction de n (on pourra développer en série entière $\dfrac{1}{(1-z^2)(1-z^3)}$ de deux façons).

Exercice 13.13
Soit a un nombre réel.

1. Montrer que la fonction $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$ est de classe c^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dévellopable en série entière et expliciter ce développement.
3. Quel est son rayon de convergence ?

Exercice 13.14
Soit $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

1. Montrer que $\forall n \geq 0$, $\alpha^n + \alpha^{-n} \in \mathbb{Z}$.
2. On note $\{\alpha^n\}$ la distance de α^n à $\mathbb{Z}$. Quel est le rayon de convergence.de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \{\alpha^n\} z^n$?
3. Soit α une solution de $x^2 + ax + 1 = 0$ où $a \in \mathbb{Z}$.
   Quel est le rayon de convergence.de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \{\alpha^n\} z^n$?

Exercice 13.15
Soient $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| \neq R$. Calculer $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{e^{itn}}{(Re^{it} - z)} dt$.

Exercice 13.16

1. Trouver la solution f de l'équation différentielle $(E) : y' = 2xy + 1$ qui vérifie $f(0) = 0$.
2. Donner le développement en série entière de f.
3. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$

Exercice 13.17

1. Développer en série entière, au voisinage de 0, $f(x) = \arctan \dfrac{x \sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}$
2. Déterminer le développement en série de Fourier de $\alpha \mapsto \arctan \dfrac{x \sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}$
3. Retrouver le déveoppement en série de Fourier de la fonction f impaire et 2π-périodique telle que $f(x) = x$ $\forall x \in [0, \pi]$.

14 Séries de Fourier.

Exercice 14.1

1. Développer en série de Fourier l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 2π-périodique, paire et telle que $f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$ si $x \in [0, \pi]$.
2. En déduire : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$, et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 14.2

Soit a un nombre réel. Développer en série de Fourier la fonction f 2π-périodique définie par $f(t) = ch(at)$ $\forall t \in]-\pi;\pi[$.

Exercice 14.3

Développer en série de Fourier la fonction $t \mapsto | sin^3 t |$.

Exercice 14.4

Soit x un nombre réel.

1. Développer en série de Fourier la fonction f 2π-périodique telle que $f(t) = cos(xt)$ $\forall t \in]-\pi;\pi[$.
2. En déduire un développement en série de fraction de $\cot(\pi x)$.
3. Donner un développement en série entière de $\cot(\pi x) - \frac{1}{\pi x}$.

Exercice 14.5

Trouver toutes les solutions 2π-périodique de $y^{(4)} + y^{(2)} + y = | sin(x) |$.

Exercice 14.6

Soit $\alpha \in]-\pi;\pi[$. Déterminer le développement en série de Fourier de $t \mapsto \frac{1}{1 - \cos(\alpha)\cos(t)}$

Exercice 14.7

Soit a un nombre réel appartenant à $]0;1[$. Discuter de l'existence et de l'unicité de la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \text{f est continue sur } \mathbb{R}, \text{ paire et } 2\pi\text{-périodique,} \\ \forall k \geq 0, \ \int\limits_0^{2\pi} f(t)cos(kt)dt = 2\pi(k+1)a^k. \end{cases}$$

Exercice 14.8 (MP*)

Soit $a > 0$ et f, g deux fonctions définies par $f(x) = e^{-at^2}$, $g(t) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} f(\frac{x}{2\pi} + n)$.

1. Vérifier que g est C^1 sur $\mathbb{R}$ et est 2π-périodique.
2. Montrer que $c_n(g) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} e^{-2\pi int} dt$.
3. Vérifier que $x \mapsto \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} e^{-2\pi ixt} dt$ satisfait à une équation différentielle.
4. En déduire l'expression de $c_n(g)$ en fonction de n et de a, puis une autre expression de $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} f(n)$ (l'égalité obtenue est un cas particulier de la formule de Poisson).

Exercice 14.9

Soit $a \in [0; 2\pi]$ et f la fonction 2π-périodique telle que $f_a(x) = \begin{cases} x(2\pi - a) \text{ si } 0 \leq x \leq a \\ a(2\pi - a) \text{ si } a \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$

1. Montrer que f est développable en série de Fourier.
2. En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{cos(na)}{n^2}$.

Exercice 14.10
Développer en série de Fourier $t \mapsto \dfrac{1}{a - e^{it}}$ où $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{U}$.

Exercice 14.11
Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mid a \mid < 1$. Existence et unicité du problème

$$\begin{cases} f \in C^0(\mathbb{R}) \text{ et } f \text{ est paire} \\ \forall k \geq 0, \ \int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos(kt) = (k+1)a^k \end{cases}$$

Exercice 14.12

1. Existe-t-il une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que $\forall x \in]-\pi, \pi[$, $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$
2. Existe-t-il une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que $\forall x \in [0, \pi[$, $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \sin(nx)$

Exercice 14.13
Soit g l'application 2π-périodique nulle sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, paire et telle que :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad g(x) = \cos x.$$

1. Déterminer le développement en série de Fourier de g.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer, s'il en existe, une solution 2π-périodique de l'équation différentielle :

$$y" + ay = g.$$

Exercice 14.14
Soient f et g des applications continues, paires et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a_n(f)$ et $a_n(g)$ leurs coefficients de Fourier.
On pose $h(x) = \dfrac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(f)a_n(g)\cos nx$.

1. Définition, continuité de h ?
2. h est-elle la somme de sa série de Fourier ?
3. Montrer que $\|h\|_\infty \leqslant 2\,\|f\|_\infty\,\|g\|_\infty$.
4. Pour f fixé, soit $T : g \mapsto h$. soit λ une valeur propre non nulle de T. Montrer que l'ensemble des n tels que $a_n(f) = \lambda$ est un ensemble fini.
   En déduire que, lorsque g est dans l'espace propre associée à la valeur propre λ, la suite $(a_n(g))$ est à support fini. Préciser le cardinal de son image.

Exercice 14.15
Montrer que, sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser, on a : $|\sin x| = \dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^2 nx}{4n^2-1}$.

15 Intégration

Exercice 15.1
Existence et calcul de

1. $\int\limits_{0}^{1} \frac{ln(x)}{\sqrt[3]{1-x}} dx$
2. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2}$
3. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-x^2}}$
4. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}$
5. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{ln(x)}{x^2+1} dx$
6. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}$

Exercice 15.2
Convergence de l'intégrale $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}+\cos x}\ dx$.

Exercice 15.3
Soient a et b dans $\mathbb{R}$. Convergence de $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{|\sin ax \sin bx|}{x^2} dx$

Exercice 15.4
Soient a et b deux réels. Existence et calcul de $\int\limits_{0}^{+\infty} \ln x \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx$

Exercice 15.5
Convergence de $\int\limits_{\mathbb{R}} (1+\frac{1}{x^2})^x dx$

Exercice 15.6
Soit $a > 0$.

1. Montrer que $t \mapsto \frac{sin(t)}{e^{at}-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$
2. Montrer que $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{sin(t)}{e^{at}-1} dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^2n^2+1}$
3. En déduire un équivalent de $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{sin(t)}{e^{at}-1} dt$ quand $a \to +\infty$

Exercice 15.7
Pour tout entier positif n, on considère $I_n = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{e^x-1} dx$.

1. Montrer que I_n est bien définie et déterminer la limite de I_n lorsque $n \to +\infty$.
2. Donner un équivalent de I_n en $+\infty$.

Exercice 15.8
Soient $a > b > 0$. Convergence et calcul de $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} dt$

Exercice 15.9
Calculer l'intégrale $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2}$.

Exercice 15.10
Soientt a, b deux nombres réels tels que $b < a$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $\underset{x\to+\infty}{lim} f = l$ et $\underset{x\to-\infty}{lim} f = l'$. Montrer que l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))dx$ est convergente et la calculer.

Application : calculer $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{ch(a+x)ch(b+x)}$.

Exercice 15.11
Soit z un nombre complexe tel que $\mid z \mid \neq 1$.

Justifier que l'intégrale $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{e^{ipx}}{z-e^{ix}}dx$ existe et la calculer.

Exercice 15.12
Soit $I_n = \int\limits_{0}^{1} x^n sin(\pi x)dx$.

Calculer I_0 et I_1. Etablir une relation entre I_n et I_{n+2}. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{n^2}$.

Exercice 15.13
Pour toute fonction f intégrable sur $[0, 1]$, on pose $I_n(f) = \int\limits_{0}^{1} t^n f(t)dt$

1. Si $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $I_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{a}{n} + o(\dfrac{1}{n})$ et expliciter a.
2. Si $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$, montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $I_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$ et expliciter a, b.

Exercice 15.14
On pose $a_n = \int\limits_{0}^{1} \dfrac{x^n}{1+x^n}dx$.

Montrer que $a_n \to 0$ puis que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}$

Exercice 15.15
Déterminez $\underset{n\to+\infty}{lim} \int\limits_{0}^{1} \dfrac{nx-1}{(x\ln(n)+1)(1+nx^2\ln(n))}dx$

Exercice 15.16
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite I définie par

$\forall n \geq 0,\ I_n = \int\limits_{0}^{2\pi} f(x) \mid sin(nx) \mid dx$ possède une limite et la calculer.

Exercice 15.17
Soient a et b deux nombres entiers strictement positifs et n un entier. On pose $P_n(X) = \dfrac{X^n(bX-a)^n}{n!}$.

1. Montrer que $\forall k \in \{0, ..., n-1\}$, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\dfrac{a}{b})$ sont des nombres entiers relatifs.

   On suppose dorénavant que $\pi = \dfrac{a}{b}$.
2. Montrer que $\int\limits_{0}^{2\pi} P_n(t)sin(t)dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
3. Montrer que $\forall n \geq 0$, $\int\limits_{0}^{2\pi} P_n(t)sin(t)dt$ est un nombre entier relatif
4. En déduire une contradiction. Conclusion.

Exercice 15.18
On pose $\Gamma(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$

1. Montrer que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} dt$.

2. En déduire que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^x}{x(x+1)..(x+n)}$.

Exercice 15.19
Pour $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{2} e^{-n|x|} \frac{(n\,|x|)^n}{(n-1)!}$.

1. Calculer l'intégrale de f_n sur $\mathbb{R}$.

2. Pour g continue et bornée de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, étudier lorsque n tend vers $+\infty$ l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)g(t)dt$

Exercice 15.20
On pose $u_n = (\sum\limits_{k=1}^{n} \exp(\frac{1}{n+k})) - n$
Déterminer la limite l de la suite u puis un équivalent de $u_n - l$

16 Intégrales à paramètres.

Exercice 16.1
Posons $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin\ t)^x dt$.

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2. Montrer que f est une fonction continue sur $\mathcal{D}_f$.
3. Etablir une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$, puis montrer que $xf(x)f(x+1)$ est une fonction constante.
4. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 16.2
Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)} dt$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Etudier la régularité de f.
3. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 16.3
Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} cos(xt) dt$.

1. Déterminer le domaine définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Montrer que f satisfait à une équation différentielle du premier ordre sur $\mathcal{D}_f$.
3. En déduire une autre écriture pour f.

Exercice 16.4
Considérons $w(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}e^{ixt}}{\sqrt{t}} dt$.

1. Vérifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. En déduire une autre expression de f.

Exercice 16.5
On considère la fonction f définie par $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ln(1+xcost)}{cost}$

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2. Montrer que f est C^1 sur $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_f$.
3. En déduire une autre écriture de f.

Exercice 16.6
On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{sin(t)}{t} dt$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et calculer f'.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 0$.
3. En déduire une autre écriture de f.

Exercice 16.7
$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{Arctan(t)}{t} dt$

1. Déetrminer $\mathcal{D}_f$.

2. Montrer que f est C^1 sur $\mathcal{D}_f$ et calculer f'

3. Limites de f aux bornes

Exercice 16.8
Etude et graphe de $x \mapsto \int\limits_x^{x^2} e^{-t^2} dt$.

Exercice 16.9
Soit $g(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} cos(xt)dt$

1. Montrer que g est C^1 sur $\mathbb{R}$

2. Montrer que g satisfait à une équation différentielle

3. En déduire g.

Exercice 16.10
Soit $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$

2. Montrer que f est C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\lim\limits_{0^+} f$

3. Calculer $f + f''$ puis que $f(x) = \int\limits_x^{+\infty} \frac{sin(t-x)}{t} dt$

4. En déduire que $\int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

Exercice 16.11
On pose $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\, dt$ et $g(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t^2+1}\, dt$.

1. Montrer que f et g sont définies et C^2 sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que f et g sont solutions de : $y" + y = \frac{1}{x}$.

3. Etudier les limites de f et g en $+\infty$.

4. Trouver une relation entre f et g.

Exercice 16.12
On pose $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin at}{1+t^2}$

1. Domaine de définition, continuité et dérivabilité de f.

1. Calculer f et $f"$. En déduire une équation différentielle satisfaite par f.

2. Expliciter f à l'aide de fonctions usuelles.

3. Limite en $+\infty$ de f et f' En déduire f.

Exercice 16.13
Soit $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

Domaine de définition, continuité, dérivabilité, calcul de f' puis de f. Calculer $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$

Exercice 16.14

1. Montrer que la relation $\int\limits_x^{f(x)} e^{t^2} dt = 1$ définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Exprimer f en utilisant $\varphi(x) = \int\limits_0^x e^{t^2}\,dt$.

3. Etudier f : continuité, dérivabilité, sens de variation, asymptote en $+\infty$.

Exercice 16.15
Soit $u \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, tel que $\forall k \in \{0,1,2\}$,$x \mapsto (1+x^2)^2 u^{(k)}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$

1. Montrer que $x \to (\mathcal{F}u)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(y)e^{-2\pi ixy}dy$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   Expliciter $\mathcal{F}u_t$ lorsque $u_t(x) = \exp(-\pi tx^2)$.

2. Montrer l'égalité de Poisson : $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} u(n) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}u)(n)$
   (on pourra dévelloper en série de Fourier la fonction $x \to \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u(\dfrac{x}{2\pi}+n))$.

3. Expliciter l'équation fonctionnelle satisfaite par $\Theta(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \exp(-\pi n^2 t)$.

4. Déterminer un équivalent de Θ aux bords de son intervalle de définition

Exercice 16.16
On pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n n}{n^2+x^2}$ et $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Etudier l'ensemble de définition de f.

2. Calculer $f(0)$.

3. Montrer que f est C^∞.

4. Calculer $\int\limits_0^{+\infty} e^{-at}\cos(bt)\,dt$.

5. En déduire que $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos xt}{1+e^t}\,dt$.

6. Développer f en $+\infty$ sous la forme : $f(x) = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x^4} + o(\dfrac{1}{x^4})$.

Exercice 16.17
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue tendant vers 1 en $+\infty$ et $f(0) = 1$. On pose $\phi(x) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\left(\dfrac{\sin xt}{t}\right)^2 dt$ ainsi que $H(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}dt$.

1. Quel est le domaine de définition de ϕ ? Exprimer la limite L en 0^+ de $\dfrac{\phi(x)}{x}$ à l'aide d'une intégrale.

2. Prouver que l'on a $L = \int\limits_0^{+\infty} \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}dt$.

3. Domaine de définition, continuité et dérivabilité de H.

4. Calculer H' puis expliciter H.

17 Equations différentielles linéaires.

Exercice 17.1
Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle
$x(x^2+1)y''-2(x^2+1)y'+2xy=0$
sont développables en série entière.

Exercice 17.2
Déterminer les solutions maximales de $x(x+2)y'+(x+1)y=1$.

Exercice 17.3
Déterminer les fonctions dérivables telles que $f'(x)=f(\frac{1}{x})$.

Exercice 17.4
Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle $(x^2+1)y''+xy'-4y=0$.
En déduire la solution générale de cette équation.

Exercice 17.5
Soit E l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $(1+x^2)y''+xy'-\frac{1}{4}y=0$.

1. Montrer que $\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$ est solution de E et en déduire les autres solutions.
2. En déduire le développement de $\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$ en série entière.

Exercice 17.6
Soient a et b deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (E) : $y'+ay=b$.
On suppose que $\exists\lambda>0$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}\ a(x)\geqslant\lambda$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}b(x)=0$.

1. Montrer que toutes les solutions de (E) ont une limite nulle en $+\infty$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) ayant une limite nulle en $-\infty$

Exercice 17.7
Résoudre le système différentiel :$\left\{\begin{array}{l} x"=x'+y'-y \\ y"=x'+y'-x. \end{array}\right.$.

Exercice 17.8
On considère une application $p:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.
Soit l'équation différentielle (E) : $y"-p(x)y=0$.

1. Montrer que si y est une solution bornée de (E), y' admet une limite finie, que l'on déterminera, en $+\infty$.
2. Montrer que (E) admet des solutions non bornées

18 Topologie.

Exercice 18.1
Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\max(inf(A), inf(B)) \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min(sup(A), sup(B))$.

2. Donner un exemple où les inégalités sont strictes.

19 Espaces vectoriels normés.

Exercice 19.1
Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Que peut-on dire de la suite $6^n A^n$? (on commencera par calculer $P^{-1}AP$).
2. Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{6^n}{n} A^n$.

Exercice 19.2
Soit E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des applications de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et N_1, N_2 N_3 les applications de E dans $\mathbb{R}$ définies par : $N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, $N_2(f) = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$, $N_3(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$.
Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E et les comparer.

Exercice 19.3
$E = \mathbb{R}[X]$ et si $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\| P \| = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} | p_k |$

1. Montrer que $(E, \|\|)$ est un evn.
2. On pose $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!}$. Montrer que la suite P est de Cauchy dans E.
3. Converge-t-elle dans E ?

Exercice 19.4
$E = \mathbb{R}[X]$ et si $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\| P \| = \underset{t\in[0,1]}{sup} | P(t) - P'(t) |$

1. Montrer que $(E, \|\|)$ est un evn.
2. On pose $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!}$. Montrer que la suite P est de Cauchy dans E.
3. Converge-t-elle dans E ?

Exercice 19.5
On définit $E = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0\}$. Soient $\|.\|$ et N les deux applications définies sur E par

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \text{ et } N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$$

1. Montrer que ces deux applications sont des normes sur E.
2. Sont-elles équivalentes ?

Exercice 19.6
On définit sur l'espace vectoriel $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ les applications γ_1 et γ_2 par
$\gamma_1(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $\gamma_2(f) = \int\limits_0^1 e^x |f(x)| \, dx$

1. Montrer que γ_1 et γ_2 sont des normes sur E.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ la suite de fonctions définie par $\begin{cases} f_n(x) = 1 - nx \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ f_n(x) = 0 \text{ si } \frac{1}{n} < x \leqslant 1. \end{cases}$.
   Etudier la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ dans (E, γ_1) dans (E, γ_2). Conclusion ?

Exercice 19.7
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \frac{1}{2} \|x - y\|$ $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2)^2$ Montrer que f possède un et un seul point fixe.

Exercice 19.8
Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que (E est complet)$\Leftrightarrow$
(toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\forall\ n \in \mathbb{N},\quad ||u_{n+1}-u_n|| \leq \frac{1}{2^n}$converge).

Exercice 19.9
$\mathbb{R}^2$ est muni d'une norme quelconque. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$\begin{array}{rcl} \exists\alpha & \in &]0;\frac{1}{2}[,\ \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \|f(x)-f(y)\| & \leqslant & \alpha(\|f(x)-x\|+\|f(y)-y\|) \end{array}$$

1. Montrer que f admet au plus un point fixe.
2. On considère la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0,\ \|u_{n+2}-u_{n+1}\| \leqslant \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\|u_{n+1}-u_n\|$.
   (b) Montrer que la suite u est de Cauchy. Conclure.

Exercice 19.10 (MP*)
On conidère $E = \mathfrak{M}_k(\mathbb{R})$, muni de la norme $\|\ (a_{i,j})_{i,j}\ \| = \sqrt{\sum\limits_{1\leq i,j\leq k} {a_{i,j}}^2}$

1. (a) Soit n un entier positif. Montrer que tous les coefficients du développement en série entière de $e^x-(1+\dfrac{x}{n})^n$ sont positifs.
   (b) Soit $A \in E$. Montrer que $\|\ exp(A)-(I_k+\dfrac{A}{n})^n\ \| \leq exp(\|\ A\ \|)-(1+\dfrac{\|\ A\ \|}{n})^n$.
   (c) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de E telle que
   $\forall n \geq 1,\quad \|A_n - A\| \leq \dfrac{C}{n}$ pour une certaine constante C.
   Quelle est la limite de $((I_k+\dfrac{A_n}{n})^n)_{n\geq 1}$?
2. Applications :
   (a) Soient A, B deux éléments de E.
   Déterminer les limites des suites $(exp(\dfrac{A}{n})exp(\dfrac{B}{n}))^n)_{n\geq 1}$ et $(exp(\dfrac{A}{n})exp(\dfrac{B}{n})exp(-\dfrac{A}{n})exp(-\dfrac{B}{n}))^{n^2})_{n\geq 1}$.
   (b) Soit G un sous-groupe fermé de $GL(k,\mathbb{R})$. On pose $\mathfrak{g} = \{A \in \mathfrak{M}_k(\mathbb{R})$ telle que $exp(tA) \in G\ \forall t \in \mathbb{R}\}$.
   Montrer que $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel (il s'agit de l'algèbre de Lie de G) et que $\forall A, B \in \mathfrak{g}$, $[A,B] = AB - BA \in \mathfrak{g}$.

Exercice 19.11 (MP*)
Soient P, Q deux polynomes à coefficients dans un corps k avec $deg(P) = p$ et $deg(Q) = q$.
Soit $\psi_{P,Q}$ l'application définie par $\left\{\begin{array}{c} k_{p-1}[X]\times k_{q-1}[\mathbb{X}] \to k_{p+q-1}[X] \\ (U,V) \mapsto UQ+VP \end{array}\right.$

1. (a) Montrer que ψ est un isomorphisme ssi P et Q sont premiers entre eux dans $k[X]$.
   (b) Déterminer $A_{P,Q} = mat(\psi_{P,Q}; (1;0),..,(X^{p-1},0),(0;1),..,(0,X^{q-1}); 1,...,X^{p+q-1})$.

   (a) Considérons $E = k_n[X]$ (avec $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni d'une norme quelconque.
   Montrer que si P et Q sont deux polynomes premiers entre eux dans $k[X]$, alors il existe un voisinage V_P de P et un voisinage V_Q de Q tel que $\forall(R,S) \in V_P \times V_Q$, R et S sont encore premiers entre eux dans $k[X]$.
   (b) Soit n un entier positif. Montrer que l'ensemble des polynomes scindés à racines simples sont denses dans $\mathbb{C}_n[X]$.
   En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 19.12 (MP*)
On munit $\mathbb{C}_n[X]$ de la norme $\|\ P\ \|_\infty = \sup\limits_{|z|\leq 1}\ |\ P(z)\ |$. Soit $r > 0$ et P un polynome appartenant à $H_n = \{P \in \mathbb{C}_n[X]$ ne possédant pas de racines de module $1\}$. On pose $I(P) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{f'(e^{it})e^{it}}{f(e^{it})}dt$

1. (a) Soit $P \in H_n$. Calculer $I(P)$. Que représente ce nombre ?

(b) Montrer que l'application $P \mapsto I(P)$ est continue sur H_n.

(c) En déduire que H_n n'est pas connexe.

(a) Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ muni d'une norme $\| \,.\, \|$ et soit $P \in E$ tel que 0 soit la seule et unique racine de P dans la boule fermée $B(O, 1)$
Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel $\forall Q \in E$ tel que $\| P - Q \| < \varepsilon$ alors Q possède une unique racine appartenant à $B(O, 1)$.

(b) Montrer que si un polynome P appartenant à $\mathbb{C}_n[X]$ possède a comme racine, alors tout polynome dont les coefficients sont suffisamments proches de ceux de P possède une racine b suffisamment proche de a.

(c) Localiser les racines du polynome $X^{2002} + \varepsilon X^{2001} - 1$ lorsque ε est un nombre réel suffisamment petit ?

Exercice 19.13

1. Soit $M \in O(m, \mathbb{R})$. Montrer que la suite $u_n = \dfrac{1}{n}(I_m + M + .. + M^{n-1})$ converge et caractériser sa limite en fonction de certains sous-espace de $\mathbb{R}^m$ définis par M.

2. (MP*) On suppose que l'on a muni $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative et que $\|M\| \leqslant 1$.

   (a) Montrer que la suite $u_n = \dfrac{1}{n}(I_m + M + .. + M^{n-1})$ possède au moins une valeur d'adhérence.

   (b) Soit L une valeur d'adhérence. Montrer que L est le projecteur de $\mathbb{R}^m$ sur $\ker(M - I_m)$ paralèllement à $\mathrm{Im}(M - I_m)$.

   (c) En déduire que la suite u converge.

Exercice 19.14

Soit A une matrice symétrique définie positive appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On définit une suite dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, par

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}(X_n + AX_n^{-1}) \text{ avec } X_0 = A.$$

1. Montrer que la suite X est bien définie et que $\forall n \geqslant 0$, X_n est symétrique définie positive.

2. Montrer qu'elle converge dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa limite L.

3. Exprimer $(u_{n+1} - L)(u_{n+1} + L)^{-1}$ en fonction de A et de L. En déduire la vitesse de convergence.

Exercice 19.15

Soit $E = C^0([-\alpha, \alpha], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie et a, b deux nombres réels avec $|a| < 1$ et $|b| < 1$.
Montrer que l'endomorphisme de E définie par $(Tf)(x) = f(x) + af(bx)$ appartient à $GL_c(E)$.

Exercice 19.16

Pour tout réel s, on considère l'espace $H^s(\mathbb{N}) = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \sum\limits_{n \geqslant 0} (1 + n^2)^s \, |u_n|^2 < +\infty\}$.

1. Montrer que H^s est un ev et que $\|u\|_{H^s(\mathbb{N})} = (\sum\limits_{n \geqslant 0} (1 + n^s) \, |u_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ définie une norme sur $H^s(\mathbb{N})$.

2. On considére $A : u \mapsto w$ où $\forall n \geqslant 0$, $w_n = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $A \in \mathcal{L}_c(H^s)$ si $s > \dfrac{1}{2}$.

3. Montrer que $H^s(\mathbb{N})$ est un espace de Banach

Exercice 19.17

Sur $[0, 1]$, on considère la suite de fonctions définies par :

$$P_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x)).$$

1. Montrer que, pour tout n, P_n est une fonction polynômiale.

2. Etude de la convergence simple

3. (MP*) Montrer que la suite (P_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction à déterminer.

20 Espaces préhilbertiens et hilbertiens

Exercice 20.1

1. On considère $E_1 = \mathbb{R}[X]$

   (a) Montrer que $< P, Q >= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n q_n$ (où $P(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n X^n$ et $Q(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_n X^n$) définit un produit scalaire sur E_1.

   (b) On pose $H = \{P \in E \text{ tel que } P(1) = 0\}$.
   Montrer que H est un hyperplan de E et déterminer son orthogonal. Conclusion.

2. E_2 désigne l'ensemble des séries entières réelles $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ dont le rayon de convergence est strictement plus grand

que 1.

1. Montrer que E_2 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que $< f, g >= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ (où $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$) définit un produit scalaire sur E_1.
3. On pose $H = \{f \in E \text{ tel que } P(1) = 0\}$.
   Montrer que H est un hyperplan de E et déterminer son orthogonal. Qu'en déduit-on ?

Exercice 20.2
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n X^n$ et $Q(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_n X^n$.

On pose $< P, Q >= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n q_n$.

1. Montrer que $<, >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$
2. Déterminer l'orthogonal de $H = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P(1) = 0\}$. Conclusion.

Exercice 20.3
$E = \mathbb{R}[X]$

1. Montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k\geq 0} \in (\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}$ telle que
   · $deg P_k = k$ · $\int\limits_0^1 P_k(t)P_l(t)dt = \delta_{k,l}\ \forall k, l \in \mathbb{N}$
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, P_k possède au moins une racine appartenant à $[0; 1]$.
3. On note $z_0^{(k)}, ..., z_m^{(k)}$ les racines distinctes de P_k appartenant à $[0; 1]$.

   (a) Calculer $\int\limits_0^1 P_k(t) \prod\limits_{j=0}^{m(k)} (t - z_j)dt$ si $m(k) < k$.

   (b) En déduire que P_k possède k racines distinctes appartenant à $[0; 1]$.
4. Montrer qu'il existe $c_0, .., c_n \in \mathbb{R}$ tel que
   $\int\limits_0^1 P(t)dt = \sum\limits_{j=0}^{n} c_j P(z_j^{(n)})\ \forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$

Exercice 20.4

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $deg\ P_n = n$ et $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_n(t)P_m(t)e^{-t^2}dt = \delta_{n,m}$.
2. Montrer que P_n possède n racines simples dans $\mathbb{R}$.
3. On pose $Q_n(t) = e^{t^2}(\dfrac{d^n}{dt^n}e^{-t^2})$.
   Montrer que Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire que $P_n = c_n Q_n$ pour une certaine constante c_n.

Exercice 20.5
Soit $(E, <, >)$ un espace préhilbertien (non-nécessairement de dimension finie) et $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que
$\forall x \in E \qquad \| x \|^2 = \sum_{i=1}^{r} |< x, e_i >|^2$.

1. Montrer que $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ est une BON de E
2. Est-ce encore vraie si la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ n'est plus unitaire ?

Exercice 20.6
Soient E un espace préhilbertien réel ou complexe et F un sous-espace de E.

1. Soit $(x, y_0, z) \in E^3$ tel que $\mathrm{Re}(x - y_0 \mid z) \neq 0$. Etudier le signe de $\|x - y_0 - \lambda z\|^2 - \|x - y_0\|^2$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2. On suppose qu'il existe $y_0 \in F$ tel que $\|x - y_0\| = \min_{y \in F} \|x - y\| = d(x, F)$.
   Montrer que $x - y_0$ est orthogonal à F et que y_0 est unique.
3. On suppose mainenant que E est complet. Montrer qu'il existe $y_0 \in F$ tel que $\|x - y_0\| = \min_{y \in F} \|x - y\| = d(x, F)$.
   Indication : introduire une suite convenable et montrer qu'elle est de Cauchy à l'aide de l'égalité du parallélogramme
4. Montrer que l'application $p : x \mapsto y_0$ est un projecteur othogonal continu. En déduire que $E = F \oplus F^{\perp}$

21 Fonctions de plusieurs variables.

Exercice 21.1
Soit $A_1A_2A_3$ un triangle tel que $A_iA_j = a_k$ où i, j, k sont tous les nombres possibles tels que $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ et M un point intérieur du triangle. On désigne par x_k la distance de M au coté A_iA_j.

1. Exprimer l'aire du triangle $A_1A_2A_3$ en fonction des nombres $(a_k)_{1\leq k\leq 3}$ et $(x_k)_{1\leq k\leq 3}$.
2. Montrer que la fonction qui à un point intérieur du triangle M associe le produit des distances de M aux trois coté du triangle possède un maximum.
3. Déterminer ce maximum.

Exercice 21.2
On définit une application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(0,0) = 0, f(x, y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq ((0, 0)$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et calculer sa différentielle.
2. Montrer que la fonction f est de classe C^1 au point $(0, 0)$ et calculer sa différentielle.
3. Montrer que la fonction f admet en tout point des dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ et calculer la valeur de ces dérivées au point $(0, 0)$.
4. Expliquer pourquoi le résultat obtenu implique que l'une au moins des dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ n'est pas continue au point $(0, 0)$.

Exercice 21.3
Soit D le domaine défini par $x \geq 0, y \geq 0, \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \leq 1$ où $a > 0$,$b > 0$ et $f(x, y) = x^2 + y^2$.
Dessinez D. Calculer $\int_D f$. Extremum sur D de f.

Exercice 21.4 (MP* (les MP peuvent le faire s'ils supposent $n = 2$ ou 3).)
Soit f la fonction définie sur $U = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_i \neq x_j\ \forall i \neq j\}$ par $f((x_1, ..., x_n)) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} ln \mid x_i - x_j \mid$.

1. (a) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
   (b) Prouver que f possède un minimum sur U (on montrera que f tend vers l'infini sur le "bord" de U).
2. Soit $(a_1, ..., a_n)$ un point où se réalise ce minimum. On considère le polynome $H(X) = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - a_k)$.
   (a) Montrer que $H''(a_k) - 4a_kH'(a_k) = 0\ \forall k \in \{1, ..., n\}$ (on pourra seulement le vérifier pour $n = 3$ et $n = 4$ si vous ne vous dépatouiller pas des calculs).
   (b) En déduire que $H''(X) - 4XH'(X) + 4nH(X) = 0$.
   (c) Calculer H lorsque $n = 2, 3$ et 4. Quel est le minimum de f dans ce cas ?

Exercice 21.5 (MP*)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f, V deux fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. On pose $\Delta f = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$.
Montrer que si f possède un maximum sur Ω en un point M alors $(\Delta f)(M) \leq 0$.
Applications : on suppose dorénavant que Ω est un ouvert borné.

1. Soit g une fonction continue sur $\overline{\Omega}\backslash\Omega$ (le "bord" de Ω). On suppose en outre, uniquement dans cette question, que V est une fonction strictement négative. Discuter l'unicité du problème $\left\{ \begin{array}{c} (\forall M \in \Omega,\ \Delta f(M) + V(M)f(M) = 0 \\ f_{|\overline{\Omega}\backslash\Omega} = g \end{array} \right.$
2. On introduit l'opérateur A défini par $Af = (\Delta f + V f)1_\Omega$ où 1_Ω désigne l'indicatrice de Ω.
   (a) Montrer que l'opérateur A est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(b) Montrer que si $\lambda > \sup_{\overline{\Omega}} V$ alors $A - \lambda Id$ est injectif (en dimension infinie, cela n'implique plus que $A - \lambda Id$ est bijectif).

Exercice 21.6
Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, on pose $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
Pour tout nombre réel λ considérons le problème (E_λ) : $(\Delta f)(x, y) = \lambda f(x, y)\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Discuter de l'existence et le nombre de fonctions f radiales (i.e. $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$) solutions du problème (E_λ).

Exercice 21.7
Résoudre l'EDP $x(x-1)\dfrac{\partial f}{\partial x} + y(x-1)\dfrac{\partial f}{\partial y} - x^2 f = 0$
(on pourra poser $x = u, y = uv$).

22 Géométrie.

Exercice 22.1
On considère la courbe paramétrée $M(t)\begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique.

1. Déterminer les axes de symétries de $\mathcal{C}$, ses points réguliers puis tracer $\mathcal{C}$.
2. Décrire le lieu des points N de la courbe $\mathcal{C}$ où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires.
3. Déterminer les droites du plans qui soient normales et tangentes à $\mathcal{C}$.

Exercice 22.2
Calculer la longueur, la courbure et la développée de l'arc $M(t)\begin{pmatrix} 2sin(t) - sin(t)cos(t) - t \\ (1 - cos(t))^2 \end{pmatrix}_{t\in[0;2\pi]}$.

Exercice 22.3
Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que 3 points A, B, C, images dans le plan complexe des nombres a, b, c forment un triangle équilatéral est que $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$.

Exercice 22.4
On considère la courbe (Γ) : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 3\cos t + 3\cos 2t + \cos 3t \\ y(t) = 3\sin t + 3\sin 2t + \sin 3t \end{array}\right.$
Construire (Γ), calculer sa longueur et sa développée (lieu des centres de courbures)..

Exercice 22.5
Soit (C) la courbe $(x(t) = \sin 2t, y(t) = \cos 3t)$.
Déterminer les symétries, les points doubles et les points réguliers de (C) puis construire (C).
Calculer l'angle entre les deux droites "tangentes" aux points doubles.

Exercice 22.6
Tracer la courbe (symétrie, point régulier, etc) (D) : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2\cos t + \cos 2t + 1 \\ y(t) = 2\sin t + \sin 2t \end{array}\right.$
déterminer son abscisse curviligne puis calculer sa longueur

Exercice 22.7
Etudier la courbe $x = -a\int_0^t th^2t\ dt \quad y = a\int_0^t \frac{sht}{ch^2t}\ dt$
Déterminer une abscisse curviligne sur cette courbe

Exercice 22.8
Déterminer les courbes telles que $y^2 = a^2 + s^2$ $(a > 0)$, où s est l'abscisse curviligne

Exercice 22.9
Soit (C) la courbe définie par $\left\{\begin{array}{l} x = 2a\cos t \\ y = a\sin t \end{array}\right.$

1. Trouver le repère de Serret-Frenet.
2. Courbure et centre de courbure
3. Développée

23 Intégrales multiples et curvilignes.

Exercice 23.1
Déterminer les cercles C du plan le long desquels l'intégrale curviligne $\oint_C x^2dy + y^2dx$ est nulle.

Exercice 23.2
Calculer $\int\limits_D e^{-(x^2+xy+y^2)}dxdy$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 23.3
Soit $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ une forme différentielle définie sur $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par $P(x,y) = \dfrac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2y}$ et $Q(x,y) = \dfrac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2)}{xy^2}$.

1. Pouvez vous trouver sur D une application f telle que $df = \omega$?
2. Calculer $\oint_\Gamma \omega$avec Γ l'arc : $x(t) = t + cos^2(t)$, $y(t) = 1 + sin^2(t)$ $(t \in [0, \dfrac{\pi}{2}])$.