Abdellah Bechata

Table des matières

1 Exercices PSI* 3
1.1 Algèbre-géométrie 3
1.2 Analyse 4

2 Exercices MP 5
2.1 Algèbre-géométrie 5
2.2 Analyse 6

3 Exercices MP* 8
3.1 Algèbre-géométrie 8
3.2 Analyse 12

4 Indications exercices PSI* 22
4.1 Algèbre-géométrie 22
4.2 Analyse 22

5 Indications exercices MP 24
5.1 Algèbre-géométrie 24
5.2 Analyse 25

6 Indications exercices MP* 27
6.1 Algèbre-géométrie 27
6.2 Analyse 31

7 Corrections PSI* 34
7.1 Algèbre-géométrie 34
7.2 Analyse 41

8 Corrections MP 48
8.1 Algèbre-géométrie 48
8.2 Analyse 62

9 Corrections MP* 77
9.1 Algèbre-géométrie 77
9.2 Analyse 126

Résumé

Vous trouverez dans ce document l'ensemble des colles que j'ai effectué durant les années scolaires 2002-2003 et 2003-2004 en PSI*,MP et MP*. Les exercices proviennent majoritairement des oraux Centrale et Mines ainsi qu'une partie plus restreinte des ENS et de l'X (Option M* ou P*). Chaque exercice est agrémenté d'indications pour permettrent à ceux qui sèchent sur un exercice de tenter de résoudre une question donnée avant de lire la solution.
Bien entendu, en passant les concours, vous êtes soumis au bachotage. C'est indispensable pour acquérir la technique nécessaire ainsi que de disposer d'un nombre important et varié d'exemples "concrets". Ce bachotage vous permettra d'accéder plus aisément à la théorisation (une théorie sans de nombreux exemples est une théorie vide). Néanmoins, apprendre par coeur des solutions d'exercices est aussi absurde que de théoriser sans un nombre substantiel d'exemples "concrets".
Parfois, on trouve dans certains livres des "astuces"pour la résolution de certains exercices et ces astuces semblent tombées du ciel. Personnellement, je n'ai jamais aimé les astuces qui tombent du ciel et qui ne s'incrivent pas dans le cadre de méthodes ou de théories. Dans votre future profession, la résolution d'un problème proviendra rarement d'une astuce mais plus surement d'une analyse fine et complète du problème (à la manière d'un Sherlock Holmes ou d'un Poirot). L'un des objectifs dans votre formation est justement de vous apprendre à acquérir une démarche basée sur la raison et non sur la chance (le rationnalisme)
C'est pour cela que j'ai également ajouté un corrigé exhaustif (peut-être trop au goût de certains mais mieux vaut trop que trop peu) à chaque exercice afin de mettre en relief les méthodes employées, d'expliquer complètement le cheminement d'une tentative raisonnée de solution et parfois d'expliquer une démarche à priori naturelle mais qui n'aboutit pas (un problème difficile demande souvent de nombreuses tentatives infructueuses, ou qui semblent, dans un premier temps, infructueuses).
Etant un amoureux des mathématiques, mon ambition est de proposer, lors de mes colles, des exercices originaux,variés et qui utilisent pleinement les notions essentiels du programme. En particulier, les exercices peuvent apparaitre difficiles mais il me parait essentiel qu'à la fin d'une colle, l'élève ait appris des notions et/ou méthodes nouvelles et importantes. J'espère que les exercices que vous trouverez dans ce bestiaire seront à votre goût et vous aiderons à apprécier le très riche programme de taupe.
Par manque de temps, un certain nombre d'exercices (de MP*) ne sont pas corrigés. Je le compléterais le plus tôt possible et, régulièrement, j'y adjoindrais d'autres exercices. Vous me pardonnerez pour les coquilles existantes dans ce document car je n'ai pas eu le temps de le relire.
Si vous avez la moindre remarque, commentaire, critique, n'hésitez pas à m'en faire part en m'envoyant un mail par l'intermédiaire de mon site (l'adresse est en base de chaque page).

1 Exercices PSI*

1.1 Algèbre-géométrie

Exercice 1.1.1 Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!}$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(On s'intéressera à la réduction de A)

Exercice 1.1.2 Soit z_0 un complexe, et (z_n) une suite telle que $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

1. Donner une construction géométrique de z_{n+1} à partir de z_n.
2. Etudier la convergence de la suite (z_n).
   Indication : on écrira $z_n = \rho_n e^{i\phi_n}$,où $(\rho_n, \phi_n) \in \mathbb{R}_+^{\times} \times]-\pi, \pi[$ et on utilisera :
$$\sin\phi = 2^n \sin\frac{\phi}{2^n} \prod_{i=1}^{n} \cos\frac{\phi}{2^i}.$$
3. Trouver une courbe simple passant par tous les points de la suite, et construire cette courbe.

Exercice 1.1.3 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
3. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice A

Exercice 1.1.4 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ $(a \neq 0)$.

1. Trouver trois vecteurs V_1, V_2, V_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que
$$AV_1 = -V_1,\ AV_2 = V_1 - V_2,\ AV_3 = V_2 - V_3$$
   En déduire que A est semblable à une matrice simple que l'on explicitera
2. Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $\exp xA = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n A^n}{n!}$.

Exercice 1.1.5 Soit $P(x) = \det \begin{pmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_3 & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{pmatrix}$.

1. Calculer $P(a_1), .., P(a_n)$.
2. Etudier $\frac{P(X)}{(X-a_1)..(X-a_n)}$ et en déduire $P(x)$

1.2 Analyse

Exercice 1.2.1 Soit $\alpha > 0$; on pose $a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^{\alpha}$.

1. Trouver un équivalent de a_n
   Indication : On pourra découper la somme selon les pairs et les impairs
2. Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$.

Exercice 1.2.2 On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f est C^0 sur $\mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}^{\times}$ et calculer f'
2. Exprimer f' à l'aide de fonctions usuelles.
3. En déduire f

Exercice 1.2.3 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(\frac{x}{3}) - f(x) = g(x) \text{ et } f(0) = 0.$$

Que dire si g est C^1 à dérivée bornée ?

Exercice 1.2.4 Soit l'équation différentielle $x^2 y" - 6xy' + (12 + x^2)y = 0$.
En trouver les solutions développables en série entière, puis toutes les solutions.

Exercice 1.2.5 On pose $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \sin ax \, dx$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer I comme somme d'une série.
2. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique f telle que $f(x) = e^{ax}$ sur $[0, 2\pi[$.
3. En déduire I.

2 Exercices MP

2.1 Algèbre-géométrie

Exercice 2.1.1 Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n. Soit A une matrice de $\mathcal{M}$ vérifiant : $A^2 - 5A + 6I_n = 0$.

1. On pose $G(M) = AM$ pour toute M de $\mathcal{M}$.
   (a) Montrer que G est diagonalisable.
   (b) Etudier les éléments propres de G
2. On pose $D(M) = MA$ pour toute M de $\mathcal{M}$.
   Etudier les éléments propres de D
3. On pose $F(M) = AM + MA$ pour toute M de $\mathcal{M}$.
   Etudier les éléments propres de F.

Exercice 2.1.2 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A et B commutent.
2. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$ à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$
3. Montrer que l'espace vectoriel engendré par A et B est un corps. Quel est l'inverse de $aA + bB$?

Exercice 2.1.3

1. Exemple de matrice A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{Q})$ telle que $A^3 = 2I$?
   (On supposera qu'il existe un vecteur x tel que (x, Ax, A^2x) est une base de $\mathbb{Q}^3$
2. Soit A une telle matrice. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$. On note E l'ensemble des $aI + bA + cA^2$ où a, b, c parcourent $\mathbb{K}$.
   Selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$, E est-il un corps ?

Exercice 2.1.4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le commutant de A et l'ensemble :

$$\{B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) : \quad \exists X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad B = AX - XA\}$$

2. Généralisation : si $\mathcal{C}(A)$ est le commutant de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

$$\exists X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad B = AX - XA \Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{C}(A), \quad \operatorname{tr} BM = 0$$

   Indication : poser $\Phi_A(M) = AM - MA$ et penser au produit scalaire : $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$

Exercice 2.1.5 On pose, pour $z \in \mathbb{C}$, $\quad M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $M(z)$ est diagonalisable sauf pour deux valeurs que l'on déterminera.
2. On suppose que $\lambda = e^{it}$ est une valeur propre de $M(z)$. Calculer z en fonction de t et tracer la courbe $t \mapsto z(t)$.
3. Montrer que la suite (M^n) tend vers 0 pour $|z|$ assez petit.

Exercice 2.1.6 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Prouver que $\det A > 0$.

Exercice 2.1.7 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il existe P orthogonale telle que PAP^{-1} et PBP^{-1} soient diagonales.

Exercice 2.1.8 Soit (Γ) la parabole d'équation $y^2 = 2px$ $(p > 0)$.

1. Si $M(x, 0)$, avec $x \geqslant 0$, montrer qu'il existe un unique point $M'(x', 0)$ avec $x' > x$ tel que le carré dont une diagonale est MM' ait ses deux sommets sur (Γ). Expliciter $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $f(x) = x'$.
2. Soit alors $x_0 \geqslant 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   Montrer que $x_n \to +\infty$ et donner un développement asymptotique à deux termes de (x_n).

Exercice 2.1.9 Quelles sont les matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

2.2 Analyse

Exercice 2.2.1 Soit $\varphi \in C^0(([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^\times$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \frac{x}{n}\varphi(\frac{k}{n})).$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement et expliciter sa limite simple.
2. Y-a-t-il convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2.2.2 Montrer que : $\int_0^1 x^{-x}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

Exercice 2.2.3 Convergence de la série de terme général (u_n) définie par $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(n+p)^\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

Exercice 2.2.4 On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.
Défintion de f; mode de convergence de la série définition f; limite en $+\infty$ de f ; équivalent de f de 0.

Exercice 2.2.5

1. Montrer que $\int_0^1 \frac{x^t}{1+x^2} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1+t}$ pour $t \geqslant 0$.
   En déduire $\lim_{t\to 0} \int_0^1 \frac{x^t}{1+x^2} dx$. Soit l sa limite.
2. Equivalent de $\int_0^1 \frac{x^t}{1+x^2} dx - l$ quand t tend vers 0.

Exercice 2.2.6 Equivalent, lorsque $n \to +\infty$, de $(2^2 3^3 .. n^n)^{4/n^2}$

Exercice 2.2.7 Soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } u_n \to 0\}$.
Pour $u \in E$, on pose $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$, et $f(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}$.

1. Vérifier que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E. On munit E de $\|.\|_\infty$.
2. Montrer que f est une forme linéaire continue sur E, et que $|||f||| = 1$.
3. Existe-t-il $u \in E$ tel que $\|u\|_\infty \leqslant 1$ et $|f(u)| = 1$?
   En déduire que $\overline{B} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\quad \|u\|_\infty \leqslant 1\}$ n'est pas compacte.

Exercice 2.2.8 Trouver toutes les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - 2x \int_0^x f(t)\cos(x-t)dt = 1$$

(On commencera par montrer que f est C^1 puis de classe C^2)

Exercice 2.2.9 Trouver un équivalent simple de $\sum_{i\geqslant 1, j\geqslant 1, i+j=n} \frac{1}{ij}$.

Exercice 2.2.10 Soit $r > 0$ et E_r l'ensemble des applications de $]-r, r[$ dans $\mathbb{R}$ développable en série entière.
Pour f dans E, on pose $\phi(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{x+t}\, dt$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E_r.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ; ϕ est-il un automorphisme de E_r ?
3. Pour P polynôme on pose $\|P\| = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$; ϕ induit-elle une application continue sur $\mathbb{R}[t]$?
   Son inverse est-elle continue ?

Exercice 2.2.11 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer : $\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$

3 Exercices MP*

3.1 Algèbre-géométrie

Exercice 3.1.1 Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et :

$$\Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$$
$$X \mapsto AX + XB.$$

Trouver les valeurs propres de Φ en fonction de celles de A et B.
(On pourra commencer par traiter les cas $A = 0$ puis le cas $B = 0$ et enfin traiter le cas général)

Exercice 3.1.2 Soit E une partie de $\mathbb{R}^2$. Pour $a_1, .., a_n \in E$, on pose

$$\delta_n(a_1, .., a_n) = \left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} d(a_i, a_j) \right)^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

puis

$$d_n(E) = \sup_{(a_1,..,a_n) \in E} \delta_n(a_1, .., a_n).$$

Que dire que de $d_n(E)$ suivant que E est borné ou non borné ? Si $E \subset F$, comparer $d_n(E)$ et $d_n(F)$. Etudier la suite $(d_n(E))_{n \in \mathbb{N}}$ et en particulier sa monotonie. Calculer $d_3(E)$ lorsque E est un segment.

Exercice 3.1.3 Pour quelles valeurs de n existe-t-il un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$?

Exercice 3.1.4 Soient u, v deux vecteurs indépendants de l'espace euclidien E de dimension 3.

1. Montrer qu'il existe n unitaire tel que (n, u, v) soit libre et

$$< n, u >< n, v >=< u, v > .$$

2. Montrer qu'il existe un projecteur orthogonal P tel que :

$$P(u) \neq 0, \quad P(v) \neq 0 \quad < P(u), P(v) >= 0$$

Exercice 3.1.5 Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\beta = (i, j, k)$ une base de E. On se donne $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $v \in E$, on note $W(v) = Vect\{f^k(v), \quad k \in \mathbb{N}\}$.
Trouver les vecteurs $v \in E$ tels que $W(v) \neq E$ lorsque la matrice A de f dans la base β est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Même question avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 3.1.6 Soit n un entier $\geqslant 1$. On pose $\Phi_n(X) = \prod_{\zeta}(X - \zeta)$ où ζ décrit les racines primitives $n^{ème}$ de 1 (c'est-à-dire une racine dont l'ordre dans $\mathbb{C}^\times$ est n)

1. Montrer que $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$.
2. On rappelle que $\varphi(d)$ désigne l'indicatrice d'Euler. Montrer que : $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$
3. Démontrer que pour tout entier n, $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$

Exercice 3.1.7 Soit $(G, .)$ un groupe et *Aut* G l'ensemble des automorphismes de G.

1. Vérifier rapidement que *Aut* G est un groupe pour la composition.

2. Pour $a \in G$, on définit $\varphi_a : x \mapsto axa^{-1}$. Montrer que $\varphi_a \in Aut\ G$.
3. Montrer que si $Aut\ G$ est cyclique, le groupe G est abélien.
4. Décrire $Aut\ G$ dans les cas suivants : $G = (\mathbb{Z}, +)$, $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, $G = (\mathbb{Z}^2, +)$, $G = (\mathcal{S}_3, \circ)$

Exercice 3.1.8 Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: $x^3 - \overline{21}x^2 + \overline{29}x - \overline{9} = \overline{0}$.

Exercice 3.1.9 Déterminer tous les morphismes de groupe de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

Exercice 3.1.10

1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Montrer que E est également un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Comparer $\dim_{\mathbb{R}} E$ et $\dim_{\mathbb{C}} E$.
   Si $X \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre d'une matrice à coefficients réels A, que dire de $\overline{X}$?
2. Soit A une matrice carrée réelle telle que $A^3 - A - Id = 0$. Montrer que $\det A > 0$.
3. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^2 = -I_n$.
   (a) Montrer que n est nécessairement pair. On pose $n = 2p$.
   (b) Montrer que A est semblable sur $\mathbb{R}$ à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$. Réciproque ?

Exercice 3.1.11 Soit $f : GL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+^\times$. On suppose que

$$\forall (A, B) \in GL_2(\mathbb{R})^2, \quad f(AB) = f(A)f(B).$$

Expliciter f lorsque f est continue.

Exercice 3.1.12

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(k)$ et $(X_1, ..., X_n)$ n vecteurs de k^n. Calculer $\sum_{i=1}^{n} \det(X_1, .., X_{i-1}, AX_i, X_{i+1}, .., X_n)$.
2. Considérons un système différentiel de la forme

   $$(E) : X'(t) = A(t)X(t)$$

   où la fonction $t \mapsto A(t)$ est continue sur un intervalle I.
   Soient $(t \mapsto X_1(t), .., t \mapsto X_n(t))$ n solutions (définies sur I) de l'équation différentielle (E).
   On appelle wronskien de $(X_1, ..., X_n)$ l'application W définie sur I par

   $$\forall t \in I, \quad W(t) = \det(X_1(t), ..., X_n(t))$$

   (a) Vérifier que W est solution d'une équation différentielle du premier ordre.
   (b) Montrer les équivalences suivantes
      i. les solutions $X_1, .., X_n$ sont linéairement indépendantes.
      ii. quel que soit $t_0 \in I$, les vecteurs $X_1(t_0), ..., X_n(t_0)$ sont linéairement indépendants.
      iii. il existe $t_0 \in I$ tel que les vecteurs $X_1(t_0), ..., X_n(t_0)$ soient linéairement indépendants.

Exercice 3.1.13 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C});\ MA = AM\}$.

1. Vérifier que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
2. On suppose A diagonalisable. Montrer que $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$.
3. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
4. Montrer que $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$.

Exercice 3.1.14 Soit A_n la matrice $(\min(i, j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Montrer que toutes les valeurs propres de A_n sont réelles et que A_n est diagonalisable

2. On définit $B_n = (b_{i,j})$ par

$$\begin{array}{rcl} \forall i & \in & \{1,..,n-1\} \quad b_{i,i} = 2 \text{ et } b_{n,n} = 1 \\ \forall i & \in & \{1,n-1\} \quad b_{i,i+1} = -1, \quad \forall i \in \{2,n\} \quad b_{i,i-1} = -1 \end{array}$$

tous les autres coefficients étant nuls.
Evaluer le produit A_nB_n. Conclusion

3. Quelle est la valeur de $\det A_n$?
4. Quelles sont les valeurs propres de B_n ? En déduire les valeurs propres de A_n.
5. La matrice A_n est-elle définie positive ?

Exercice 3.1.15 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(k)$.

1. On suppose dans cette question que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$.
Montrer qu'il existe $X_0 \in k^n$ tel que la famille $(X_0, AX_0, ..., A^{n-1}X_0)$ soit une base de k^n.
2. Soit B une matrice commutant avec A.
Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $B = P(A)$.
3. Dimension et base de $C(A) = \{B \in \mathfrak{M}_n(k) \text{ telle que } AB = BA\}$.
4. Résoudre, dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3.1.16 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(k)$ possédant n valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, .., \lambda_n$.

1. Soit B une matrice commutant avec A. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\ker(A - \lambda I)$ est stable par B.
2. Donner un polynôme annulateur de A.
Le résultat subsiste-t-il si A possède moins de n valeurs propres distinctes ?
3. Que peut-on dire d'une matrice B commutant avec A ?
4. Dimension et base de $C(A) = \{B \in \mathfrak{M}_n(k) \text{ telle que } AB = BA\}$.
5. Déterminer toutes les matrices inversibles X telles que $X + X^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 3.1.17 Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & & & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & & \\ & a_n & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & & & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et diagonaliser M.
Indication : vérifier que M est un polynôme d'une matrice simple)
Calculer son déterminant lorsque $a_q = q + 1$.

Exercice 3.1.18

1. Que peut-on dire des matrices $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $A^3 + A^2 + A = 0$?
2. Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0_{n-2p} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I_p & \frac{\sqrt{3}}{2}I_p \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}I_p & -\frac{1}{2}I_p \end{pmatrix}$.

Exercice 3.1.19 Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 16 & -8 & -16 \\ 16 & -8 & -16 \\ 8 & -8 & -8 \end{pmatrix}$ puis montrer que l'équation $X^3 = A$ admet une unique solution $X \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Quand est-il si l'on remplace A par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$?

Exercice 3.1.20 La matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Résoudre l'équation $X^2 + X = A$ dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ puis dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3.1.21 Soit $a \in \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $x \mapsto a \wedge x$ où $\wedge$ désigne le produit vectoriel.

1. Etudier la réduction de f.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^3$ et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de $\mathbb{R}^3$ définie par par $x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Montrer que la série vectorielle $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x_n}{n!}$ converge dans $\mathbb{R}^3$. On note $g(x)$ sa somme.
   (b) Montrer que g est une rotation de $\mathbb{R}^3$ et caractériser la.

Exercice 3.1.22 On muni $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien usuel ainsi que de la norme correspondante.

1. Caractériser la matrice $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer toutes les matrices $X \in O(\mathbb{R}^3)$ telles que $X^3 = A$.
3. Déterminer toutes les matrices $X \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $X^3 = A$.

Exercice 3.1.23

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A^2 est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable ssi $\ker A = \ker A^2$.
2. Résoudre l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Le résultat de **??** est-il encore vrai si l'on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

Exercice 3.1.24 Soit E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \quad < u(x), x >= 0$.

1. Montrer que u est antisymétrique.Réciproque.
2. Montrer que pour tout sous-espace H stable par u, $H^\perp$ est stable par u.
3. Montrer que u^2 est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont des réels négatifs.
4. Soit z un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$ de u^2.
   Montrer que $H = \text{Vect}(z, u(z))$ est un plan stable par u.
5. Enoncer un théorème de réduction pour les endomorphismes antisymétriques et le démontrer.

6. Donner la forme des matrices antisymétriques réelles A telles que $A^2 = -I_{2n}$?
   Qu'en est-il si A n'est pas antisymétrique ?

Exercice 3.1.25

1. Soit A une matrice à coefficients réels, symétrique définie positive.
   Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$.
2. Soient A et B deux matrices symétriques positives.
   (a) Montrer que $\det(A+B) \geqslant \det A$.
   (b) Comparer $\det(tA + (1-t)B)$ et $\det(A)^t(\det B)^{1-t}$ lorsque $t \in [0,1]$.

3.2 Analyse

Exercice 3.2.1 Déterminer toutes les applications f C^1 et 2π-périodiques telles que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$2f(x+1) = f(x) + f(2x).$$

Exercice 3.2.2 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} : x \mapsto 2x(1-x)$. Soit K un compact de $]0,1[$.
On pose $f_n = f \circ f \circ .. \circ f$ (n fois). Etudier la convergence de la suite (f_n) sur K.
On admet le théorème de Stone-Weierstrass : toute application continue d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme, sur $[a,b]$, d'une suite de fonctions polynômes.
Montrer que toute application continue définie sur $[a,b] \subset]0,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme, sur $[a,b]$, d'une suite de fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3.2.3 Soit $n \in \mathbb{N}^\times$, fixé. On pose $\Delta = \inf\limits_{(x_1,..,x_n)\in\mathbb{R}^n} \int\limits_0^1 (1 + x_1 t + ..x_n t^n)^2 dt$.

1. Etablir l'existence et l'unicité de $(a_1,..,a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\Delta = \int_0^1 (1 + a_1 t + ..a_n t^n)^2 dt$$

   On pose alors $F(X) = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{a_1}{X+2} + .. + \dfrac{a_n}{X+n+1}$.
2. Calculer $F(k)$ pour $k = 1,..,n$.
3. Calculer $F(0)$.
4. En déduire Δ et $(a_1,..,a_n)$.

Exercice 3.2.4 Soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ et $M_Q = \begin{pmatrix} c+a & b \\ b & c-a \end{pmatrix}$ la matrice de Q dans la base canonique.

1. Conditions sur a,b,c pour que Q soit positive (resp. définie positive). Que peut-on dire de l'ensemble : $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3;\ Q \text{ positive}\}$?
2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset K$. Soit $C = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3;\ Q \text{ positive et } K \subset E_Q\}$ où $E_Q = \{x \in \mathbb{R}^2;\ Q(x) \leqslant 1\}$.
   Montrer que C est compact.
3. Montrer qu'il existe un disque elliptique centré en 0 et un seul d'aire minimale et contenant K.

Exercice 3.2.5 Soit

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\times} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^\times} / \sum_{n\geqslant 1} n^2 a_n^2 < +\infty\} \\ H_0 &= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\times} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^\times} / \sum_{n\geqslant 1} a_n^2 < +\infty\} \\ H_{-1} &= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\times} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^\times} / \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n^2}{n^2} < +\infty\}. \end{aligned}$$

1. Définir des produits scalaires sur les H_i et montrer qu'ils sont complets pour les normes associées.
2. Pour $b = (b_n) \in H_{-1}$, montrer que $\Lambda_b : H_1 \to \mathbb{R}$, $a \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ est une forme linéaire sur H_1, quelle est sa norme ? Réciproque ?
3. Montrer que la boule unité de H_1 est une partie compacte de H_0.

Exercice 3.2.6

1. Calculer $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times ...$
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n}$, pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 3.2.7 Soit $n \in \mathbb{N}^\times$ et $\alpha \in]0,1[$. On munit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme subordonnée à la norme hermitienne canonique de $\mathbb{C}^n$. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ contenu dans la boule $B'(I_n, \alpha)$.

1. Que peut-on dire des valeurs propres d'un élément A de G ?
2. Que peut-on dire de G ?
3. Le résultat subsiste-t-il en prenant un intervalle plus grand pour α ?

Exercice 3.2.8 Soit $r \in]0,1[$. On définit une suite (u_n) de réels par :

$$0 < u_0 \leqslant u_1 \text{ et } u_{n+2} = u_{n+1} + r^n u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que (u_n) converge dans $\mathbb{R}$. Soit $l(r)$ la limite.
2. Equivalent de $u_n - l(r)$?

Exercice 3.2.9 Résoudre $\begin{cases} xy' + |y| = 2(x^2-4) \\ y(1) = 1. \end{cases}$

Exercice 3.2.10 Soit H un sous-espace vectoriel de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ tel que

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall x \in [0,1], \quad |f(x)| \leqslant C \|f\|_2$$

(rappel : $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}$)

1. Montrer que tout sous-espace de dimension finie de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ convient.
2. Réciproquement, montrer que H est nécessairement un sous-espace vectoriel de dimension finie et que $\dim H \leqslant C^2$.

Exercice 3.2.11

1. Déterminer la série de Fourier de $t \mapsto \left|\sin \frac{t}{2}\right|$.
2. Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R});\ f\ 2\pi\text{-périodique}\}$ et Φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin(\frac{x-t}{2})\right| f(t)\ dt.$$

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

Exercice 3.2.12 Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞ vérifiant $\forall k, n \in \mathbb{N}$, $x^n f^{(k)}$ est bornée.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ appartient à $\mathcal{S}$.
2. On pose $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ pour $f \in \mathcal{S}$. Etudier l'existence, la continuité, la dérivabilité, la périodicité de F.
3. Calculer les coefficients de Fourier complexes de F et en déduire la formule de Poisson

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$$

avec $\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi ixy}dy$.

4. En admettant que $\widehat{f} = f$ lorsque $f(x) = e^{-x^2}$, expliciter la formule de Poisson pour la fonction $x \mapsto e^{-ax^2}$, où a est un réel strictement positif.

Exercice 3.2.13

1. Développer en série de Fourier $f : x \mapsto e^{iax}$ sur $]-\pi, \pi[$ et de période 2π.
2. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-a^2}$.
3. Justifier l'existence d'une suite de fonctions $u_n(a)$ telle que le produit $\prod_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement et

$$\forall a \in]0,1[, \quad \frac{\sin \pi a}{\pi a} = \prod_{n=1}^{+\infty} u_n(a).$$

Exercice 3.2.14 On définit une application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2(xt)}dt.$$

1. Calculer $F(1)$ puis $F(\frac{1}{2})$. Comment pourrait-on faire pour calculer $F(n)$, $n \in \mathbb{N}$?
2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$. Est-elle unformément continue sur $\mathbb{R}$?
3. Donner les trois premiers termes du développement limité de F en 0 : $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$. Idée pour calculer les termes suivants ?

Exercice 3.2.15

1. Défintion, continuité et dérivablilité de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{1+u^2}\, du$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Trouver un équivalent à f en $+\infty$.

Exercice 3.2.16 On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + x\sin t}$.

1. Montrer que F est bien définie sur $]-1,1[$.
2. Montrer qu'elle est C^∞ sur $]-1,1[$ et expliciter toutes ses dérivées.
3. Montrer que F admet un DSE $F(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ où les a_n sont des rationnels.
4. Montrer que le domaine de définition de F est strictement plus grand que $]-1,1[$.

Exercice 3.2.17 On munit l'espace E des suites $x = (x_n)$ bornées de complexes de la norme $x \mapsto \sup_n |x_n|$. Soit :

$$F = \{x = (x_n);\ \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\} \text{ et } G = \{x = (x_n);\ \sum_{n\geqslant 0} |x_n| \text{ converge}\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces de E et que $G \subset F$.
2. Montrer que l'application de G dans $\mathbb{C} : x = (x_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ n'est pas continue.
3. Montrer que F est fermé dans E et que $\overline{G} = F$.

Exercice 3.2.18 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telque $|a| < 1$. Soit E l'espace des applications continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit T l'application de E dans E qui à f associe $T(f) : x \to f(x) - af(bx)$.

1. T est-elle continue ?
2. Montrer que T est un homéomorphisme de E sur lui-même.

Exercice 3.2.19

1. (a) Montrer que $C_N = \{(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!],] \ |x_k| \leqslant \frac{1}{k}\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

   (b) Montrer que $(u, v) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire de $l^2(\mathbb{N}^\times)$.

   (c) On considère le cube de Hilbert $C_\infty = \{u \in l^2(\mathbb{N}^\times)$ tel que $\forall n \geqslant 1, \quad |u_n| \leqslant \frac{1}{n}\}$.

      i. Donner quelques exemples d'éléments de C_∞.

      ii. Montrer que C_∞ est un compact de $l^2(\mathbb{N}^\times)$

Exercice 3.2.20 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \begin{cases} x(1-y) \text{ si } x \geqslant y \\ y(1-x) \text{ si } x < y \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$ (où Δ désigne la diagonale de $\mathbb{R}^2$).
2. Est-elle différentiable sur Δ ?
3. Soit $K = [0, 1]^2$; montrer qu'il existe un unique $(x_0, y_0) \in K$ tel que $f(x_0, y_0) = \sup_{(x,y)\in K} f(x, y)$ et le calculer.

Exercice 3.2.21

1. Rappeller la définition d'une fonction convexe.
2. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, convexe.
   Montrer que $f(x + h) \geqslant f(x) + df(x).h$ dès que $\|h\|$ est assez petit. Interprétation.
3. Montrer que $\{x \in U \mid df(x) = 0\}$ est une partie fermée convexe de U.

Exercice 3.2.22 On considère l'application $R : (x_0, x_1, x_2) \mapsto (a_0, a_1, a_2)$ où les $(a_i)_{i\in\{0,1,2\}}$ sont définis par

$$(X - x_0)(X - x_1)(X - x_2) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

1. Expliciter le jacobien de f.
2. Déterminer les racines de $P(x) = x^3 - 7x + 6$.
3. Montrer que tout polynôme Q unitaire de degré 3 "proche" de P est scindé sur $\mathbb{R}$ et que ses racines sont "proches" de celles de P.
4. Pour tout réel $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on considère l'équation $(E_t) : x^3 + (\tan t)x^2 - \frac{7}{1+t^2}x + 6e^t = 0$.
   Montrer qu'il existe trois fonctions $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ C^∞ dans un voisinage de 0 telles que
   - $a(0) = 1, \quad b(0) = 2, \quad c(0) = -3$
   - $c(t) < a(t) < b(t)$
   - $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont solutions de E_t.
   - x est solution de E_t ssi $x = a(t)$ ou $b(t)$ ou $c(t)$
5. Donner le $DL_2(0)$ de $a(t)$.

Exercice 3.2.23 Soit f la fonction définie sur $U = \{(x_1, x_2, , x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x_i \neq x_j \ \forall i \neq j\}$ par

$$f((x_1, x_2, x_3)) = \sum_{k=1}^{3} x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} \ln \mid x_i - x_j \mid .$$

1. Représenter graphiquement U et montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\lim\limits_{\|X\| \to +\infty} f(X)$ ainsi que la limite de $f(X)$ lorsque X se rapproche du bord de U. En déduire que f possède un minimum sur U.
3. Soit (a_1, a_2, a_3) un point où se réalise ce minimum. On considère le polynome $H(X) = \prod\limits_{k=1}^{3} (X - a_k)$.
   (a) Montrer que $H''(a_k) - 4a_k H'(a_k) = 0 \ \forall k \in \{1, 2, 3\}$. En déduire que $H''(X) - 4XH'(X) + 12H(X) = 0$.
   (b) Expliciter le minimum de f ainsi que les points où se réalise ce minimum.

Exercice 3.2.24 On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne usuelle $\|.\|_2$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ de la norme subordonnée correspondante notée $|||.|||_2$.
Soit $k \in [0, 1[$ et h une application C^1 de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |||dh(x)|||_2 \leqslant k$.
On note f l'application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ définie par $f(x) = x + h(x)$.

1. Vérifier que f est nécessairement injective.
2. Montrer que, en tout point de $\mathbb{R}^n$, f est un C^1-difféomorphisme local.
3. Montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^d$.
   (pour $Y \in \mathbb{R}^d$, utiliser la suite $(X_n)_{n \geqslant 0} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ définie par $X_{n+1} = Y - h(X_n)$).

Exercice 3.2.25 On considère la forme différentielle $\omega = (2x^3y^2 - x)dx + (2x^2y^3 - y)dy$.

1. La forme ω est-elle fermée sur $\mathbb{R}^2$? Calculer $\int\limits_{S(O,1)} \omega$ (où $S(0, 1)$ désigne le cercle de centre O et de rayon 1.).
2. Trouver $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^\times)$ telle que $g(xy)\omega$ soit exacte.
3. Résoudre l'équation différentielle : $y' = \dfrac{2x^3y^2 - x}{y - 2x^2y^3}$

Exercice 3.2.26

1. Calculer l'intégrale curviligne de la forme

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2} \left[(x \sin x - y \cos x)dx + (x \cos x + y \sin x)dy \right]$$

   sur le contour formé par les deux demi-cercles $x^2 + y^2 = a^2 \ (y \geqslant 0)$, $x^2 + y^2 = b^2 \ (y \geqslant 0)$ avec $0 < a < b$ et les segments $[-b; -a]$ et $[a; b]$ sur l'axe Ox.
2. Déterminer la limite de cette intégrale lorsque $a \to 0$ et $b \to +\infty$.
3. En déduire le calcul de $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} \, dx$.

Exercice 3.2.27 Calculer $I = \iiint\limits_D \dfrac{z^3}{(x + y + z)(y + z)} \, dxdy$ avec $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, \text{ et } x + y + z \leqslant 1\}$.
On pourra utiliser le changement de variable $u = x + y + z, \quad v = \dfrac{z}{y + z}, \quad w = \dfrac{y + z}{x + y + z}$.

Exercice 3.2.28 éterminer $\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ pour que la forme différentielle

$$\omega(x,y) = \left(\frac{y}{1+x^2}dx + \frac{x}{1+y^2}dy\right)\varphi(x^2+y^2)$$

soit exacte. Trouver alors une primitive de ω.

Exercice 3.2.29

1. Justifier que l'équation différentielle

$$(E) : y' = \frac{2x^3y^2 - x}{y - 2x^2y^3} \text{ avec } y(0) = 1$$

possède une unique solution.

2. On considère la forme différentielle $\omega = (2x^3y^2 - x)dx + (2x^2y^3 - y)dy$.
   (a) La forme ω est-elle fermée sur $\mathbb{R}^2$?
   (b) Trouver $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^\times)$ telle que $g(xy)\omega$ soit exacte.
   (c) Résoudre l'équation différentielle (E).

Exercice 3.2.30

1. Justifier que $\det : A \mapsto \det A$ est différentiable sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la dérivée selon H de det au point I_n.
3. Expliciter la différentielle de det en tout point de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3.2.31 On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' = \frac{1}{1+x^2+y^2} \text{ avec } y(0) = 0$$

1. Montrer que la solution maximale, notée φ, est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et impaire.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = L$ existe et que $0 \leqslant L \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
4. Montrer que $\varphi(x) - L \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
5. Donner le $DL_3(0)$ de φ.

Exercice 3.2.32

1. Soient $f_1, ..., f_n$ n applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
   Montrer que la famille $(f_1, ..., f_n)$ est libre si et seulement si pour toute famille $(x_1, ..., x_n)$ de réels distincts $\det(f_i(x_j)) \neq 0$.
2. Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et (f_n) une suite de E.
   Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$ ssi (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
3. Supposons en outre que E est stable par translation, i.e. $\forall f \in E, \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_t : (x \mapsto f(x-t)) \in E$.
   Montrer que $E \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 3.2.33 Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer l'existence et l'unicité d'une matrice racine carrée définie positive de A.
2. On pose $X_0 = I_n$ et $X_{p+1} = \dfrac{1}{2}(X_p + AX_p^{-1})$ pour $p \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que la suite (X_p) est bien définie et à valeurs dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(b) Etudier la convergence de la suite (X_p).

(c) Donner un ordre de grandeur de la vitesse de convergence.

Exercice 3.2.34

1. Montrer que $(C^0([0,1],\mathbb{R}),\|\|_\infty)$ est un espace métrique.
2. Montrer que $\Lambda : f \to \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt$ est une application linéaire continue.
3. Calculer sa norme subordonnée.

Exercice 3.2.35 Soit $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $D = \dfrac{d}{dx}$ l'endomorphisme de E défini par $\dfrac{d}{dx}(f) = f'$ et U_r l'endomrphisme de E défini par $U_r(f)(x) = e^{rx}f(x)$.

1. Montrer que U_r est inversible et calculer $U_r D U_r^{-1}$.
2. Déterminer $\ker((D - rId)^\alpha)$.
3. Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Donner la forme des solutions C^∞ sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a_p y^{(p)}(x) + a_{p-1}y^{(p-1)}(x) + .. + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

4. Que proposer vous pour expliciter toutes les suites récurrentes du type

$$a_p u_{n+p} + a_{p-1}u_{n+p-1} + .. + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n = 0\,?$$

Exercice 3.2.36 Montrer que $\forall n \geqslant 0, \exists! x_n \in \mathbb{R}$ tel que $x_n + \ln(x_n) = n$. Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.

Exercice 3.2.37 Préliminaire : Soit $r \in [0,1[$, montrer que la suite $x_n = \prod_{k=0}^{n}(1 + r^k)$ converge.et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leqslant \exp(\dfrac{1}{1-r})$.
Soient trois réels a, b, r tels que $r \in [0,1[$, a et b appartiennent à $\mathbb{R}_+$. Soit u une suite réelle telle que

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + r^n u_n \text{ avec } u_0 = a \text{ et } u_1 = b$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge. On note $L(r,a,b)$ la limite de cette suite.
2. Montrer que la fonction $r \mapsto L(r,a,b)$ est croissante sur $[0,1[$ et déterminer sa limite en 0^+.
3. Montrer que la fonction $r \mapsto L(r,a,b)$ est continue sur $[0,1[$ Indication : on démontrera qu'elle est convexe

Exercice 3.2.38 Soit (x_n) une suite de réels. On pose $y_n = x_n + 2x_{n+1}$.
Etablir l'équivalence : (x_n) converge $\Leftrightarrow$ (y_n) converge. Le résultat subsiste-t-il en posant $y_n = x_n + \dfrac{1}{2}x_{n+1}$?

Exercice 3.2.39

1. Soit A un endomorphisme d'un espace de Banach E tel que $\|A\| < 1$.
   Montrer que $(I - A)$ est inversible et expliciter cet inverse en fonction de la suite $(A^n)_{n\geqslant 0}$.
2. Soient g une fonction continue sur $[0,1]$ (à valeurs réelles) et a, b deux nombres réels tels que $a \in]-1,1[$ et $b \in [0,1[$.
   Montrer qu'il existe une et une seule fonction f_g continue sur $[0,1]$ (à valeurs réelles) telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) = f_g(x) - a f_g(bx)$$

3. Que peut-on dire de l'application $g \mapsto f_g$?

Exercice 3.2.40 Soit u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
Etudier le comportement de u et, dans chaque cas, donner un développement à deux termes de u_n.

Exercice 3.2.41 Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(u_1, v_1) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\times$ $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \alpha \dfrac{v_n}{n(n+1)} \\ v_{n+1} = v_n + \beta \dfrac{u_n}{n(n+1)}. \end{cases}$ On pose $t_n = |u_n| + |v_n|$.

1. Montrer que (t_n) est bornée.
2. Quelle est la nature de (u_n) et (v_n) ?
3. Donner un développement limité de u_n et de v_n à l'ordre 2.

Exercice 3.2.42

1. Etude rapide de $x \overset{\varphi}{\mapsto} \int_0^x e^{t^2} dt$ (tableau de variation complet, asymptotes).
2. Montrer que la relation $\int_x^{f(x)} e^{t^2} dt = 1$ définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et exprimer f en utilisant $\varphi(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.
3. Etudier f : continuité, dérivabilité, sens de variation, asymptote en $+\infty$.

Exercice 3.2.43 Existence et calcul de $\int_0^{2\pi} \dfrac{dx}{(a + \cos x)(b + \cos x)}$

Exercice 3.2.44 Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \sqrt{1 + t^n} dt = l$ et un équivalent de $\int_0^1 \sqrt{1 + t^n} dt - l$.

Exercice 3.2.45 Selon a et b, convergence et calcul de $\int_0^1 \dfrac{t^2 - at - b}{t \ln^2 t}\, dt$

Exercice 3.2.46 Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^2}{(1 + t^4)^n} dt$.
Calculer I_{n+1} en fonction de I_n. Etudier la limite de (I_n), puis la nature de la série ΣI_n.

Exercice 3.2.47 On pose $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}t}$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.
3. Est-elle intégrable sur $\mathcal{D}_f$?
4. Donner les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
5. Déterminer les équivalents aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
6. Etudier sa classe (déterminer le meilleur entier k tel que f soit C^k sur $\mathcal{D}_f$)

Exercice 3.2.48 On pose $u_n(x) = (1 + \dfrac{x}{n})^n$ et on note $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \dfrac{dt}{t}$.

1. Pour x fixer, justifier que la suite $(u_n(x))_{n \geqslant 1}$ est monotone à partir d'un certain rang puis déterminer sa limite simple.
2. Montrer que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^n (1 - \dfrac{t}{n})^n t^x \dfrac{dt}{t}$. En déduire une autre écriture de $\Gamma(x)$.

3. Etudier les différents modes de convergence de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 0}$

Exercice 3.2.49 Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum_n a_n$ converge. On note $S=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit une suite (f_n) de fonctions par $f_0=f$ et $f_n(x)=\dfrac{1}{a_n}\int_x^{x+a_n} f_{n-1}(t)\,dt$ pour $n\geqslant 1$.

1. Montrer que f_n est C^n.
2. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\beta-S>\alpha$. On pose $K_n=\max_{x\in I_n}|f_n(x)|$ où $I_n=[\alpha,\beta-\sum_{k=0}^{n} a_k]$. Comparer K_n et K_{n+1}.
3. Majorer $|f_n(t)-f_n(x)|$ en fonction de K_0, x et t pour $n\geqslant 1$.
4. En étudiant $\sum_n (f_{n+1}-f_n)$, montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction φ sur tout compact de $\mathbb{R}$.
5. Montrer que φ est C^∞.
6. Que dire de φ si f est un polynôme (resp. une exponentielle) ?

Exercice 3.2.50 Développer de deux façons différentes $\dfrac{1}{(1-z^2)(1-z^3)}$ en série entière.
En déduire $a_n=\text{card}\{(x_1,x_2)\in\mathbb{N}^2 \text{ tel que } 2x_1+3x_2=n\}$ puis montrer que $a_{2003}=334$ et $a_{2004}=335$.

Exercice 3.2.51 On pose $f(x)=\int_0^{\pi/2}\dfrac{dt}{1+x(\cos t)^2}$

1. Domaine de définition.
2. Montrer que la fonction f est développable en série entière au voisinage de 0.
3. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2}(\cos t)^{2n}dt$.
4. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n C_{2n}^n}{4^n}$.

Exercice 3.2.52 La fonction $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sin(a^n x)$ est-elle développable en série entière ? Si oui, effectuer le DSE.

Exercice 3.2.53 Montrer qu'il existe une application g développable en série entière autour de 0 vérifiant $g'(x)=(\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{x^{k-1}}{k})g(x)$.
En déduire que $\exp(\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{x^k}{k^2})$ est développable en série entière autour de 0, avec un rayon de convergence $\geqslant 1$.

Exercice 3.2.54 Soit f une application C^∞ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Soit (E) l'équation différentielle : $y"+y=f(x)$.

1. Montrer que $y_1(x)=\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$ est solution de (E).
2. Déterminer la forme générale des solutions de (E).
3. On suppose f T-périodique. Existe-t-il des solutions T-périodiques de (E) ?

Exercice 3.2.55 E désigne l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et, pour $n \in \mathbb{N}^\times$, Φ_n est l'endomorphisme de E défini par

$$\Phi_n(y) : x \mapsto xy"(x) - (x + 2n)y'(x).$$

1. Quel est le noyau de Φ_n ?
2. $\mathbb{R}_n[X]$ est-il stable par Φ_n ?
3. Trouver les valeurs propres de Φ_n. Soit λ l'une d'entre elles. Trouver un polynôme $P \neq 0$ tel que $\Phi_n(P) = \lambda P$. Trouver toutes les fonctions propres associées à λ
(Indication : on pourra faire le changement de variable $y = e^x z$).

4 Indications exercices PSI*

4.1 Algèbre-géométrie

Indication pour l'exercice 1.1.1 : Diagonaliser A, $A^n = PD^nP^{-1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!} = P\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D^n}{(2n)!}\right)P^{-1}$

Indication pour l'exercice 1.1.2 : $e^{i\phi}+1 = e^{i\frac{\phi}{2}}(e^{i\frac{\phi}{2}} + e^{-i\frac{\phi}{2}})$ d'où une relation de récurrence sur $(\rho_n)_n$ et une sur $(\phi_n)_n$
Pour la courbe, quelle relation existe-t-il entre $|z_{n+1}|$ et $|z_n|$? chercher alors une courbe autorisant la fluctuation du module.

Indication pour l'exercice 1.1.3 :

1. Calculer ses valeurs propres puis A diagonalisable ssi la multiplicité de toutes les valeurs propres = ...
   On peut égaler raisonner par l'absurde si A est diagonalisable alors A est semblable à ..... donc $A = ...$
2. $A = Mat(u, \mathcal{B})$ alors A est semblable à B ssi il existe une base $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ telle que $B = Mat(u, \mathcal{C})$. Dans ce cas écrire $u(f_i)$ en fonction de f_1, f_2, f_3, écrire les équations correspondantes et les résoudre (en passant par les coordonnées) en se rappelant que $BX = u(x)$
3. $AM = MA$ et $A = PA'P^{-1}$. Montrer que $M' = P^{-1}MP$ vérifie $A'M' = M'A$ et résoudre l'équation

Indication pour l'exercice 1.1.4 :

1. Si u est l'endomorphisme associé à A dans la base canonique alors $u(V_i) = AV_i = ..$. La matrice B de u dans la base $(V_i)_i$ est ..... donc $A = PBP^{-1}$ où P est la matrice ....
2. $A = PA'P^{-1}$, $A^n = P(A')^nP^{-1}$, $A = -I_3 + N$ avec N nilpotente et on invoque une connaissance de Newton
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^nA^n}{n!} = P\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}(A')^n\right)P^{-1}$

Indication pour l'exercice 1.1.5 :

1. On factorise a_i dans la $i^{ième}$ ligne, on effectue $L_k \leftarrow L_k - L_i$ et on développe selon la $i^{ième}$ colonne
2. Le polynôme P est de degré ...de coefficient dominant ..... La fraction rationnelle $\frac{P(X)}{(X-a_1)..(X-a_n)}$ est de degré ..., elle se décompose en

$$\frac{P(X)}{(X-a_1)..(X-a_n)} = E + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{X-a_j}$$

(sous la condition que les $(a_i)_i$ soient deux à deux distincts) et on applique les méthodes usuelles de sup (en se rappelant les décompositions de $\frac{Q}{R}$ lorsque R est à racines simples. Le cas où certains a_i soient égaux se traite par densité

4.2 Analyse

Indication pour l'exercice 1.2.1 :

1. Traiter séparément les cas n pairs et n impairs, se rappeler que $\sum = \sum_{\text{impair}} + \sum_{\text{pair}}$ et utiliser les théorèmes de sommation sur des séries divergentes convenablement choisie

2. Le cas $\alpha > 1$ est simple. Si $\alpha \in]0,1]$, le terme a_n est du signe de .... donc la série est ..... Pour la monotonie de $|a_n|$ se ramener à l'étude de $a_{2n+1} + a_{2n}$ et utiliser la concavité de $x \mapsto x^\alpha$ en des points convenablement choisis

Indication pour l'exercice 1.2.2 :

1. Revoir son théorème de dérivation sous le signe $\int$ dans le cas général (Lebesgue) et être C^1 sur $\mathbb{R}$ est équivalent à être C^1 sur tous les segments.
2. Oh la belle intégrale de fractions rationnelles ! Vite le cours de sup (décomposition en éléments simples, etc)

Indication pour l'exercice 1.2.3 : $f(\frac{x}{3^{k+1}}) - f(\frac{x}{3^k}) = ..$ puis sommation et principe des dominos (ou télescopage)

Indication pour l'exercice 1.2.4 : Analyse : On obtient a_n en fonction de a_{n+2}. On fera attention à la division par 0. Deux coefficients sont alors nécessairement nuls et tous les autres sont fonction de deux coefficients (a_3 et a_4).
Synthèse : la solution est combinaison de deux séries entières dont les rayons de convergence sont non nuls.
Sur un intervalle ne contenant pas 0, l'espace des solutions est de dimension ..... et nos deux solutions sont .....

Indication pour l'exercice 1.2.5 :

1. Si $x > 0$, $\quad e^{-x} < 1$ donc on pense au DSE de $\dfrac{1}{1-x}$ et on vérifie correctement les théorèmes du cours.
   On n'oublie pas que $\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix})$
2. On n'oublie pas que $\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix})$ et $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$ et on connait les primitives de e^{bx} pour $b \in \mathbb{C}$
3. On cherche une valeur particulière de x pour laquelle le DSF de f est le développement en série de I

5 Indications exercices MP

5.1 Algèbre-géométrie

Indication pour l'exercice 2.1.1 :

1.
   (a) Calculer $G^k(M)$ et en déduire un polynôme annulateur de G.
   (b) Calculer $G(E_{i,j})$
2. Méthode identique au 1
3. Calculer soigneusement $G \circ D$ et $D \circ G$.
   En déduire que tout sous-espace stable de G (par exemple, les sous-espaces propres) est stable par D. En déduire l'existence d'une base commune de réduction

Indication pour l'exercice 2.1.2 :

1. RAS
2. A est semblable à A' ssi il existe un endomorphisme u et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ telle que $A = Mat(u, \mathcal{B})$ et $A' = Mat(u, \mathcal{C})$.
   Si on considère que $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ alors l'endomorphisme u est défini par $u(x) = AX$. Dans ce cas écrire $u(f_i)$ en fonction de f_1, f_2, f_3, écrire les équations correspondantes et les résoudre (en passant par les coordonnées
3. Vérifier que $Vect(A, B)$ est stable par produit, chercher l'élément neutre pour la multiplication (attention, il ne s'agit pas de I_3, il faut donc se rappeler de la définition d'un élément neutre $\widetilde{1}$ pour la multiplication dans un anneau) et enfin, déterminer pour chaque C de $Vect(A, B)$ un élément D de $Vect(A, B)$ tel que $CD = \widetilde{1}$

Indication pour l'exercice 2.1.3 :

1. Soit u l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{Q}^3$ est A.La matrice de u dans la base (x, Ax, A^2x) est .....
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, montrer que $X^3 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ (cf.la définition dans le cours), le polynôme caractéristique P de A est de degré .... donc $P = ..$
   Si $aI + bA + cA^2 = 0$ alors le polynôme $a + bX + cX^2$ est annulateur de A donc ...
   Si $aI + bA + cA^2$ est un élément non nul de E, on chercher $a'I + b'A + c'A^2$ tel que

$$(aI + bA + cA^2)(a'I + b'A + c'A^2) = I$$

   On développe et on utilise l'équation satisfaite par A ainsi que l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ de I, A, A^2 ce qui amèbe à un système linéaire d'équations
   Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, chercher A sous la forme d'une homothétie et en déduire une équation de dépendance linéaire

Indication pour l'exercice 2.1.4 :

1. Diagonaliser A. $A = PDP^{-1}$ et si M est dans le commutant, montrer que $M' = P^{-1}MP$ commute avec D
   Ecrire la matrice de $X \mapsto AX - XA$ dans la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ puis déterminer son image
2. L'implication directe n'utilise que les propriétés usuelles de la trace.
   La réciproque : si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E, ${}^t u$ est l'endomorphisme de E défini par $(u(x), y) = (x, {}^t u(y))\ \forall x, y \in E$. Montrer que ${}^t\Phi_A = \Phi_{{}^t A}$ (merci les propriétés usuelles de la trace) donc $\Phi_A =$ ..... puis se réferrer à son cours sur la formule $(\mathrm{Im}^t u) = ...$

Indication pour l'exercice 2.1.5 :

1. A quelles conditions sur z, le polynôme caractéristique possède des racines multiples ?
2. Une valeur propre est racine de .....
3. Montrer que si x est une valeur propre de $M(z)$ et si $|x| > 1$ alors $|x|^3 \leqslant 2|z||x|$ donc $|z|$ ...

Indication pour l'exercice 2.1.6 : Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer que si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à λ alors $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$ est aussi vecteur propre associé à ... On considère ensuite l'application $X \mapsto \overline{X}$

Indication pour l'exercice 2.1.7 : Montrer que A et B commutent. En déduire que chaque sous-espace propre de B est stable par A puis considérer l'endomorphisme $u_{|F}$ où u est l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est B et F parcourt les sous-espaces propres de A

Indication pour l'exercice 2.1.8 :

1. Comment construire un carré à partir d'une diagonale ? cf. les cours de collège : =) puis un losange est un carré ssi .....
2. Monotonie de la suite, limites éventuelles. Pour l'équivalent, déterminer α tel que $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ tende vers une limite non nulle puis Césaro ou les sommes partielles de séries divergentes.
   Pour le second terme, introduire $v_n = u_n -$l'équivalent puis expliciter une relation de récurrence sur la suite v

Indication pour l'exercice 2.1.9 : Utiliser le théorème des noyaux et écrire la matrice de l'endomorphisme associé dans la base correspondante. Ensuite si deux endomorphismes commutent, les espaces stables pour l'un sont stables pour l'autre ce qui nous donnera de jolies matrices. On invoque alors Conan et on se lance dans les calculs barbares.

5.2 Analyse

Indication pour l'exercice 2.2.1 :

1. Justifier que, pour n assez grand, l'on puisse passer au logarithme et, en utilisant les DL, montrer que $|\ln(1+x) - x| \leqslant Cx^2$ pour une constante C convenable et x petit.
2. Le premier point est résolu par l'encadrement précédent pour la suite $(\ln f_n)$. Pour en déduire la convergence uniforme pour (f_n), appliquer l'inégalité des acrroissements finis à la fonction $x \mapsto \exp x$ en deux points convenablement choisis. Pour le second, prendre $\varphi = 1$ et procéder par l'absurde : la suite $(f_{n+1} - f_n)$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ donc elle est bornée ...

Indication pour l'exercice 2.2.2 : $x^{-x} = \exp(-x \ln x)$ et utiliser le DSE de $x \mapsto \exp$. Etablir également une relation de récurrence sur les intégrales paramétrées par n

Indication pour l'exercice 2.2.3 : N'est-ce pas (à un facteur près) une belle somme de Riemann ?

Indication pour l'exercice 2.2.4 : Il s'agit d'une série ... donc on peut appliquer (tous) les résultats du théorème associée. Pour les limites, se réferer aux théorèmes sur les limites de série et pour la limite en 0, seul le terme $n = 0$ est génant

Indication pour l'exercice 2.2.5 :

1. Utiliser $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + \dfrac{(-x)^{n+1}}{1+x}$, intégrer et estimer la dernière intégrale.
2. On utilise le développement en série du 1 pour $\int_0^1 \dfrac{x^t}{1+x^2} dx$ et l est égal à ce développement lorsque $t =$. On soustrait et on applique un théorème sur les limites de séries de fonctions. Pour finir, la somme obtenue a déjà été calculer au moins une fois dans le chapitre sur les séries de Fourier pour ceux qui souhaitent expliciter complétement l'équivalent.

Indication pour l'exercice 2.2.6 : J'aime les logarithmes, les équivalents de séries divergentes. Je n'oublie jamais que $u_n \tilde{} v_n \not\Rightarrow \exp(u_n) \tilde{} \exp(v_n)$. Par contre $u_n = v_n + o(1)$ alors $\exp(u_n) = \exp(v_n)\exp(0(1)) \tilde{} \exp(v_n)$ donc on revoit les méthodes usuelles pour obtenir des DAS à l'ordre 2 et plus. En particulier, pour les termes suivants le premier, on introduit une suite auxialiaire a_n égale à la suite moins son équivalent et on étudie $a_{n+1} - a_n$.

Indication pour l'exercice 2.2.7 : RAS

1. RAS à part voir son cours et l'inégalité triangulaire
2. L'inégalité triangulaire est une égalité ssi tous les termes de la somme sont de même signe
   Une fonction continue sur un compact .....

Indication pour l'exercice 2.2.8 : $\cos(a-b) =$ .., et la fonction $x \mapsto \int_0^x h(t)dt$ est la ..... de h donc elle est .... La fonction $f = 2x\int ...$ est de classe ....Ensuite montrer que f est solution d'une équation différentielle du second ordre.

Indication pour l'exercice 2.2.10 :

1. Ecrire le DSE de f puis calculer $\int_0^x \frac{t^n}{x+t}dt$ à l'aide d'un changement de variable très simple (pour lequel les bornes d'intégrations sont constantes)
2. Deux séries entières sont égales ssi .....
3. Majorer simplement les intégrales intervenant dans le DSE. Si I_n est la $n^{ième}$ intégrale dans le DSE de $\phi(f)$, montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$

Indication pour l'exercice 2.2.9 : Se ramener à une simple somme, utiliser une décomposition en éléments simples et se rappeler du développement asymptotique de la somme partielle de la série harmonique.

Indication pour l'exercice 2.2.11 : J'ai toujours eu un faible pour le binôme de physique de Newton. On décompose la somme relativement aux pairs et impairs. On se rappelle des parties réelles et imaginaires de $(x+iy)^n$. Une suite complexe converge si et seulement si son module et son argument convergent.

6 Indications exercices MP*

6.1 Algèbre-géométrie

Indication pour l'exercice 3.1.1 : On pose $G(M) = AM$ (resp. $D(M) = MA$) Calculer $G^k(M)$ (resp. $D^k(M)$) et en déduire un polynôme annulateur de G (resp. D). Calculer soigneusement $G \circ D$ et $D \circ G$. Montrer que tout sous-espace stable de G est stable par D. En déduire l'existence d'une base commune de réduction

Indication pour l'exercice 3.1.2 :

1. Si E est borné, la distance en deux points est borné. Dans le cas contraire construire une suite d'éléments disctints de E dont les normes tendent vers $+\infty$.
2. Si $A \subset B$, $\sup A .... \sup B$
3. Traiter pour commencer le cas $n = 3$ et utiliser que $abc = \sqrt{ab}\sqrt{ac}\sqrt{bc}$
   Traiter le cas $n = 4$ et utiliser que $abcd = \sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{abd}\sqrt[3]{acd}\sqrt[3]{bcd}$ et on fera attention que $\delta(*..*)$ porte sur tous les couples possibles et imaginables de $\{*..*\}$
   Pour le cas général utiliser une formule du type $x_1..x_n = \sqrt[?]{*}\sqrt[?]{*}..\sqrt[?]{*}$
4. Pour calculer d_3 se ramener sur la droite réelle et montrer que l'on peut se ramener à l'étude de la fonction $x \mapsto (x-a)(b-x)$ sur le segment $[a, b]$

Indication pour l'exercice 3.1.3 : Si f est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ sur un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, alors $f((1,0)) = A$ et $f((0,1) = B$ sont deux matrices de $GL_n(\mathbb{R})$. Chacune est d'ordre 4 et on remercie le théorème des noyaux), elles commutent ($(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ est commutatif) et l'intersection du groupe engendré par A et celui engendré par B est réduit par $\{I_n\}$. Il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient réduites et traiter pour commencer le cas $n = 4$..

Indication pour l'exercice 3.1.5 :

Justifier que $W(v)$ est toujours engendré par v, Aw et A^2w (se rappeler d'un polynôme annulateur standard) donc $W(v) = E$ si et seulement si la famille .....puis effectuer la réduction de A pour trouver les CNS (conditions nécessaires et suffisantes)

Indication pour l'exercice 3.1.6 :

1. Regrouper les racines $n^{ième}$ de l'unité selon leurs ordres dans $\mathbb{U}_n$. Si ζ est une racine $n^{ième}$ de l'unité d'ordre d, montrer que $d \mid n$ et que ζ est un générateur de $\mathbb{U}_{????}$.
2. Passer au degré et trouver à quelle condition arithmétique sur k, $\exp(\frac{2\pi ik}{d})$ est générateur de $\mathbb{U}_d$ puis revoir la définition de l'indicatrice d'Euler.
3. Procéder par récurrence sur n et, en posant $P(X) = \prod_{\substack{d|n \\ d<n}} \Phi_d(X)$, utiliser la formule du 1 qui montre que $\Phi_n(X)P(X) = X^n - 1$

Indication pour l'exercice 3.1.7 :

1. RAS
2. RAS
3. Montrer que $\{\varphi_a, a \in G\}$ est un sous-groupe de $\operatorname{Aut} G$. Un sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique (le démontrer si vous ne vous rappelez pas la démonstration). Montrer ensuite qu'il existe $c \in G$ tel que pour tout $a \in G$, il existe n tel que $\varphi_a = \varphi_{c^n}$. Montrer que $\varphi_a = \varphi_b$ si et seulement ab^{-1} commute avec tous les éléments de G. En déduire une écriture de xy et de yx pour x et $y \in G$.
4. $G = (\mathbb{Z}, +) : f(n) = f(1 + \cdots + 1) = f(1) + \cdots f(1)$ puis obtenir la forme du morphisme et enfin décrire à quelle condition un tel f est bijectif
   $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ même méthode en utilisant les classes, mais $f(\overline{1}) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. f est surjective alors $\overline{1}$ admet un antécédent, ce qui implique une certaine condition nécessaire. Montrer finalement

qu'elle est suffisante.
$G = (\mathbb{Z}^2, +)$. Que dire de $f(a,0)$, de $f(0,b)$, puis $f(1,0), f(0,1) \in \mathbb{Z}^2$ puis écrire $f(a,b)$ à l'aide d'une matrice A à coefficients entiers. Montrer que f est bijective si et seulement A est inversible et son inverse est aussi à coefficients entiers.
$G = (\mathcal{S}_3, \circ)$. Décrire explicitement G, montrer qu'un élément σ d'ordre k alors $f(\sigma)$ est d'ordre k si f est un automorphisme. En déduire les images possibles des transpositions et des 3-cycles. Pour la gloire (:-)), montrer que $\mathrm{Aut}\, G$ est isomorphe à G (utiliser les φ_σ).

Indication pour l'exercice 3.1.8 : Rechercher une racine évidente et écrire le tableau de multiplication de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Indication pour l'exercice 3.1.9 : Montrer que $f(k \bmod 7) k f(1 \bmod 7)$. Que dire d'un élément $\overline{a}$ de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ tel que $7\overline{a} = 7 \bmod 13$

Indication pour l'exercice 3.1.10 :

1. Choisir une base $\mathcal{B}$ de E. En écrivant tout complexe en forme cartésienne, obtenir une famille génératrice sur $\mathbb{R}$.
   Comparer $\overline{AX}$ et $\overline{AX}$.
2. Combien de racines réelles le polynôme annulateur de A possède-t-il ? Que dire de ces valeurs propres complexes ? de leurs multiplicités ?
3. (a) le déterminant est notre ami.
   (b) A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Quelles sont ses valeurs propres ? que dire de leurs multiplicités respective ? A partir de cette base de vecteurs propres de $\mathbb{C}^n$, construire une base de $\mathbb{R}^n$ et écrire la matrice semblable à A correspondant à ce changement de base.

Indication pour l'exercice 3.1.11 : Se rappeler que les transvections, les dilatations engendre $GL_2(k)$ (cela découle du pivot de Gauss) et calculer le commutateur $xyx^{-1}y^{-1}$ lorsque x est une dilatation et y une transvection. Ensuite déterminer, à l'aide d'une équation différentielle, les fonctions dérivables en 1 $f : \mathbb{R}_+^\times \to \mathbb{R}_+^\times$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(xy) = f(x)f(y)$. Montrer que l'on peut toujours supposer f dérivable en 1.

Indication pour l'exercice 3.1.12 :

1. Montrer qu'il s'agit d'une forme n-linéaire alternée puis l'évaluer sur la base canonique.
2. (a) Rechercher la dérivée du déterminant lorsque $n = 2$ en exploitant les DL puis étendre la formule en général.
   (b) La question précédente ne sert donc à rien ! :-) Pour $(i) \Rightarrow (iii)$, procéder par l'absurde.

Indication pour l'exercice 3.1.13 :

1. RAS
2. Passant aux endomorphismes associés, utiliser que les espaces propres d'un endomorphismes sont stables par cet endomorphisme, puis que, si deux endomorphismes commutent, alors les sous-espaces stables pour l'un sont stables pour l'autre. En déduire la forme nécessaire pour la matrice B puis montrer que la réciproque est vraie. Conclure en explicitant une base ou en explicitant un isomorphisme entre $\mathcal{C}(A)$ et ? ? ? ?
3. Trigonaliser A et rajouter sur le $i^{ième}$ coefficient diagonal un terme de la forme $\dfrac{ia}{k}$ pour et k un entier pouvant tendre vers $+\infty$ et a un réel suffisamment bien choisi pour que la nouvelle matrice possède des valeurs propres distinctes (traiter, par exemple au départ, le cas $n = 3$).

4. Introduire l'endomorphisme Φ_A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\Phi_A(X) = AX - XA$ et exprimer $\mathcal{C}(A)$ à l'aide de Φ_A. Utiliser ensuite qu'une matrice est de rang inférieur ou égal à r si et seulement toutes les sous-déterminants d'ordre $k > r$ de cette matrice sont nuls (cf. le cours sur la caractérisation du rang d'une matrice en fonction des sous-déterminants). Invoquer pour finir, la continuité de l'application qui à une matrice associe un sous-déterminant.

Indication pour l'exercice 3.1.14 :

1. ${}^tA_n = ..$? donc le cours affirme que ...
2. $(AB)_{i,j} = \sum_k a_{i,k}b_{k,j}$, dans cette somme seul 3 termes peuvent intervenir $k = j-1, j, j+1$. Considérer ensuite les cas $i < j, i = j$ et $i > j$
3. On calcule par récurrence le déterminant de B_n en développement la première colonne. On en déduit $\det A_n$.
4. On trouve une relation de récurrence pour le polynôme caractéristique qui est

$$\forall n \geqslant 2, \quad P_n(X) = (2 - X)P_{n-1}(X) - P_{n-2}(X).$$

   Pour $x \in \mathbb{R}$ convenable (pour obtenir un discriminant positif), expliciter le polynôme caractéristique en fonction de x (la formule est plus ou moins longue). Pour déterminer les constantes initiales, étendre la formule de récurrence pour $n \geqslant 0$, en recherchant la valeur correcte de P_1 (en utilisant P_2 et P_3) ainsi que celle de P_0 (à l'aide de P_1 et P_2). Pour exhiber les racines de P_n, on remarque qu'il existe, dans l'expression de P_n, essentiellement deux expressions du type $\alpha + \sqrt{\beta}$ et $\alpha - \sqrt{\beta}$. Il est intéressant de faire un chagement de variable sur x, pour que le conjugué dans $\mathbb{C}$ de $\sqrt{\beta}$ soit -$\sqrt{\beta}$, c'est-à-dire que $\sqrt{\beta}$ est un imaginaire pur donc β soit l'opposé d'un carré parfait (faire un début de carré parfait puis voir du côté de la trigonométrie).
5. Une matrice symétrique est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont ? ? ? ?

Indication pour l'exercice 3.1.15 :

1. Voir son cours sur la définition d'une application nulle et sa contraposée.
2. Que dire de BX_0 ? En déduire BA^kX_0.
3. $A^r = 0$ si $r \geqslant n$ et montrer que la famille $(I, A, .., A^{n-1})$ est libre.
4. montrer que $AX = XA$ donc $X = \cdots$ et résoudre alors l'équation.

Indication pour l'exercice 3.1.16 :

1. Si deux matrices commutent, les espaces propres de l'une sont stables par l'autre. Que dire de la dimension des espaces propres de A ?
2. A est diagonalisable sur k si et seulement $k^n = ...$ et on applique le théorème des noyaux.
3. Ne disposons nous pas d'une belle base de vecteurs propres de B ?
4. On a une inclusion. Montrer que la réciproque est vraie.
5. Justifier que X commute avec $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$. En déduire la forme de X.

Indication pour l'exercice 3.1.17 : Utiliser $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculer ses puissances successives. En déduire que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Quelles sont les valeurs propres éventuelles ?

Rechercher les vecteurs propres correspondants. $(PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$. En déduire que M est diagonalisable. Le déterminant d'une matrice est égal au produit des valeurs propres. Remarquer que $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k$ est la dérivée de ? ? ?

Indication pour l'exercice 3.1.18 :

1. On a un beau polynôme annulateur.
2. Si A est inversible, montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\}$ et en déduire une contradiction. Montrer ensuite que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\}$ et en déduire $\dim\ker A$. Procéder ensuite par analyse pour obtenir la forme des deux derniers vecteurs et exploiter le théorème des noyaux pour la synthèse.
3. Considérer l'endomorphisme associé à u. Soit v sa restriction à $\ker(A^2+A+I)$ et $w = \frac{2}{\sqrt{3}}(v + \frac{1}{2}\,\mathrm{Id})$.Calculer w^2 et montrer que $\dim_{\mathbb{R}}\ker(A^2+A+I)$ est pair. Montrer ensuite que l'on peut construire une base dans laquelle la matrice de w est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$..

Indication pour l'exercice 3.1.19 :

Cas $A = \begin{pmatrix} 16 & -8 & -16 \\ 16 & -8 & -16 \\ 8 & -8 & -8 \end{pmatrix}$ Son polynôme caractéristique est $X(X+8)(8-X)$. Montrer que X commute avec A. En déduire que tout vecteur propre de A est vecteur propre de X.

Cas $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ Montrer que X est de la forme $\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ puis étudier l'équation $B^2 = I_2$. Si B admet une valeur propre réelle, montre que $B = I_2$. Sinon, trouver un polynôme annulateur de degré 2 de B puis montrer que B est équivalente sur $\mathbb{R}$ à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 3.1.20 : La matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Résoudre l'équation $X^2 + X = A$ dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ puis dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Indication pour l'exercice 3.1.21 :

1. Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ euclidien et revoir ses formules sur le produit vectoriel. Etudier toutes les réductions possibles (diagonalisation sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, trigonalisation sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$),
2.
   (a) $\|x \wedge y\| \leqslant ...$
   (b) $g = \exp f$? que vaut alors ${}^t gg$? $\det\exp f = \mathrm{tr}\exp f$. En déduire l'axe de rotation et deux valeurs possibles pour l'angle de rotation. Montrer qu'il existe une BON de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ et calculer les différentes puissances de $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 3.1.22 :

1. Revoir son cours sur la caractérisation des matrices orthogonales en dimension 3.
2. X commute avec A donc elle laisse stable l'axe de rotation ainsi que le plan de rotation, donc X est conjugué à une matrice du type ....

Indication pour l'exercice 3.1.23 :

1. La donnée d'un polynôme annulateur pour A^2 induit un polynôme annulateur pour A. Dans le cas où $\ker A = \ker A^2$ et A non inversible, appliquer le lemme des noyaux à $(X^2 - \lambda)$ où λ est une valeur propre non nulle de A^2.
2. Tester sur une matrice de rotation convenable.

Indication pour l'exercice 3.1.24 :

1. Développer $< u(x+y), x+y >$.
2. Revoir la définition de l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.
3. Que dire de ${}^t uu$?
4. $u(z)$ peut-il être colinéaire à z ?
5. Si $z \in (\ker u)^\perp$, la famille $(z, u(z))$ est-elle orthogonale ? L'orthonormalisée et écrire la matrice de la restriction de u dans cette base orthonormale $\mathcal{B}_1$. Justifier que cette restriction est un endomorphisme antisymétrique. En déduire que la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a_i \\ a_i & 0 \end{pmatrix}$. Intérer avec la restriction de l'endomorphisme à l'orthogonal dans $(\ker u)^\perp$ de $\operatorname{Vect} \mathcal{B}_1$.
6. Appliquer le théorème précédent dans le cas antisymétrique. Dans le cas général, montrer que la formule reste vraie mais avec une matrice de changement de base quelconque (et non plus orthonormale). Pour cela considérer un vecteur non nul e_1, puis montrer que (e_1, Ae_1) est une famille libre et stable par A. Considérer ensuite un vecteur e_2 n'appartenant pas à $\operatorname{Vect}(e_1, Ae_1)$, montrer que (e_2, Ae_2) est un plan stable par A et que la famille $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2))$ est libre (il y a déjà trois vecteurs libres, donc il suffit de montrer que ...et on se raménera à résoudre un système 2×2 à valeurs vectorielles). Procéder ensuite par itération.

Indication pour l'exercice 3.1.25 :

1. Vérifier que $x \mapsto (Ax, y)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et, en utilisr une base orthonormale pour ce produit scalaire.
2.
   (a) Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $A = {}^t PP$ et réduire la matrice ${}^t P^{-1} B P^{-1}$. Traiter le cas général par densité.
   (b) idem et la fonction ln est concave.

6.2 Analyse

Indication pour l'exercice 3.2.1 : Développement en série de Fourier de f et utiliser l'unicité du DSF (on fera attention à l'étude $\sum_n = \sum_n + \sum_{\text{pair}}$ en distinguant les termes de même nature)

Indication pour l'exercice 3.2.2 :

1. Pour l'étude de la convergence simple, on remarque qu'il suffit d'étudier la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ et l'on remercie l'artillerie fournie en sup
2. Jusitifier que l'on peut supposer travailler sur un segment $[a, b]$ (qui n'est pas K) stable par f sur lequel la fonction f a une bonne monotonie. Montrer que f_n possède une monotonie et en déduire un encadrement de $f_n(x)$ par $f_n(a)$ et $f_n(b)$ et en déduire le mode de convergence
3. Montrer que tout nombre réel est la limite d'une suite de dyadiques (i.e. de nombres de la forme $A + \dfrac{B}{2^k}$ où A, B sont des entiers relatif et k un entier naturel). Soit $\dfrac{1}{2^k} X^t$ un monome : vérifier que la suite $(f_n^s(x) x^t)$ converge uniformément vers $\dfrac{1}{2^k} X^t$ pourun choix convenable de s. En déduire le résultat attendu pour tous les monômes et conclure.

Indication pour l'exercice 3.2.3 :

1. Si on faisait un petit tour les espaces euclidiens et les problèmes de moindres carrés
2. Expliciter $F(k)$ et l'exprimer à l'aide d'un produit scalaire puis le miracle s'accomplit
3. Idem et se rappeler que $(x, x-p(x)) = \|..\|^2$
4. La fraction rationnelle est de degré 1 donc de la forme $F(X) = \dfrac{P(X)}{.....}$ avec P de degré $\leqslant$ ....
   La question 2 nous donne la forme de P, la question 3 nous donne l'expression exacte de P.
   Décomposer explicitement la fraction $\dfrac{P(X)}{.....}$ (on appelle à l'aide le cours de sup sur la décomposition en éléments simples) et pour finir on a unicité de la décomposition en éléments simples

Indication pour l'exercice 3.2.4 :

1. Calculer ses valeurs propres
   On veut une condition topologique (ouvert, fermé, etc)
2. $B(0,r) \subset K \subset E_Q$ donc $Q(r,0) \leqslant 1$ et $Q(0,r) \leqslant 1$ ce qui nous fournit inégalité très importante et on utiliser le 1 (en n'oubliant pas la caractérisation des compacts en dimension finie)
3. On a une fonction .....sur un .....donc .....
   Montrer que l'aire de l'ellipse E_Q est $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\det M_Q}}$ (on montre que $M_Q = PD^2P^{-1}$ où P est orthogonale et pose le changement de variable $Y = DP^{-1}X$).
   Montrer que $Q \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\det M_Q}}$ est une fonction strictement convexe et une fonction strictement convexe sur un convexe possède au plus un minimum (faire un dessin ou mieux le prouver)

Indication pour l'exercice 3.2.5 :

1. Pour le produit scalaire $(a,b)_{H_s} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{2s} a_n b_n$ est une bonne idée (il faut justifier que la série converge et on se rappelle que $|xy| \leqslant$ ....). Pour la complétude, si $(a^{(k)})_k$ est une suite de H_s, on montrera que $(a_n^{(k)})_k$ est une suite de Cauchy. Si α_n est la limite, on justifiera que $\forall N \geqslant 0, \quad \sum_{n=1}^{N} n^{2s}(\alpha_n - a_n^{(k)})^2 \leqslant \varepsilon^2$ pour k assez grand et donc la suite $\alpha - a^{(k)} \in H_s$ pour k assez grand (à justifier). L'espace H_s est un espace vectoriel donc $\alpha \in H_s$ et en revenant à l'inégalité précédente, on en déduit que la suite $(a^{(k)})_k$ converge vers α
2. Appliquer Cauchy-Schwartz à $\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N} (\dfrac{a_n}{n})(nb_n)$ ce qui donnera la continuité et une majoration de la norme subordonnée. Ensuite, en remarquant que la suite $(\dfrac{b_n}{n})_n \in H_1$ on calculera $\Lambda_b((\dfrac{b_n}{n})_n)$
3. Si $(a^{(k)})$ est une suite de H_1 contenue dans $B_{H_0}(O,1)$, on justifiera que $\forall n \geqslant 1$, la suite $(a_n^{(k)})_k$ est bornée. On extrait de la suite
   - $(a_1^{(k)})_n$ une suite $(a_1^{\varphi_1(k)})_k$ qui converge vers l_1 tel que $\forall k \geqslant 0, \quad \left|a_1^{\varphi_1(k)} - l_1\right| \leqslant \dfrac{1}{2^k}$.
   - $(a_2^{\varphi_1(k)})_k$ une suite $(a_2^{\varphi_1\circ\varphi_2(k)})_k$ qui converge vers l_2 tel que $\forall k \geqslant 0, \quad \left|a_2^{\varphi_1\circ\varphi_2(k)} - l_2\right| \leqslant \dfrac{1}{2\times 2^k}$.
   - $(a_3^{\varphi_1\circ\varphi_2(k)})_k$ une suite $(a_3^{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3(k)})_k$ qui converge vers l_3 tel que $\forall k \geqslant 0, \quad \left|a_3^{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3(k)} - l_3\right| \leqslant \dfrac{1}{3\times 2^k}$.
   - .....
   - $(a_j^{\varphi_1\circ\varphi_2\circ..\varphi_{(j-1)}(k)})_k$ une suite $(a_j^{\varphi_1\circ\varphi_2\circ..\varphi_j(k)})_k$ qui converge vers l_j tel que $\forall k \geqslant 0, \quad \left|a_j^{\varphi_1\circ\varphi_2\circ..\varphi_j(k)} - l_j\right| \leqslant \dfrac{1}{j\times 2^k}$.

– .....

puis on montre que l'application $n \mapsto \phi(n) = (\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ .. \varphi_n)(n)$ définie une application strictement croissante de $\mathbb{N}$. On vérifie que, quel que soit $k \geqslant 1$, la suite $(a_j^{\phi(k)})_{k \geqslant j}$ est extraite de $(a_n^{(k)})$ et on justifie que la suite $(l_n)_n$ est une valeur d'adhérence de $(a^{(k)})_k$ (on travaillera sur les sommes finies).

Indication pour l'exercice 3.2.6 :

1. Vérifier que le premier facteur du produit est le cos d'un angle remarquable. Montrer qu'il en est de même du second à l'aide de la formule de duplication du sinus puis, pour la limite, se rappeler de l'équivalent du sinus en 0.
2. Montrer que l'on peut déterminer une primitive de $\theta \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n}$ (par ex : $a \mapsto \int_0^a \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n} \right) d\theta$) puis utiliser la formule $\cos a \cos \frac{a}{2} .. \cos \frac{\alpha}{2^n} = \cdots$ obtenu à la question précédente.

Indication pour l'exercice 3.2.7 :

1. Soit $g \in G$ quelconque.
   Montrer que toute valeur de g est de module 1 (considérer λ^k pour $k \in \mathbb{Z}$ et utiliser que G est borné donc $(\lambda^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ aussi).

   Jusifier que pour toute valeur propre λ et pour tout entier k, on a $|\lambda - 1| \leqslant \alpha$. Ensuite s'aider d'un dessin placer les λ^k en remarquant que $\left|\lambda^k - 1\right| \leqslant \alpha$ quelque soit k. Pour donner un résultat rigoureux, distinguer le cas où l'angle n'est pas un multiple rationnel de 2π (calculer alors précisément $\left|\lambda^k - 1\right|$ et revoir l'étude de la suite $(\sin na)_n$ lorsque $\frac{a}{\pi}$ est irrationnel). Dans le cas où l'angle est un multiple rationnel de 2π, on a de belles racines de l'unité.
2. Montrer que pour tout élément g de G, $g - I_n$ est une matrice nilpotente. Calculer g^k et utiliser que $g^k - I_n$ est bornée pour montrer que $g = I_n$
3. Montrer que $\alpha < \sqrt{3}$ est valable (revoir la preuve et constater, si l'on a bien fait son boulot) qu'il n'y a que le cas où $\varphi = \frac{2\pi p}{q}$ avec q impair qui pose vraiment problème et minorer finement $\left|\lambda^k - 1\right|$ pour k bien choisit à l'aide du dessin.

Indication pour l'exercice 3.2.8 :

1. Monotonie de la suite, puis utiliser l'inégalité $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}(1 + r^n)$ et démontrer que le produit $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + r^n)$ est convergent
2. Etudier la série $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ et revoir les théorèmes de sommation des séries convergentes ou divergentes.

Indication pour l'exercice 3.2.9 : Dans un voisinage de 1, $y > 0$. Commencer par se ramener à la résolution de

$$(E') : y(1) = 1, \quad xy' + y = 2(x^2 - 4)$$

et expliciter la solution de cette dernière équation différentielle. Déterminer ensuite l'intervalle maximal $I_0 =]a, b[$, contenant 1, sur lequel la solution y_0 de (E') est strictement positive. En déduire l'intervalle minimal $]a, b[$ sur lequel est définie la solution maximale $y_{\max}$. Supposer que l'on puisse prolonger la solution à droite de b. Déterminer $y_{\max}(b)$ et donner les variations de $y_{\max}$ à droite de b (dans un certain voisinage). En déduire l'équation différentielle satisfaite par $y_{\max}$ à droite de b. Expliciter $y_{\max}$ sur cet intervalle. Vérifier le recollement au point b. Pour finir, supposer qu'une solution à l'équation initiale existe dans un voisinage de 0 et obtenir une contradiction.

Indication pour l'exercice 3.2.10 :

1. En dimension toutes les normes sont ...
2. Considérer une famille de n vecteurs orthonormés et les combinaisons linéaires quelconques de ces vecteurs pour montrer que $n \leqslant C^2$.

Indication pour l'exercice 3.2.11 :

1. Garçon ! un graphique, un théorème de Dirichlet, un argument de parité, les formules trigo $\sin a \cos b = ...$ et $\cos n\pi = ...$ pour la question 1.
2. Calculer les coefficients de Fourier de $\Phi(f)$ en invoquant Fubini. Pour $p = 0$ par calcul direct. Après permutation des intégrales, pour $p \geqslant 1$, utiliser la formule de développement en série de Fourier du 1 pour calculer l'intégrale en dx. Justifier toutes les permutations d'intégrales (attention la primitive de $\cos(ax+b)$ ou $\sin(ax+b)$ a deux expressions selon les valeurs de a). Au final, vous devez aboutir à

$$a_p(\Phi(f)) = -\frac{2}{\pi(4p^2-1)}a_p(f) \text{ et } b_p(\Phi(f)) = -\frac{2}{\pi(4p^2-1)}b_p(f).$$

   En déduire une inclusion pour $\mathrm{Sp}(\Phi)$ puis vérifier que chaque valeur propre éventuelle est effectivement une valeur propre dont la multiplicité géométrique est, en général, 2.

Indication pour l'exercice 3.2.12 :

1. Ecrire la forme de $f^{(k)}$ et revoir les limites $x^\alpha e^x$ en l'infini. En déduire celles de $x^\alpha e^{-x^2}$.
2. Justifier que $f(x) \leqslant \dfrac{C}{1+x^2}$ et $f'(x) \leqslant \dfrac{D}{1+x^2}$ pour C et D convenable. Pour le caractère C^1, justifier que $\dfrac{1}{1+(x+n)^2} \leqslant \dfrac{1}{1-2|n|a+n^2}$ si $x \in [-a,a]$ et $|n| > a$. Changement de variable $j = n+1$ pour la périodicité.
3. Pour le coefficient complexe, justifier la permutation série intégrale et appliquer la relation de Chasles généralisée (que l'on justifiera !)
4. Le changement de variable linéaire est notre ami.

Indication pour l'exercice 3.2.13 :

1. Le théorème de Dirichlet, un problème de continuité en π, et calculer les coefficients de Fourier complexes (pour profiter de la formule $e^a e^b = \cdots$)
2. Utiliser la formule précédente en $a = \pi$ puis découper la somme selon $n < 0$, $n = 0$ et $n > 0$ et effectuer un changement de variable sur la première somme pour obtenir les même ensemble de sommation que la dernière somme.
3. Procéder par analyse formelle (tout est permis), en passant au ln et en dérivant. Utiliser la formule de la question 2 pour obtenir l'équation différentielle satisfaite par u_n. Pour que le produit soit convergent, il faut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(a) = 1$. En déduire un équivalent de la constante d'intégration puis choisir comme constante d'intégration l'équivalent. Pour la synthèse, montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln u_n$ est C^1 sur $[0,1]$, calculer sa dérivée, en déduire une primitive. Pour évaluer la constante d'intégration, faire tendre a vers 0.

7 Corrections PSI*

7.1 Algèbre-géométrie

Correction de l'exercice 1.1.1 : Le polynôme caractéristique de A est $(X-4)(X-2)^2$. Les espaces propres sont fournis par

$$E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\-1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\right) \qquad E_4 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

La matrice A est donc diagonalisable puisque la multiplicité de toute valeur propre de A est égale à la dimension de l'espace propre correspondant. Ainsi nous avons la formule : $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ce qui implique que $A^{2n} = PD^{2n}P^{-1}$ donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} PA^{2n}P^{-1} = P(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} D^{2n})P^{-1} = P \begin{pmatrix} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(2n)!} \end{pmatrix} P^{-1}$$

En se rappelant du développement en série entière de $x \mapsto \operatorname{ch} x$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!} = P \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} 2 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} 4 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2 + \frac{1}{2}\operatorname{ch} 4 & \frac{3}{2}\operatorname{ch} 2 - \frac{3}{2}\operatorname{ch} 4 & -\operatorname{ch} 2 + \operatorname{ch} 4 \\ \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2 - \frac{1}{2}\operatorname{ch} 4 & -\frac{1}{2}\operatorname{ch} 2 + \frac{3}{2}\operatorname{ch} 4 & \operatorname{ch} 2 - \operatorname{ch} 4 \\ \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2 - \frac{1}{2}\operatorname{ch} 4 & -\frac{3}{2}\operatorname{ch} 2 + \frac{3}{2}\operatorname{ch} 4 & 2\operatorname{ch} 2 - \operatorname{ch} 4 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice : 1.1.2

1. On place le point d'affixe z_n, à l'aide d'un compas, on trace l'intersection w_n du cercle de centre l'origine et passant par le point z_n avec l'axe des abscisses positives. Le mileu du segment $[z_n, w_n]$ est le point z_{n+1}.
2. $z_{n+1} = \rho_{n+1}e^{i\phi_{n+1}} = \frac{1}{2}(\rho_n e^{i\phi_n} + \rho_n) = \rho_n . \frac{e^{i\phi_n}+1}{2} = \rho_n e^{i\phi_n/2} \cos\frac{\phi_n}{2}$. Ainsi, $\rho_{n+1} = \rho_n \cos\frac{\phi_n}{2}$ et $\phi_{n+1} = \frac{\phi_n}{2} \bmod 2\pi$. Une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \phi_n = \frac{\phi_0}{2^n} \bmod 2\pi \text{ et } \rho_n = \rho_0 \prod_{i=1}^{n} \cos\frac{\phi_0}{2^i}$$

   En particulier, $\phi_n \to 0$ et $\rho_n = \rho_0 \dfrac{\sin\phi_0}{2^n \sin\frac{\phi_0}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \rho_0 \dfrac{\sin\phi_0}{\phi_0}$. La suite (z_n) converge vers le point de l'axe réel positif $z_\infty = \rho_0 \dfrac{\sin\phi_0}{\phi_0}$.
3. Tous les points de la suite sont de module moindre que ρ_0 et des angles variables. En particulier, il existe pour tout entier n, un angle φ_n tel que $\rho_n = \rho_0 \sin^2\varphi_n = \rho_0(\dfrac{1-\cos 2\varphi_n}{2})$. Il suffit alors de considérer la courbe polaire d'équation $r = \rho_0 \dfrac{1-\cos\theta}{2}$ qui est une belle cardioïde.

Correction de l'exercice 1.1.3 :

1. Son polynôme caractéristique est $(X+1)^3$ donc son unique valeur propre est -1. Si A est diagonalisable alors il existe une matrice P inversible telle que

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = P(-I_3)P^{-1} = -PP^{-1} = -I_3$$

   or $A \neq -I_3$ donc A n'est pas diagonalisable

2. Fixons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et considérons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A. Dire que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ est équivalent à rechercher une base (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$u(e_1)=-e_1+e_2 \quad u(e_2)=-e_2 \quad e_3=-e_3.$$

Autrement dit, nous devons rechercher deux vecteurs propres (e_2,e_3) associés à la valeur propre -1 linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ tels que le vecteur e_2 appartienne à l'image de $u+Id$ (car $u(e_1)+e_1=e_2$).
La matrice de $u+Id$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix}7&-6&5\\14&-12&10\\7&-6&5\end{pmatrix}$$

et il est immédiat que tous les vecteurs colonnes sont proportionnels au vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, ce qui implique que

$$\text{Im}(u+Id)=\text{Vect}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

On est alors obligé de poser $e_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et on vérifie que e_2 est bien un vecteur propre de u.
D'autre part, un calcul direct montre que l'espace propre E_{-1} est de dimension 2 et

$$E_{-1}=\text{Vect}(\begin{pmatrix}0\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix})$$

ce qui nous amène à choisir $e_3=\begin{pmatrix}0\\5\\6\end{pmatrix}$.

Il nous reste à déterminer le vecteur $e_1=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. L'équation

$$(A+I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

possède comme solution le vecteur $e_1=\begin{pmatrix}0\\-\dfrac{1}{6}\\0\end{pmatrix}$.

Les vecteurs (e_1,e_2,e_3) sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ (car e_2 et e_3 forment une base de E_{-1} et $e_1\notin E_{-1}$) donc ils forment une base de $\mathbb{R}^3$. Si on pose $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\dfrac{1}{6}&2&5\\0&1&6\end{pmatrix}$, on a

$$A=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}P^{-1}$$

3. Considérons les matrices $A'=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.
Soit M une matrice qui commute avec A alors
$$MA=AM\Leftrightarrow MPA'P^{-1}=PA'P^{-1}M$$
en multipliant de part et d'autre de la dernière égalité par P^{-1} à gauche et par P à droite, on obtient
$$MA=AM\Leftrightarrow (P^{-1}MP)A'=A'(P^{-1}MP)$$
Posons $M'=(P^{-1}MP)$ alors l'équation $MA=AM$ est équivalente à l'équation $M'A'=A'M'$. En remarquant que $A'=-I_3+N$, on obtient
$$M'A'=A'M'\Leftrightarrow M'(-I_3+N)=(-I_3+N)M'\Leftrightarrow M'N=NM'$$
Pour résoudre cette dernière équation, nous n'avons pas besoin d'invoquer les grandes théories. Nous nous la jouons sauvage. On écrit $M'=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix}$ et on réinjecte dans l'équation ce qui nous donne
$$\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&0&0\\e&0&0\\h&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow b=0,\quad a=e,\quad c=0,\quad h=0$$
La matrice M' est de la forme $M'=\begin{pmatrix}a&0&0\\d&a&f\\g&0&i\end{pmatrix}$ donc
$$M=PM'P^{-1}$$
Puisque que nous avons travaillé par équivalence, l'ensemble des matrices qui commutent avec A est l'ensemble
$$\left\{\begin{pmatrix}a+7d-\frac{1}{6}f&-6d&5d+\frac{1}{6}f\\\frac{5}{6}a+14d-\frac{1}{3}f+35g-\frac{5}{6}i&a-12d-30g&-\frac{5}{6}a+10d+\frac{1}{3}f+25g+\frac{5}{6}i\\a+7d-\frac{1}{6}f+42g-i&-6d-36g&5d+\frac{1}{6}f+30g+i\end{pmatrix},\quad (a,d,f,g,i)\in\mathbb{R}^5\right\}$$

Correction de l'exercice 1.1.4 :

1. La recherche du vecteur V_1 est le calcul de l'espace propre associé à la valeur propre -1 ce qui donne $V_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.
La recherche de $V_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ se fait également par un calcul direct en résolvant le système
$$AV_2=-V_2+V_1\Leftrightarrow\begin{cases}ay+az=0\\-x=-1\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-z\end{cases}$$
dont une solution est $V_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. La recherche de V_3 est analogue et on aboutit au système
$$\begin{cases}ay+az=1\\-x=0\\x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=\frac{1}{a}-z\end{cases}$$

dont une solution est $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{a} \\ 0 \end{pmatrix}$.

La famille (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ car les V_2 et V_3 sont clairement libres et $V_1 \notin \text{Vect}(V_2, V_3)$. Si u désigne l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A alors la matrice de u dans la base (V_3, V_2, V_1) est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Ainsi, si on pose $P = \begin{pmatrix} V_3 & V_2 & V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{a} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (qui est inversible et dont l'inverse est $\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$), on a

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

2. Posons $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est nilpotente d'ordre 2 (i.e. $N^2 = 0$).
On commence par l'égalité classsique $A^n = P(A')^n P^{-1}$
La matrice $-I_3$ commute évidemment avec N donc la formule du binôme nous donne

$$(-I_3 + N)^n = (N - I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k (-I_3)^{n-k} = (-1)^n I_3 + (-1)^{n-1} nN + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

Explicitions maintenant notre matrice $(A')^n$

$$(A')^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ (-1)^{n-1} n & (-1)^n & 0 \\ (-1)^{n-2} \dfrac{n(n-1)}{2} & (-1)^{n-1} n & (-1)^n \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} & -n & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -an & -an \\ n & 1 - \dfrac{a}{2} n(n-1) & -\dfrac{a}{2} n(n-1) \\ -n & \dfrac{1}{2} an(n-1) & \dfrac{1}{2} an(n-1) + 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{aligned}
\exp xA &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} P(A')^n P^{-1} = P \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} (A')^n \right) P^{-1} \\
&= P \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \left[(-1)^n I_3 + (-1)^{n-1} nN + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2 \right] \right) P^{-1} \\
&= P \left(\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} (-1)^n \right] I_3 + \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} (-1)^{n-1} n \right] N + \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \right] N^2 \right) P^{-1} \\
&= P \left(\exp(-x) I_3 + \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} (-1)^{n-1} n \right] N + \left[\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \right] N^2 \right) P^{-1}
\end{aligned}$$

(*les premiers termes des deux dernières sommes s'annulant*)

$$\exp xA = P \left(\exp(-x) I_3 + \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} (-1)^{n-1} \right] N + \left[\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} (-1)^{n-2} \right] N^2 \right) P^{-1}$$

(*on effectue les changements de variables respectifs* $n' = n-1$ et $n" = n-2$)

$$\begin{aligned}\exp xA &= P\left(\exp(-x)I_3 + \left[x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}(-1)^n\right]N + \left[\frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}(-1)^n\right]N^2\right)P^{-1}\\ &= P\left(\exp(-x)I_3 + x\exp(-x)N + \frac{x^2}{2}\exp(-x)N^2\right)P^{-1}\\ &= \exp(-x)P\left(I_3 + xN + \frac{x^2}{2}N^2\right)P^{-1}\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\exp xA = \exp(-x)\begin{pmatrix}1 & ax & ax\\ -x & 1-\dfrac{ax^2}{2} & -\dfrac{ax^2}{2}\\ x & \dfrac{ax^2}{2} & \dfrac{ax^2}{2}+1\end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 1.1.5 :

1.
$$P(a_i) = \begin{vmatrix} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_i & \cdots & a_n\\ a_1 & a_i & a_3 & \cdots & a_i & \cdots & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_i & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_i & \cdots & a_i\end{vmatrix}_n = a_i\begin{vmatrix} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & 1 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_i & a_3 & \cdots & 1 & \cdots & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_i & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1 & \cdots & a_i\end{vmatrix}_n$$

On effectue les opérations $L_k \leftarrow L_k - L_1$ pour $k \in [\![2,n]\!]$

$$P(a_i) = a_i\begin{vmatrix} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & 1 & \cdots & a_n\\ a_1-a_i & a_i-a_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ a_1-a_i & 0 & a_i-a_3 & 0 & \vdots & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ a_1-a_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_i-a_n\end{vmatrix}_n$$

On développe par rapport à la $i^{ième}$ colonne dernière ligne

$$P(a_i) = (-1)^{i+1}a_i\begin{vmatrix} a_1-a_i & a_i-a_2 & 0 & \cdots & & & \cdots & & 0\\ a_1-a_i & 0 & a_i-a_3 & \ddots & & & \cdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \cdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_i-a_{i-1} & & \ddots & & \vdots\\ & & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & & a_i-a_{i+1} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & 0\\ a_1-a_i & 0 & 0 & \cdots & & & & 0 & a_i-a_n\end{vmatrix}$$

puis par rapport à la dernière colonne

$$P(a_i)=(-1)^{i+1}a_i(a_i-a_n)\begin{vmatrix} a_1-a_i & a_i-a_2 & 0 & \cdots & & & \cdots & & 0\\ a_1-a_i & 0 & a_i-a_3 & \ddots & & & \cdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \cdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_i-a_{i-1} & & \ddots & & \vdots\\ & & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & & a_i-a_{i+1} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & 0\\ a_1-a_i & 0 & 0 & \cdots & & & & 0 & a_i-a_{n-1}\end{vmatrix}$$

en itérant, on obtient

$$P(a_i)=(-1)^{i+1}a_i(a_i-a_n)\cdots(a_i-a_{i+1})\begin{vmatrix} a_1-a_i & a_i-a_2 & 0 & \cdots & \\ a_1-a_i & 0 & a_i-a_3 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_i-a_{i-1}\\ a_1-a_i & & & & 0\end{vmatrix}$$

On échange alors la première colonne avec la $(i-1)^{ième}$

$$\begin{aligned} P(a_i) &= (-1)^{i+1}a_i(a_i-a_n)\cdots(a_i-a_{i+1})\begin{vmatrix} a_i-a_2 & 0 & \cdots & & a_1-a_i\\ 0 & a_i-a_3 & \ddots & & a_1-a_i\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ \vdots & \vdots & 0 & a_i-a_{i-1} & \vdots\\ & & & 0 & a_1-a_i\end{vmatrix}\\ &= (-1)^{i+1}a_i(a_i-a_n)\cdots(a_i-a_{i+1})\underbrace{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})}_{(i-1)\text{ facteurs}}\\ &= (-1)^{i+1}(-1)^{i-1}a_i(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)=a_i\prod_{k\neq i}(a_i-a_k)\end{aligned}$$

2. $\dfrac{P(X)}{(X-a_1)..(X-a_n)}$ est une fraction rationnelle de degré 0 car P étant un polynôme caractéristique, il est de degré n et son coefficient dominant est 1. La décomposition en éléments simple montre que

$$\frac{P(X)}{(X-a_1)..(X-a_n)}=E+\sum_{k=1}^{n}\frac{A_i}{X-a_i}$$

pour E et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des réels. La détermination de E se fait par passant à la limite lorsque $X\to+\infty$, on obtient $E=1$. On suppose désormais les a_i sont deux à deux distincts alors $A_i=\dfrac{P(a_i)}{\prod\limits_{k\neq i}(a_i-a_k)}=a_i$ donc

$$\frac{P(X)}{(X-a_1)..(X-a_n)}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{X-a_k}.$$

On se rappelle ses classiques de sup. Si $Q=(X-a_1)..(X-a_n)$ est à racines simples alors

$$\frac{R}{Q}=E+\sum_{k=1}^{n}\frac{R(a_k)}{Q'(a_k)(X-a_k)}.$$

En médiatant la méthode d'obtiention de cette formule, on se dit que l'étude $\dfrac{XQ'}{Q}$ est très intéressante. En effet, elle est de degré 0 et son facteur entier E est égal à $n = \deg P$ et

$$\frac{XQ'}{Q} = n + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X - a_k}.$$

Le bonheur se lit sur votre visage, car

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X - a_k} = \frac{XQ'}{Q} - n = \frac{XQ' - nQ}{Q}$$

donc

$$\frac{P}{Q} = \frac{P(X)}{(X-a_1)..(X-a_n)} = 1 + \frac{XQ' - nQ}{Q} = \frac{XQ' - (n-1)Q}{Q}$$

$$P = XQ' - (n-1)Q \text{ avec } Q = (X-a_1)..(X-a_n).$$

Les applications $(a_1, .., a_n) \mapsto P = \det \begin{pmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_3 & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{pmatrix}$ et $(a_1, ..., a_n) \mapsto X((X - a_1)..(X - a_n))' - (n-1)(X - a_1)..(X - a_n)$ sont continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ et coïncident sur l'ouvert $U = \{(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ tels que $\forall i \neq j \in [\![1, n]\!], \quad x_i \neq x_j\}$ donc elles sont égales sur $\mathbb{R}^n$.

7.2 Analyse

Correction de l'exercice 1.2.1 :

1. Soit $b_n = a_{2n}$ alors $b_{n+1} - b_n = -(2n+2)^\alpha + (2n+1)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} -\alpha(2n)^{\alpha-1} = -\alpha 2^{\alpha-1} n^{\alpha-1}$ (par application du TAF à la fonction $x \mapsto x^\alpha$ entre les points $2n+2$ et $2n+1$ ou par DAS). Puisque $\alpha > 0$, la série de Rieman $n^{\alpha-1}$ est divergente et l'utilisation des sommes partielles de séries divergentes pour permet d'écrire

$$b_n = b_n - b_0 = \sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} -\alpha 2^{\alpha-1} n^{\alpha-1} = -\alpha 2^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n} n^{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -2^{\alpha-1} n^\alpha$$

(le dernier équivalent s'obtient soit par comparaison série-intégrale, soit par utilisation des sommes de Riemann pour la fonction $x \mapsto x^{\alpha-1}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Ainsi, on a obtenu que

$$b_n = a_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -2^{\alpha-1} n^\alpha = -\frac{(2n)^\alpha}{2}. \tag{1}$$

De même, posons $c_n = a_{2n+1}$ alors $c_{n+1} - c_n = -(2n+2)^\alpha + (2n+3)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha(2n)^{\alpha-1}$. Par le même type de raisonnement que précédemment, on aboutit à

$$a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{\alpha-1} n^\alpha = \frac{(2n)^\alpha}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n+1)^\alpha}{2}. \tag{2}$$

Des deux équivalents (1) et (2), on en déduit que les deux suites extraites pair impair de la suite $\dfrac{a_n}{(-1)^{n-1} n^\alpha}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$ donc la suite $\dfrac{a_n}{(-1)^{n-1} n^\alpha}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$ c'est-à-dire

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n-1} n^\alpha}{2}$$

2. Si $\alpha > 1$, alors la série de terme général $\left|\frac{1}{a_n}\right|$ est positive, équivalente à la série de Riemann $\frac{2}{n^\alpha}$ donc elle est convergente et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{a_n}$ est convergente.

Si $0<\alpha<1$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{a_n}$ n'est pas absolument convergente. L'équivalent $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n-1}n^\alpha}{2}$ montre que pour n assez grand le signe de a_n est celui de $(-1)^{n-1}$ c'est-à-dire que l'on a affaire à une série alternée. Etudions la montonie de la suite $|a_n| = (-1)^{n-1}a_n$. Il a été vu dans la première question que la suite (a_{2n}) est décroissante et la suite (a_{2n+1}) est croissante. Puisque, pour n assez grand, la suite (a_{2n}) est négative et la suite $(a_{2n+1)}$ positive, on en déduit que la suite $(|a_{2n}|)$ est croissante et la suite $(|a_{2n+1}|)$ est croissante (il suffit de faire un dessin). Il ne reste plus qu'à comparer $|a_{2n}|$ et $|a_{2n+1}|$ c'est-à-dire trouver le signe de $|a_{2n+1}|-|a_{2n}| = a_{2n+1}+a_{2n}$. Nous allons commencer par réécrire ces sommes en les découpant selon les nombres pairs ou impairs, c'està-dire si l'on écrit que

$$a_{2n+1} = -\sum_{k=0}^{n}(2k)^\alpha + \sum_{k=0}^{n}(2k+1)^\alpha \text{ et } a_{2n} = -\sum_{k=0}^{n}(2k)^\alpha + \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^\alpha$$

$$\text{alors } a_{2n+1}+a_{2n} = -(2n+1)^\alpha + 2\sum_{k=0}^{n}((2k+1)^\alpha - (2k)^\alpha)$$

Puisque $\alpha\in]0,1[$, la fonction $x\mapsto x^\alpha$ est concave donc

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad (\frac{k+(k+1)}{2})^\alpha \geqslant \frac{1}{2}k^\alpha + \frac{1}{2}(k+1)^\alpha \Leftrightarrow 2(2k+1)^\alpha \geqslant (2k)^\alpha + (2k+2)^\alpha.$$

Nous sommons cette inégalité de 0 à n, ce qui nous donne

$$2\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^\alpha \geqslant \sum_{k=0}^{n}(2k)^\alpha + \sum_{k=0}^{n}(2k+2)^\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^\alpha \geqslant \sum_{k=0}^{n}(2k)^\alpha + \sum_{k=1}^{n+1}(2k)^\alpha = 2\sum_{k=0}^{n}(2k)^\alpha + (2n+2)^\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2(\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^\alpha - \sum_{k=0}^{n}(2k)^\alpha) \geqslant (2n+2)^\alpha \Leftrightarrow a_{2n+1}+a_{2n} \geqslant (2n+2)^\alpha - (2n+1)^\alpha > 0.$$

On en déduit immédiatement que $|a_{2n+1}| \geqslant |a_{2n}|$. En se rappelant que les suites $|a_{2n}|$ et $|a_{2n+1}|$ sont croissantes, la suite (a_{2n}) négative et la suite (a_{2n+1}) positive et avec un petit dessin, on se convainc que la suite $(|a_n|)$ est croissante. Puisqu'elle tend vers $+\infty$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{a_n}$ satisfait au théorème spécial des séries alternées donc elle converge.

Correction de l'exercice 1.2.2 :

1. l'application $(x,t)\mapsto \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et l'on a
   - $\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad \left|\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}.\frac{1}{1+t^2}$ avec $t\mapsto \frac{\pi}{2}.\frac{1}{1+t^2}$ qui indépendante de x et intégrable sur $\mathbb{R}$
   - $\forall a>0,\quad \forall x\in\mathbb{R}\backslash[-a,a],\forall t\in\mathbb{R},\quad \left|\frac{d}{x}(\frac{\arctan(tx)}{1+t^2})\right| = \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} \leqslant \frac{t}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}$ avec $t\mapsto \frac{t}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}$ qui indépendante de x et intégrable sur $\mathbb{R}$

   On peut donc appliquer les théorèmes de Lebesgue pour les intégrales à paramètre et affirmer que f est continue sur $\mathbb{R}$ (cela découle de la première majoration) et que f est C^1 sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$

quel que soit $a > 0$ (cela découle des deux inégalités) donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ avec

$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}dt.$$

de dérivation sous le signe $\int$.

2. On effectue le changement de variable $u = t^2$ donc $f'(x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2u)(1+u)}du$. On utilise la décomposition en éléments simples pour obtenir l'égalité :

$$\frac{1}{(1+x^2u)(1+u)} = \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{(1+u)} - \frac{x^2}{(1+x^2u)}\right]$$

ce qui nous amène au calcul de l'intégrale souhaitée :

$$\begin{aligned} 2\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}dt &= \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{1}{(1+x^2u)(1+u)}du = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{1-x^2}[\ln(1+A) - \ln(1+x^2A)] \\ &= \frac{1}{1-x^2}\lim_{A\to+\infty}\ln(\frac{1+A}{1+x^2A}) = -\frac{\ln x^2}{1-x^2} = -2\frac{\ln|x|}{1-x^2} \end{aligned}$$

donc $f'(x) = -\dfrac{\ln|x|}{1-x^2} = \dfrac{\ln|x|}{x^2-1}$

3. Par conséquent, il existe une constante A tel que $f(x) = A + \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}dt$ (cette intégrale est convergente). Puisque $f(0) = 0$ et que f est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $f(x) = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}dt$. (il n'existe pas de primitives de $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2-1}$ s'exprimant à l'aide de fonctions usuelles)

Correction de l'exercice 1.2.3 : Il est immédiat que l'équation mentionnée n'admet aucune solution si $g(0) \neq 0$ ($0 = f(\frac{0}{3}) - f(0) = g(0)$). Supposons maintenant que $g(0) = 0$.
Supposons qu'une telle fonction f continue existe. On remarque pour commencer que $f(\frac{x}{3^{n+1}}) - f(\frac{x}{3^n}) = g(\frac{x}{3^n})$ et que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} g(\frac{x}{3^k}) = \sum_{k=0}^{n}(f(\frac{x}{3^{k+1}}) - f(\frac{x}{3^k})) = f(\frac{x}{3^{n+1}}) - f(x).$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{x}{3^{n+1}} = 0$ et que f est continue en 0, on en déduit que la série de terme général $g(\frac{x}{3^n})$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} g(\frac{x}{3^n}) = f(0) - f(x) \Leftrightarrow f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} g(\frac{x}{3^n}).$$

Nous venons de prouver que si une telle fonction f existe alors elle est nécessairement unique (elle explicité uniquement par g). Par contre, on n'est pas assuré de son existence car nous ne savons pas si la série $\sum_{n\geqslant 0} g(\frac{x}{3^n})$ est convergente (nous avons montrer la convergence en utilisant la continuité de l'éventuelle solution).
Si g est C^1 à dérivée bornée et si M désigne le réel $\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|$, l'inégalité des acrroissments finis (appliquée au point x et 0) montre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|g(\frac{x}{3^n})\right| \leqslant M\frac{|x|}{3^n}. \tag{3}$$

En particulier, la série $\sum_{n\geqslant 0} g(\frac{x}{3^n})$ est absolument convergente donc convergente. Posons h la fonction définie par $\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=-\sum_{n=0}^{+\infty} g(\frac{x}{3^n})$. L'inégalité (3) montre que la série $\sum_{n\geqslant 0} g(\frac{x}{3^n})$ est une série normalement convergente sur tout segment de $\mathbb{R}$. Puisque pour tout entier n, la fonction $x\mapsto g(\frac{x}{3^n})$ est continue, on en déduit que la fonction h est continue sur tout segment de $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
D'autre part, la fonction h vérifie l'équation souhaitée car :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(\frac{x}{3})-h(x)=-\sum_{n=0}^{+\infty} g(\frac{x}{3^{n+1}})+\sum_{n=0}^{+\infty} g(\frac{x}{3^n})=-\sum_{n=1}^{+\infty} g(\frac{x}{3^n})+\sum_{n=0}^{+\infty} g(\frac{x}{3^n})=g(x)$$

et $h(0)=\sum_{n=0}^{+\infty} g(\frac{0}{3^n})=\sum_{n=0}^{+\infty} g(0)=0$. Nous venons donc de montrer l'existence d'une solution. Le point précédent montre que la solution est unique.
Nous avons d'autres informations en fait sur la fonction h. Puisque la série $\sum_{n\geqslant 0}(g(\frac{x}{3^n}))'=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{3^n}g'(\frac{x}{3^n})$ est une série normalement convergente sur $\mathbb{R}$ ($\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{3^n}g'(\frac{x}{3^n})\right|\leqslant\frac{M}{3^n}$) et que la série $\sum_{n\geqslant 0}(g(\frac{x}{3^n}))$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction h est C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $h'(x)=\sum_{n\geqslant 0}(g(\frac{x}{3^n}))'=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{3^n}g'(\frac{x}{3^n})$. En outre, cette dérivée est bornée sur $\mathbb{R}$ car

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \left|h'(x)\right|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\left|g'(\frac{x}{3^n})\right|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}M=\frac{3M}{2}.$$

Correction de l'exercice 1.2.4 : On cherche un solution sous la forme

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \text{ donc } y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1} \text{ et } y"(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$\begin{aligned}
x^2y"-6xy'+(12+x^2)y &= \sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=1}^{+\infty}6na_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}12a_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}12a_nx^{n+2}\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=1}^{+\infty}6na_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}12a_nx^n-\sum_{n=2}^{+\infty}12a_{n-2}x^n\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(n(n-1)a_n-6na_n+12a_n-12a_{n-2}\right)x^n+12a_0+(12a_1-6a_1)x\\
&\quad \sum_{n=2}^{+\infty}[(n-3)(n-4)a_n-12a_{n-2}]x^n+12a_0+6a_1x
\end{aligned}$$

On en déduit que $12a_0=0,\quad 6a_1=0$ et

$$\forall n\geqslant 2,\quad (n-3)(n-4)a_n-12a_{n-2}=0. \tag{4}$$

Il est immédiat que $a_0=a_1=0$ donc $a_2=0$ ($n=2$ dans (4)). Par contre, on ne peut rien dire de a_3 et a_4 (pour $n=3$ et 4, on aboutit à une égalité $0=0$). La formule (4) nous fournit néanmoins tous les termes suivants en fonction de a_3 et a_4. On distingue les cas pairs des cas impairs.

$$a_{2n+2}=\frac{12}{(2n+2-3)(2n+2-4)}a_{2n}\Leftrightarrow a_{2(n+1)}=\frac{12}{(2n-1)(2n-2)}a_{2n}.$$

Si $n \geqslant 3$, le produit $\prod_{k=2}^{n-1} \frac{a_{2(k+1)}}{a_{2k}}$ s'écrit $\prod_{k=2}^{n-1} \frac{12}{(2k-1)(2k-2)} = \frac{12^{(n-1)-2+1}}{(2(n-1)-1)!} = \frac{12^{n-2}}{(2n-3)!}$ (le produit $\prod_{k=2}^{n-1}(2k-1)$ désigne le produit sur tous les entier impair moindre que $2n-3$ et le produit $\prod_{k=2}^{n-1}(2k-2)$ désigne le produit sur tous les entiers pairs moindre que $2n-4$ donc le produit des deux facteurs décrit tous les entiers moindre que $2n-3$) mais en appliquant la version multiplicative du principe des dominos, il s'écrit aussi $\frac{a_{2n}}{a_4}$. Ainsi, si $n \geqslant 3$, $\quad a_{2n} = \frac{12^{n-2}}{(2n-3)!}a_4$ et la formule reste valable pour $n = 2$.

$$a_{2n+1} = \frac{12}{(2n+1-3)(2n+1-4)}a_{2n+1} \Leftrightarrow a_{2(n+1)+1} = \frac{12}{(2n-2)(2n-3)}a_{2n-1}.$$

Si $n \geqslant 2$, le produit $\prod_{k=2}^{n} \frac{a_{2(k+1)-1}}{a_{2k-1}}$ s'écrit $\prod_{k=2}^{n} \frac{12}{(2k-2)(2k-3)} = \frac{12^{n-2+1}}{(2n-2)!} = \frac{12^{n-1}}{(2n-2)!}$ (cf. le raisonnement précédent) mais en appliquant la version multiplicative du principe des dominos, il s'écrit aussi $\frac{a_{2n+1}}{a_3}$. Ainsi, si $n \geqslant 2$, $\quad a_{2n+1} = \frac{12^{n-1}}{(2n-2)!}a_3$ et la formule reste valable pour $n = 1$.
Le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} a_{2n}x^n$ est infini (par d'Alembert) donc la série $\sum_{n\geqslant 2} a_{2n}x^n$ converge quel que soit x ce qui implique que la série $\sum_{n\geqslant 2} a_{2n}(x^2)^n$ est toujours convergente et le rayon de convergence de la série est $\sum_{n\geqslant 2} a_{2n}x^{2n}$.
En remarquant que $\sum_{n\geqslant 1} a_{2n+1}x^{2n+1} = x\sum_{n\geqslant 1} a_{2n+1}(x^2)^n$, on conclut également à ce que son rayon de convergence est infini.
Si l'on note $y_1(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{12^{n-2}}{(2n-3)!}x^{2n}$ et $y_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{12^{n-1}}{(2n-2)!}x^{2n+1}$, ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$, C^∞ sur $\mathbb{R}$, linéairement indépendante sur $\mathbb{R}$ et vérifient l'équation différentielle

$$x^2y" - 6xy' + (12+x^2)y = 0.$$

(*On remarque que le théorème spécifiant la dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire exige que l'on soit sur un intervalle et que la plus grande dérivée soit exempte de coefficient.*)
Cette équation différentielle est équalente sur $\mathbb{R}_+^\times$ à l'équation différentielle

$$y" - \frac{6}{x}y' + \frac{12+x^2}{x^2}y = 0$$

dont l'espace des solutions est de dimension 2, on en déduit que les fonctions y_1 et y_2 forment une base des solutions définies sur $\mathbb{R}_+^\times$. De même pour l'espace des solutions définies sur $\mathbb{R}_-^\times$. Ainsi toute solution de l'équation différentielle est de la forme

$$y(x) = \begin{cases} \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \text{ si } x > 0 \\ \gamma y_1(x) + \delta y_2(x) \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

On constate que toutes ces solutions sont C^1 sur $\mathbb{R}$ et C^∞ en dehors de 0. L'espace vectoriel des solutions définies sur $\mathbb{R}$ est de dimension 4 et il est engendré par

$$x \mapsto \begin{cases} y_1(x) \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}, \quad x \mapsto \begin{cases} y_2(x) \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \geqslant 0 \\ y_1(x) \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \geqslant 0 \\ y_2(x) \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Par contre, si l'on exige la solution soit C^2 sur $\mathbb{R}$ tout entier, il est indispensable que $\alpha = \gamma$ et $\beta = \lambda$ c'est-à-dire $y = \alpha y_1 + \beta y_2$. On en déduit que l'espace des solutions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$x^2y" - 6xy' + (12+x^2)y = 0$$

est de dimension 2 et est engendré par y_1 et y_2.

Correction de l'exercice 1.2.5 :

1. Puisque $x>0$, $\quad e^{-x}\leqslant 1$ et $\dfrac{1}{1-e^{-x}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^{-x})^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}e^{-nx}$ donc

$$\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\sin ax=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-(n+1)x}\sin(ax).$$

On serait tenter d'écrire $I=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}e^{-(n+1)x}\sin(ax)dx$ mais le théorème de permutation série-intégrale de Lebesgue ne peut s'appliquer ($\int\limits_0^{+\infty}\left|e^{-(n+1)x}\sin(ax)\right|dx\leqslant\int\limits_0^{+\infty}e^{-(n+1)x}dx=\dfrac{1}{n+1}$ qui est une série divergente).
Nous allons néanmoins montrer que cette égalité est vraie mais on va le faire à la main.
On remercie notre bien-aimé Gauss (dont, soit dit en passant, le prénom était Karl et non Gottlieb) pour l'admirable égalité

$$\frac{1}{1-e^{-x}}=\sum_{n=0}^{N}(e^{-x})^n+\frac{(e^{-x})^{N+1}}{1-e^{-x}}=\sum_{n=0}^{N}e^{-nx}+\frac{e^{-(N+1)x}}{1-e^{-x}}$$

qui nous permet d'écrire

$$I=\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)x}\sin(ax)dx+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}\sin(ax)}{1-e^{-x}}e^{-(N+1)x}dx.$$

Nous disposons de la majoration

$$\forall x>0,\forall n\in\mathbb{N},\quad\left|\frac{e^{-x}\sin(ax)}{1-e^{-x}}e^{-(N+1)x}\right|\leqslant\frac{|a|\,xe^{-x}}{1-e^{-x}}=|a|\,\frac{x}{e^x-1}$$

La fonction $x\mapsto\dfrac{x}{e^x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$, se prolonge par continuité en 0 et est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Nous sommes en droit d'invoquer de convergence dominé de Lebesgue, ce qui nous donne

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}\sin(ax)}{1-e^{-x}}e^{-(N+1)x}dx=\int_0^{+\infty}\lim_{N\to+\infty}\frac{e^{-x}\sin(ax)}{1-e^{-x}}e^{-(N+1)x}dx=\int_0^{+\infty}0dx=0$$

donc la série $\sum\limits_{n\geqslant0}\int\limits_0^{+\infty}e^{-(n+1)x}\sin(ax)dx$ est convergente et sa somme est I, c'est-à-dire

$$I=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)x}\sin(ax)dx$$

Il suffit de calculer ces intégrales classiques

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)x}\sin(ax)dx&=\int_0^{+\infty}\operatorname{Im}(e^{-(n+1)x+iax})dx=\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)x+iax}dx\right)=\operatorname{Im}\left[\frac{e^{(-(n+1)+ia)x}}{-(n+1)+ia}\right]_{x=0}^{x=+\infty}\\&=\operatorname{Im}\frac{1}{n+1-ia}=\operatorname{Im}\frac{n+1+ia}{(n+1)^2+a^2}=\frac{a}{(n+1)^2+a^2}\end{aligned}$$

On a donc l'égalité remarquable

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\sin axdx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a}{(n+1)^2+a^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$$

2. La fonction f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème de Dirichlet) son prolongement périodisé et régularisé à $\mathbb{R}$ est développable en série de Fourier. Calculer ses coefficients complexes lorsque $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(f) &= \int_0^{2\pi} f(s)e^{-ins}ds = \int_0^{2\pi} e^{(a-in)s}ds = \left[\frac{e^{(a-in)s}}{a-in}\right]_{s=0}^{s=2\pi} = \frac{e^{(a-in)2\pi}}{a-in} - \frac{1}{a-in} \\ &= \frac{1}{a-in}\left[e^{2\pi a}-1\right] = \frac{a+in}{a^2+n^2}\left[e^{2\pi a}-1\right], \end{aligned}$$

la fonction f étant à valeurs réelles, on a

$$a_n(f) = 2\,\mathrm{Re}(c_n(f)) = \frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}.\frac{a}{a^2+n^2} \text{ et } b_n(f) = -2\,\mathrm{Im}(c_n(f)) = -\frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}\frac{n}{a^2+n^2}$$

et

$$\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx)) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in]0,2\pi[\\ \dfrac{f(0^+)+f(2\pi^-)}{2} = \dfrac{1+e^{2a\pi}}{2} \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = 2\pi \end{cases}$$

3. On utilise l'égalité de Fourier en $x = 0$ ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \frac{1+e^{2a\pi}}{2} &= \frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}.\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}.\frac{a}{a^2+n^2} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{a}+\pi.\frac{1+e^{2a\pi}}{e^{2\pi a}-1}\right] \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{\mathrm{th}(a\pi)}-\frac{1}{a}\right] \Leftrightarrow I = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{\mathrm{th}(a\pi)}-\frac{1}{a}\right] \end{aligned}$$

8 Corrections MP

8.1 Algèbre-géométrie

Correction de l'exercice 2.1.1 :

1. (a) Soit $M \in \mathcal{M}$, $G^2(M) = G(G(M)) = AG(M) = AAM = A^2M$ donc $G^2(M) - 5G(M) + 6\,\mathrm{Id}(M) = 0$ ce que l'on peut aussi écrire

$$G^2 - 5G + 6\,\mathrm{Id} = 0.$$

L'endomorphisme G de $\mathcal{M}$ admet $X^2 - 5X + 6 = (X-3)(X-2)$ comme polynôme qui est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc G est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

(b) La question précédente montre que $\mathrm{Sp}(G) \subset \{2, 3\}$.
- Si A est une homothétie $\lambda\,\mathrm{Id}$ (avec $\lambda = 2$ ou 3) alors G est également une homothétie de même rapport.
- Supposons que A ne soit pas une homothétie : si l'endomorphisme G n'admet qu'une valeur propre, étant donné qu'il est diagonalisable, il est nécessairement semblable à une matrice diagonale dont la diagonale est uniquement constitué de cette valeur propre c'est-à-dire G est semblable à une homothétie donc G est une homothétie ce qui implique que $AM = \lambda M$ quel que soit M dans $\mathcal{M}$ donc $A = \lambda\,\mathrm{Id}$ ce qui est absurde.
Ainsi si $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 3\}$ alors $\mathrm{Sp}(G) = \{2, 3\}$. Soit $M \in \mathcal{M}$ un vecteur propre de G associé à la valeur propre λ. L'égalité $G(M) = \lambda M$ est équivalente à l'égalité $(A - \lambda\,\mathrm{Id})M = 0$. En particulier, $\mathrm{Im}\,M \subset \ker(A - \lambda\,\mathrm{Id})$. Réciproquement, toute matrice M vérifiant $\mathrm{Im}\,M \subset \ker(A - \lambda\,\mathrm{Id})$ satisfait nécessairement à l'égalité $(A - \lambda\,\mathrm{Id})M = 0$ c'est-à-dire M est un vecteur propre de G. Par conséquent

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(G), \quad E_\lambda(G) = \{M \in \mathcal{M} \text{ telle que } \mathrm{Im}\,M \subset \ker(A - \lambda\,\mathrm{Id})\} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \ker(A - \lambda\,\mathrm{Id})).$$

2.

(a) Par un calcul analogue à G, on obtient $D^2 - 5D + 6\,\mathrm{Id}$ et on conclut comme pour G.

(b) Pour procède de même que pour G. On distingue également le cas où A est une homothétie du cas où elle n'en est pas une. Dans ce second cas, $M \in \ker(D - \lambda\,\mathrm{Id})$ si et seulement si $M(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0$ ce qui est équivalent à $\mathrm{Im}(A - \lambda\,\mathrm{Id}) \subset \ker M$ donc

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(D), \quad E_\lambda(D) = \{M \in \mathcal{M} \text{ telle que } \mathrm{Im}(A - \lambda\,\mathrm{Id}) \subset \ker M\}.$$

3. Nous n'allons pas invoquer de grandes théories mais redécouvrir, "à la main", un résultat fondamental de l'algèbre linéaire et retrouver par la même occasion l'origine d'une "astuce" classique à résolution de cet exercice mais qui semble tombée du ciel sans aucune raison valable, hormis qu'elle fonctionne.
Si A est une homothétie $\alpha\,\mathrm{Id}$ alors F est l'homothétie $2\alpha\,\mathrm{Id}$ et tout est dit.
Soit ζ une valeur propre de F. Soit M un vecteur propre associé à ζ

$$F(M) = \zeta M \Leftrightarrow AM + MA = \lambda M + \mu M$$

Soit $x \in \ker(A - \alpha\,\mathrm{Id})$, alors

$$AMx + MAx = \zeta Mx \Leftrightarrow AMx + \alpha Mx = \zeta Mx \Leftrightarrow AMx = (\zeta - \alpha)Mx$$

donc $Mx \in \ker(A - (\zeta - \alpha)\,\mathrm{Id})$ ce que l'on peut encore écrire

$$\forall \alpha \in \mathrm{Sp}(A), \forall \zeta \in \mathrm{Sp}(F), \quad M(\ker(A - \alpha\,\mathrm{Id})) \subset \ker(A - (\zeta - \alpha)\,\mathrm{Id}).$$

On voit en particulier, que si $\zeta - \alpha$ n'est pas une valeur propre de A alors $M(\ker(A - \alpha\,\mathrm{Id})) = \{0\}$. En particulier, si $\zeta - 2 \notin \mathrm{Sp}(A)$ et $\zeta - 3 \notin \mathrm{Sp}(A)$ alors M est nulle sur chaque sous-espace propre de A et celui étant diagonalisable M est nulle, ce qui n'est pas. Nous venons de montrer

simplement que $\zeta-2=2$ ou $\zeta-2=3$ ou $\zeta-3=2$ ou $\zeta-3=3$, autrement dit $\zeta\in\{4,5,6\}$ et $\mathrm{Sp}(F)\subset\{4,5,6\}$.
Avant d'aller plus loin, il est utile de quitter le monde des matrices pour avoir un point de vue plus géométrique (afin de s'affranchir du choix d'une base initiale à priori trop rigide et peu adaptée au problème). Introduisons deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$: a désigne l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et m l'endomorphisme associé à M dans la base canonique.

- Si $\zeta=4$. Soit M est un vecteur propre associé à 4 alors $M(\ker(A-2\,\mathrm{Id}))\subset\ker(A-2\,\mathrm{Id})$ et $M(\ker(A-3\,\mathrm{Id}))\subset\ker(A-\mathrm{Id})=\{0\}$ donc $M(\ker(A-3\,\mathrm{Id})=\{0\}$. Puisque A est diagonalisable, $\ker(A-2\,\mathrm{Id})\oplus\ker(A-3\,\mathrm{Id})=\mathbb{R}^n$ et si l'on considère une base $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres associés à la valeur propre 2 puis de vecteurs propres associés à la valeur 3, la matrice de l'endomorphisme de m dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix}C&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $M=P\begin{pmatrix}C&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}$ où P est la matrice de changement de base correspondante. Réciproquement, soit m un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathbb{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix}C&0\\0&0\end{pmatrix}$ alors la matrice de A dans cette même base est la matrice $\begin{pmatrix}2I_p&0\\0&3I_q\end{pmatrix}$ et
$$\begin{pmatrix}C&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2I_p&0\\0&3I_q\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2I_p&0\\0&3I_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4CI_p&0\\0&0\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}C&0\\0&0\end{pmatrix}.$$
Autrement dit la matrice $M=P\begin{pmatrix}C&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}$ est vecteur propre de F pour la valeur propre 4.
- Si $\zeta=5$. Soit M est un vecteur propre associé à 5 alors $M(\ker(A-2\,\mathrm{Id}))\subset\ker(A-3\,\mathrm{Id})$ et $M(\ker(A-3\,\mathrm{Id}))\subset\ker(A-2\,\mathrm{Id})$. Si l'on considère de nouveau la base $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^n$ définie ci-dessus, la matrice de l'endomorphisme de m dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix}0&D\\C&0\end{pmatrix}$ et $M=P\begin{pmatrix}0&D\\C&0\end{pmatrix}P^{-1}$ où P est la matrice de changement de base correspondante. Réciproquement, soit m un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathbb{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix}0&D\\C&0\end{pmatrix}$ alors la matrice de A dans cette même base est la matrice $\begin{pmatrix}2I_p&0\\0&3I_q\end{pmatrix}$ et
$$\begin{pmatrix}0&D\\C&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2I_p&0\\0&3I_q\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2I_p&0\\0&3I_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&D\\C&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&5D\\5C&0\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}0&D\\C&0\end{pmatrix}.$$
Autrement dit la matrice $M=P\begin{pmatrix}0&D\\C&0\end{pmatrix}P^{-1}$ est vecteur propre de F pour la valeur propre 5.
- Je laisse le lecteur le soin de vérifier que l'espace propre de F associé à la valeur propre 6 est l'ensemble des matrices M de la forme $P\begin{pmatrix}0&0\\0&C\end{pmatrix}P^{-1}$

En résumé,

$$\begin{aligned}
E_4(F) &= \{P\begin{pmatrix}C&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}, C\in\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})\text{avec } p=\dim\ker(A-2\,\mathrm{Id})\}\\
E_5(F) &= \{P\begin{pmatrix}0&D\\C&0\end{pmatrix}P^{-1}, C\in\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{R}),\ D\in\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R})\text{ avec } p=\dim\ker(A-2\,\mathrm{Id})\text{ et } q=\dim\ker(A-3\,\mathrm{I}\\
E_6(F) &= \{P\begin{pmatrix}0&0\\0&C\end{pmatrix}P^{-1}, C\in\mathfrak{M}_q(\mathbb{R})\text{avec } p=\dim\ker(A-3\,\mathrm{Id})\}
\end{aligned}$$

Il est évident que les espaces vectoriels $E_4(F), E_5(F), E_6(F)$ sont en somme directe et que
$$\mathcal{M}=E_4(F)\oplus E_5(F)\oplus E_6(F)$$

ce qui démontre que F est diagonalisable, que $\mathrm{Sp}(F) = \{4, 5, 6\}$ et que les espaces propres de F découlent des espaces propres de A. Remarquons que les espaces intervenant dans la décomposition spectrale de F sont isomorphes à des espaces d'applications linéaires d'un espace propre de A dans un autre espace propre de A.
L'explication de l'astuce : si nous travaillons en terme d'endomorphisme, l'espace propre de F relativement à la valeur propre ζ est l'ensemble des endomorphismes m tels que $m(\ker(a - \alpha\,\mathrm{Id})) \subset \ker(a - (\zeta - \alpha)\,\mathrm{Id})$ donc m est une application linéaire de $\ker(a - \alpha\,\mathrm{Id})$ dans $\ker(a - (\zeta - \alpha)\,\mathrm{Id})$. Or une base de l'espace des applications linéaires est formée des bases duales (dans $\mathcal{M}$) aux matrices $E_{i,j}$ (dans les bases de vecteurs propres) c'est-à-dire aux applications linéaires envoyant un vecteur propre e_i sur un vecteur propre e_j et envoyant tous les autres vecteurs propres e_k sur 0. La matrice M correspondante est la matrice $e_i\ {}^t e_j$ où encore $PE_{i,j}P^{-1}$. Dans certains livres, on résout cet exercice en introduisant ces endomorphismes. Effectivement, ils conviennent et nous venons d'expliquer pourquoi (question fondamentale en science).

Une démonstration plus théorique de la diagonalisabilité de F Les endomorphismes G et D commutent car

$$\forall M \in \mathcal{M}, \quad (G\circ D)(M) = G(D(M)) = G(MA) = AMA = D(AM) = D(G(M)) = (D\circ G)(M).$$

Puisque chacun de ses endomorphismes est en outre diagonalisable, on en déduit qu'il existe une base commune de diagonalisation.
Redémontrons rapidement ce résultat fondamental : on se rappelle qu'une conséquence de la commutation de deux endomorphismes est que chacun conserve les espaces stables de l'autre, en particulier, D laisse stable tous les espaces propres de G. Fixons un tel espace propre $E_\lambda(G)$. La restriction de $D_{|E_\lambda(G)}$ de D à E_λ est une application linéaire de $E_\lambda(G)$ dans $E_\lambda(G)$ donc c'est un endomorphisme de $E_\lambda(G)$. Puisque D est diagonalisable, $D_{|E_\lambda(G)}$ est également diagonalisable. Il existe donc une base B_λ de $E_\lambda(G)$ formée de vecteurs propres de $D_{|E_\lambda(G)}$ donc de D (par définition d'une restriction). Si l'on regroupe (on dit aussi concaténer) toutes ces bases $(B_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}(G)}$, nous obtenons une base B de M formée de vecteurs propres de D. Or les éléments de B_λ sont par définition dans $E_\lambda(G)$ donc sont des vecteurs propres de G (plus précisément des vecteurs propres attachés à la valeur propres λ, mais on va faire varier ensuite λ) donc les élements de la base B. Ainsi notre belle base B est constituée à la fois de vecteurs propres pour G et pour D. Dans cette base, les matrices de nos deux endomorphismes sont donc diagonales et nous venons d'effectuer la codiagonalisation de G et D.
En particulier, si l'on écrit la matrice de F dans cette base commune de diagonalisation, on constate qu'elle est diagonale et qu'elle est la somme des matrices diagonales de G et D et on on obtient ainsi que $\mathrm{Sp}(F) \subset \{g + d,\ g \in \mathrm{Sp}(G),\ d \in \mathrm{Sp}(D)\} = \{4, 5, 6\}$. L'argument montrant que $\mathrm{Sp}(F) = \{4, 5, 6\}$ reste valable ainsi que l'explicitation des espaces propres. A mon sens, c'est la meilleure méthode car elle exploite simplement, mais profondément, l'approche géométrique, sans utiliser d'astuces tombées dont ne sait trop où (la science doit pouvoir se reconstruire et se redécouvrir à chaque instant).

Correction de l'exercice 2.1.2 :

1. C'est quand même pas Ducros qui va se décarcasser pour cela :-)
2. On se dit pour commencer que A et B ont un air de famille. Désignons par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Si l'on effectue le changement de base faisant passer de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (e_3, e_2, e_1) à la matrice B, c'est-à-dire, si on la conjugue par la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $PBP^{-1} = A$. La relation "être semblable étant une relation d'équivalence, il suffit de montrer

que A est semblable à $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$. Cela signfie qu'il existe une base (v_1,v_2,v_3) telle que

$$Av_1=0,\quad Av_2=-\frac{3}{2}v_2+\frac{1}{2}v_3,\quad Av_3=-\frac{1}{2}v_2-\frac{3}{2}v_3.$$

Si l'on pose guère de questions et que l'on cherche brutalement les coordonnées des trois vecteurs, on va être confronté à une équation de 6 inconnues à 6 équations (symptatique).
Entre force et finesse et étant donné que nous n'avons pas l'avantage, on choisit la finesse. De tête, on remarque que le vecteur $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ convient très bien. L'objectif est de trouver v_2 et v_3.
Le polynôme caractéristique de A est $X^3+3X^2+3X=X(X^2+3X+3)$. Le polynôme X^2+3X+3 possédant un discriminant strictement négatif (*et ses racines complexes sont* $-\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{3}{2},\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{3}{2}$ *dont les parties réelles et imaginaires interviennent dans la matrice souhaitée*), il est irréductible sur $\mathbb{R}$. Le théorème des noyaux montre que

$$\mathbb{R}^3=\ker A\oplus\ker(A^2+3A+3\,\mathrm{Id})$$

En se rappellant la méthode de résolution des équations du second degré, on remarque que

$$A^2+3A+3\,\mathrm{Id}=(A+\frac{3}{2}\,\mathrm{Id})^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}[(\frac{2}{\sqrt{3}}A+\sqrt{3}\,\mathrm{Id})^2+\mathrm{Id}]$$

En particulier, si v_2 est un vecteur non nul quelconque de $\ker(A^2+3A+3\,\mathrm{Id})$, posons $v_3=(\frac{2}{\sqrt{3}}A+\sqrt{3}\,\mathrm{Id})v_2$. En particulier,

$$v_3=\frac{2}{\sqrt{3}}Av_2+\sqrt{3}v_2\Leftrightarrow Av_2=-\frac{3}{2}v_2+\frac{\sqrt{3}}{2}v_3\text{ (cela commence bien).}$$

Explicitons Av_3

$$\begin{aligned}Av_3&=[\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{2}{\sqrt{3}}A+\sqrt{3}\,\mathrm{Id})-\frac{3}{2}\,\mathrm{Id}]v_3=\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{2}{\sqrt{3}}A+\sqrt{3}\,\mathrm{Id})v_3-\frac{3}{2}v_3\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{2}{\sqrt{3}}A+\sqrt{3}\,\mathrm{Id})^2v_2-\frac{3}{2}v_3\end{aligned}$$

Puisque $v_2\in\ker(A^2+3A+3\,\mathrm{Id})=\ker[(\frac{2}{\sqrt{3}}A+\sqrt{3}\,\mathrm{Id})^2+\mathrm{Id}]$, on a$(\frac{2}{\sqrt{3}}A+\sqrt{3}\,\mathrm{Id})^2+\mathrm{Id})^2v_2=0$ donc

$$Av_3=\frac{\sqrt{3}}{2}(-v_2)-\frac{1}{2}v_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}v_2-\frac{3}{2}v_3$$

Puisque $A^2+3A+3\,\mathrm{Id}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, on peut prendre $v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, par exemple, alors $v_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\sqrt{3}\\ \frac{1}{3}\sqrt{3}\\ -\frac{2}{3}\sqrt{3}\end{pmatrix}$ la famille (v_2,v_3) est clairement une famille libre de $\ker(A^2+3A+\mathrm{Id})$ (qui est laissé stable par A !), les espaces $\ker A$ et $\ker(A^2+3A+3\,\mathrm{Id})$ étant en somme directe, on peut affirmer que la famille (v_1,v_2,v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et si P désigne la matrice de changement

de base de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans (v_1, v_2, v_3) alors $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} P^{-1}$

Une remarque : En fait, on peut faire un choix arbitraire de $v_2 \in \ker(A^2 + 3A + 3\,\mathrm{Id})$. *Si* $v_2 \neq 0$ *alors la famille* $(v_2, (\frac{2}{\sqrt{3}}A + \sqrt{3}\,\mathrm{Id})v_2)$ *est une famille libre et vérifie les conditions exigées. En effet, si* v_3 *est colinéaire à* v_2 *alors* Av_2 *est colinéaire à* v_2 *(il suffit de revenir à la définition de* v_3*). Puisque* v_2 *est un vecteur à coefficients réels non nul,* v_2 *est un vecteur propre réel de* A*, il est alors nécessairement associé à une valeur propre réelle* ($\lambda v_2 = \underbrace{Av_2}_{\in \mathbb{R}^n}$ *donc* $\lambda v_2 \in R^n$ *et toutes les coordonnées de* v_2 *sont réelles) qui ne peut être que* 0 *donc* $v_2 \in \ker A$ *ce qui est contraire aux hypothèses.*

3. Notons $V = \mathrm{Vect}(A, B)$. Un corps étant un anneau où tout élément inversible dispose d'un inverse dans l'anneau, commençons par montrer que V est un sous-anneau de $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$. V est non vide inclu dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, étant donné qu'il s'agit d'un espace vectoriel, il est stable par addition. Pour montrer que V est stable par multiplication, il suffit de montrer que A^2, AB, BA, B^2 appartiennent à V (le reste découlant par distributivité de la multiplication par rapport à l'addition) Un calcul direct nous donne

$$A^2 = -2A + B \in V, \quad B^2 = A - 2B \in V, \quad AB = BA = -A - B \in V \tag{5}$$

donc V est bien stable par produit. On remarque même que la multiplication est commutative sur V car

$$\forall (a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4, \quad (\alpha A + \beta B)(aA + bB) = a\alpha A^2 + (a\beta + b\alpha)AB + + b\beta B^2 = (aA + bB)(\alpha A + \beta B)$$

alors qu'elle ne l'est pas sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
V doit posséder également un élément neutre pour la multiplication et étant donné que la multiplication est commutative, nous devons trouver un élément $\alpha A + \beta B$ de V tel que pour tout élément $aA + bB$ de V,

$$(\alpha A + \beta B)(aA + bB) = aA + bB.$$

Puisque nous connaissons les générateurs de V et que ces générateurs commutent, il faut et il suffit de vérifier que

$$(\alpha A + \beta B)A = A \text{ et } (\alpha A + \beta B)B = B$$

(le cas général découlant toujours de la distibutivité...). En développant cette égalité, en utilisant les égalités (5) et utilisant l'indépendance linéaire sur $\mathbb{R}$ de A et de B, on aboutit aux deux systèmes

$$\begin{cases} -2\alpha - \beta = -1 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ainsi $-\frac{1}{3}(A + B)$ est l'élément neutre de V recherché (ce n'était pas une certitude à priori).
Intermède : on remarque que cet élément neutre est distinct de l'élément neutre de $M_n(R)$*. En effet,* I_3 *est peut-être l'élément neutre de* $M_n(R) \supset V$ *mais* $I_3 \notin V$ *donc il ne peut être élément neutre de* V*. Ce phénomène apparait par exemple avec le groupe* $G = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in R\}$ *qui est un sous-anneau de* $M_2(R)$ *et dont l'élément neutre est* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$*. Par contre, si l'élément neutre* e *d'un corps* K *appartient à un sous-ensemble* H *de* K *stable par produit, alors* e *est élément neutre de* H*.*
Il reste à montrer que tout élément non nul $aA + bB$ de V (donc $(a, b) \neq (0, 0)$) admet un inverse appartenant à V, c'est-à-dire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$(\alpha A + \beta B)(aA + bB) = -\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}B.$$

(la seconde égalité découlant de l'inverse à droite n'est pas nécessaire car la multiplication est commutative sur V). En développant cette égalité, on obtient

$$a\alpha(-2A+B)+b\beta(A-2B)+(a\beta+\alpha b)(-A-B)=-\frac{1}{3}A-\frac{1}{3}B$$

et en utilisant l'indépendance linéaire de A et B, on doit résoudre le système (après élimination des trop nombreux signes négatifs) :

$$\begin{cases}(2a+b)\alpha+(a-b)\beta=\dfrac{1}{3}\\(b-a)\alpha+(2b+a)\beta=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2a+b & a-b\\ b-a & 2b+a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

La matrice $\begin{pmatrix}2a+b & a-b\\ b-a & 2b+a\end{pmatrix}$ a pour déterminant $3(a^2+b^2+ab)$ qui est une forme quadratique en (a,b) définie positive. En particulier, si $(a,b)\neq(0,0)$ alors $3(a^2+b^2+ab)\neq 0$. En se rappelant l'inverse d'une matrice 2×2, on aboutit à

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{1}{3(a^2+b^2+ab)}\begin{pmatrix}2b+a & -a+b\\ -b+a & 2a+b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3(a^2+b^2+ab)}\begin{pmatrix}b\\ a\end{pmatrix}.$$

Autrement dit, la matrice $\dfrac{1}{3(a^2+b^2+ab)}(bA+aB)$, qui appartient à V, est l'inverse de $aA+bB$ et V est un corps commutatif contenu dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Etonnant ?
Exercice lié 2.1.3 et 2.1.6

Correction de l'exercice 2.1.3 : Une remarque préliminaire : Soit C une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$. On sait que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal (tout idéal est engendré par un élément) et l'ensemble $\mathfrak{J}$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ qui annulent A est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Il existe donc un élément $\pi\in\mathfrak{J}$ tel que $\mathfrak{J}=(\pi)=\{\pi S,\quad S\in\mathbb{K}[X]\}$. L'unique π vérifiant cette condition et de coefficient dominant 1 s'appelle le polynôme minimal de A. En particulier, tout polynôme annulateur de C est divisible par le polynôme minimal de C. Si en outre, ce polynôme annulateur est irréductible sur $\mathbb{K}$ alors il est égal au produit d'une constante et du polynôme minimale (en effet, si P est annulateur et irréductible donc π divise P et par irréductibilité, $P=\lambda\pi$ ou $P=\lambda\in\mathbb{K}$ et cette dernière égalité est impossible).

1. Si un tel vecteur $x\in\mathbb{Q}^3$ existe alors, si on note u l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{Q}^3$, la matrice de u dans cette base est $B=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. Un calcul direct montre que $B^3=2I_3$ donc elle convient bien. Tous les éléments de la classe de conjuguaison de B sous l'action de $GL_3(\mathbb{Q})$ (les matrices semblables sur $\mathbb{Q}$ à B) satisfont également à l'équation.
Bonus : Montrons qu'il s'agit des seules solutions.
On teste les matrices diagonales mais aucune ne convient car $\sqrt[3]{2}\notin Q$. Un peu de réflexion s'impose. Une telle matrice A a pour polynôme annulateur X^3-2. Si ce polynôme admettait un divisieur non constant de degré strictement inférieur à 3 alors P serait le produit de deux polynômes $R,S\in Q[X]$. On en déduit que $3=\deg P=\deg R+\deg S$ et $\deg R\geqslant 1$ et $\deg S\geqslant 1$ donc $\deg R=1$ et $\deg S=2$ ou $\deg R=2$ et $\deg S=1$. On peut donc supposer que R est de degré 1 donc il admet une racine $\alpha\in Q$. Par conséquent, X^3-2 admettrais x comme racine rationnelle donc $\alpha^3=2$ ce qui est impossible (on adapte la démonstration de Pythagore de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$). Le polynôme X^3-2 est donc irréductible sur $\mathbb{Q}$ et la remarque préliminaire montre qu'il s'agit du polynôme minimal (il normalisé). Le polynôme caractéristique de A est donc divisible par X^3-2 et comme ils sont de même degré et qu'ils possèdent le même coefficient, ils sont égaux.
On en déduit une application immédiate : si x est un vecteur non nul de $\underline{\mathbb{Q}^3}$, alors la famille (x,Ax,A^2x) est libre sur Q.

Preuve : supposons que $ax+bAx+cA^2x=0$. *Soit* u *l'endomorphisme associée à* A *dans la base canononique de* $\mathbb{Q}^3$. *L'espace vectoriel* $V=\mathrm{Vect}(x,Ax,A^2x)$ *est stable par* A *donc l'application linéaire* $v=u_{|V}$ *est un endomorphisme du* Q*-espace vectoriel* V *et son polynôme caractéristique* χ_v *(appartenant à* $Q_3[X]$*) divise celui de* u *qui est* X^3-2. *Ce dernier étant irréductible, on en déduit que* $\chi_v=X^3-2$ *ou* $\chi_v=\lambda\in\mathbb{Q}^\times$. En particulier, $\deg\chi_v=0$ *ou* $\deg\chi_v=3$ *donc* $\dim V=0$ *ou* 3. *Le premier cas étant impossible car* x *est non nul donc* $\dim V=3$ *et la famille* (x,Ax,A^2x) *est nécessairement libre. La matrice de* u *dans cette base est* B *donc* $A=PBP^{-1}$, *où* P *est la matrice de changement de base de la base canonique de* Q^3 *dans la base* (x,Ax,A^2x) *qui est nécessairement à coefficients rationnels.*

2. Que E soit un sous-anneau de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$ est une évidence (stable par produit, $I_3\in E$, multiplication commutative car tout polynôme en A commute avec tout polynôme en A). La question est de savoir si tout élément non nul admet un inverse dans E.

   si $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ **:** Nous avons vu ci-dessus que le polynôme $P=X^3-2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (il n'admet pas de diviseurs non constants). Si $a\,\mathrm{Id}+bA+cA^2=0$ alors si x est un vecteur non nul de $\mathbb{Q}^3$, on a
   $$ax+bAx+cA^2x=0.$$
   Le raisonnement de la question 1 montre que $a=b=c=0$. Ainsi la matrice $a\,\mathrm{Id}+bA+cA^2$ est nulle si et seulement si $a=b=c=0$.
   Supposons maintenant que la matrice $a\,\mathrm{Id}+bA+cA^2$ soit non nulle.On pose $Q(X)=a+bX+cX^2$; c'est un polynôme non nul à coefficients rationnels. Les polynômes P et Q sont premiers entre eux sur $\mathbb{Q}$ (car si d est un diviseur commun de P et Q dans $\mathbb{Q}[X]$ et si d est non constant alors d divise P donc $\deg d=0$ (impossible par hypothèse) ou $\deg d=3$. Or un polynôme de degré 3 ne peut diviser Q qui est de degré 2). Il existe donc deux polynômes U et V de $\mathbb{Q}[X]$ tels que $UP+VQ=1$. Par conséquent,
   $$U(A)\underbrace{P(A)}_{=0}+V(A)Q(A)=\mathrm{Id}\Rightarrow V(A)Q(A)=\mathrm{Id}$$
   donc la matrice $a\,\mathrm{Id}+bA+cA^2$ admet $V(A)$ comme inverse. A priori le degré de V est supérieur à 3 donc $V(A)$ n'appartient pas à priori à E. Il n'en est rien : effectuons la division euclidienne de V par P. Il existe $Z\in\mathbb{Q}[X]$ et $R\in\mathbb{Q}_2[X]$ tel que $V=ZP+R$ donc
   $$V(A)=Z(A)\underbrace{P(A)}_{=0}+R(A)=R(A)\in E.$$
   Nous venons donc de montrer que si $a\,\mathrm{Id}+bA+cA^2$ est une matrice non nulle de E alors elle admet un inverse $R(A)$ appartenant à E donc E est un corps (commutatif) contenu dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{Q})$.

   Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ **:** Posons $a=\sqrt[3]{2}$.
   Analyse : Le polynôme annulateur de A est $X^2-2=(X-a)(X^2+aX+a^2)$. En particulier, on a l'égalité remarquable
   $$(\underbrace{A-a\,\mathrm{Id}}_{\in E})(\underbrace{A^2+aA+a^2\,\mathrm{Id}}_{\in E})=0.$$
   On obtient ainsi que le produit de deux éléments particuliers de E est nul. Si E est un corps, nécessairement l'un des deux facteurs est nul. Analysons un peu la situation. Les polynômes $(X-a)$ et (X^2+aX+a^2) sont premiers entre eux. Le théorème des noyaux nous fournit l'égalité
   $$\mathbb{R}^3=\ker(A-a\,\mathrm{Id})\oplus\ker(A^2+aA+a^2\,\mathrm{Id}).$$
   Dire qu'aucun des facteurs n'est nul, cela signifie que chacun des espaces ci-dessus est non nul. Pour que le premier ne soit pas nul, il suffit de disposer d'un vecteur propre e_1. Quand

au second espace, aucun vecteur propre de A ne peut y appartenir (sinon $Ax = \alpha x \Rightarrow (A^2+aA+a^2\,\mathrm{Id})x = 0 = (\alpha^2+a\alpha+a^2)x$ donc $(\alpha^2+a\alpha+a^2) = 0$ ce qui est impossible). On va donc choisir un vecteur e_2 non vecteur propre de A et pour e_3, on choisit Ae_2. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (sinon e_2 est un vecteur propre). On a également $Av_2 = v_3$ et

$$Av_3 = A^2v_2 = -aAv_2 - a^2v_2 = -av_3 - a^2v_2.$$

La matrice de l'endomorphisme u associé à A admet comme matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}.$$

Synthèse : considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$. Un calcul direct montre que $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} = 2\,\mathrm{Id}$. Il est évident que la matrice $A - a\,\mathrm{Id}$ n'est pas nulle et un autre calcul direct montre que $A^2 + aA + a^2\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 3a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

Nous disposons donc de deux éléments non nuls de E, $A - a\,\mathrm{Id}$ et $A^2 + aA + a^2\,\mathrm{Id}$ dont le produit est nul. On en déduit que E n'est pas un corps.

Cet exercice est à rapprocher des exercices 2.1.2 et 2.1.6 puisque tous les deux nous fournissent un point de vue dual à l'étude des noyaux du type $\ker(A^2 + aA + b\,\mathrm{Id})$ *lorsque* $a^2 - 4b < 0$ et A une matrice à coefficients réels. Cela s'inscrit dans le cadre de la répercussion de la réduction dans $\mathbb{C}$ sur la réduction sur $\mathbb{R}$. C'est une version analogue au l'étude des irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ à l'aide des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

Correction de l'exercice 2.1.4 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Pas de grandes théories sur une si petite matrice (on aime parfois les chevaux :-). Posons $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors un calcul direct nous fournit le résultat suivant :

$$AX = XA \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ d = a + c \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a+c \end{pmatrix} = aI_2 + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc le commutant de A est $\mathrm{Vect}(I_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$. Puisque $3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + I_2 = A$, on en déduit que le commutant de A est $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.

En restant au niveau des courses hippiques, posons $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La matrice B est fixé et l'on recherche les matrices X possibles. Un calcul direct montre que l'égalité $B = AX - XA$ est satisfaite si et seulement si

$$\begin{cases} 3b = -x \\ 3b = -y \\ 3a + 3c - 3d = z \\ 3b = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -x = -y \\ 3b = t \\ 3a + 3c - 3d = z \end{cases}$$

Par conséquent le système est soluble en a, b, c, d si et seulement si $t = -x = -y$ et

$$\{B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) : \quad \exists X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad B = AX - XA\} = \{\begin{pmatrix} -t & -t \\ z & t \end{pmatrix},\ (t,z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

2. Il faut quitter le monde des courses pour revenir dans les mathématiques réelles.
Dans le cours, le produit scalaire euclidien usuel sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est $(A,B)\mapsto < A,B >= \mathrm{tr}({}^tAB)$.
L'ensemble recherché $\{B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}):\quad \exists X\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),\quad B=AX-XA\}$ est simplement l'image de l'endomorphisme Φ_A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ donné par

$$\forall M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\quad \Phi_A(M)=AM-MA.$$

La condition $\forall M\in\mathcal{C}(A),\quad \mathrm{tr}\,BM=0$ s'écrit, à l'aide du produit scalaire $<,>$, sous la forme

$$(\forall M\in\mathcal{C}(A),\quad \mathrm{tr}\,BM=0)\Leftrightarrow(\forall M\in\mathcal{C}(A),\quad <{}^tB,M>=0)\Leftrightarrow {}^tB\in(\mathcal{C}(A))^\perp$$

Un produit scalaire, de l'orthogonalité, un endomorphisme, une image : on nous sussure clairement et fortement de regarder du côté de l'adjoint de Φ_A (cf. le cours pour les formules ${}^tu$, $\ker{}^tu,...$).
Calculer l'adjoint de Φ_A.

$$\begin{array}{rcl}\forall X,Y & \in & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}):<\Phi_A(X),Y>=\mathrm{tr}\ \left[{}^t\Phi_A(X)\right]Y=\mathrm{tr}({}^t(AX-XA)M)\\ & = & \mathrm{tr}(({}^tX{}^tA-{}^tA{}^tX)M)=\mathrm{tr}({}^tX{}^tAM)-\mathrm{tr}({}^tA{}^tXM)\\ & = & \mathrm{tr}({}^tX({}^tAM))-\mathrm{tr}({}^tXM{}^tA))=\mathrm{tr}({}^tX\left[{}^tAM-M{}^tA\right])=<X,\Phi_{{}^tA}(Y)>\end{array}$$

Nous venons de démontrer que ${}^t\Phi_A=\Phi_{{}^tA}$. En utilisant la formule du cours $\mathrm{Im}{}^tu=(\ker u)^\perp$ à $u={}^t\Phi_A$ et en se rappelant que ${}^t({}^tu)=u$, nous obtenons

$$\mathrm{Im}\,\Phi_A=(\ker{}^t\Phi_A)^\perp=(\ker(\Phi_{{}^tA}))^\perp$$

On a :

$$\begin{array}{rcl}M & \in & \ker(\Phi_{{}^tA})\Leftrightarrow {}^tAM=M{}^tA\Leftrightarrow {}^t({}^tAM)={}^t(M{}^tA)\Leftrightarrow {}^tMA=A{}^tM\\ & \Leftrightarrow & {}^tM\in\mathcal{C}(A)\Leftrightarrow M\in\{{}^tS,\ S\in\mathcal{C}(A)\}\end{array}$$

donc

$$\begin{array}{rcl}B & \in & \{B\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}):\quad \exists X\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),\quad B=AX-XA\}\Leftrightarrow B\in\mathrm{Im}\,\Phi_A\\ & \Leftrightarrow & B\in(\ker(\Phi_{{}^tA}))^\perp\Leftrightarrow\forall M\in\ker(\Phi_{{}^tA}),\quad <B,M>=0\\ & \Leftrightarrow & \forall M\in\ker(\Phi_{{}^tA}),\quad \mathrm{tr}({}^tBM)=0\Leftrightarrow\forall S\in\mathcal{C}(A),\quad \mathrm{tr}({}^tB{}^tS)=0\\ & \Leftrightarrow & \forall S\in\mathcal{C}(A),\quad \mathrm{tr}({}^t(SB))=0\Leftrightarrow\forall S\in\mathcal{C}(A),\quad \mathrm{tr}(SB)=0\ \text{(cqfd)}\end{array}$$

Correction de l'exercice 2.1.5 :

1. Le polynôme caractéristique de $M(z)$ $P(X)=X^3-zX-z$. Un polynôme est à racines simples si et seulement P et P' n'ont pas de racines communes (c'est la contraposée de la notion de multiplicité d'une racine). Cherchons les racines communes de P et P'

$$\begin{array}{rcl}P(X) & = & P'(X)=0\Leftrightarrow X^3-zX-z=0\text{ et }3X^2-z=0\\ & \Rightarrow & X^3-zX-z=0\text{ et }3X^3-zX=0\Leftrightarrow\dfrac{zX}{3}-zX-z=0\text{ et }3X^3-zX=0\Rightarrow z(\dfrac{2}{3}X+1)=0\end{array}$$

Si $z\neq 0$ alors $X=-\dfrac{3}{2}$ donc

$$P(-\frac{3}{2})=0\Leftrightarrow(-\frac{3}{2})^3-z(-\frac{3}{2})-z=0\Leftrightarrow z=\frac{27}{4}.$$

Par conséquent, les seuls valeurs de z pour lesquelles le polynôme P puisse avoir des racines multiples sont $z=0$ ou $z=\dfrac{27}{4}$. Ainsi, si $z\in\mathbb{C}\backslash\{0,\dfrac{27}{4}\}$, le polynôme P est à racines simples donc $M(z)$ est annulé par un polynôme à racines simples donc $M(z)$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$

pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{0, \frac{27}{4}\}$.

Si $z = 0$, $M(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente non nulle donc elle ne peut être diagonalisable.

Si $z = \frac{27}{4}$, $M(\frac{27}{4}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 27/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et son polynôme caractéristique est $P(X) = X^3 - \frac{27}{4}X - \frac{27}{4} = \frac{1}{4}(X-3)(2X+3)^2$.

La valeur propre 3 étant de multiplicité 1, elle ne pose pas de problème quand à la diagonalisation. La matrice $M(\frac{27}{4})$ est donc diagonalisable si et seulement si $\dim\ker(M(\frac{27}{4}) + \frac{3}{2}\mathrm{Id}) = 2$. Or la matrice $M(\frac{27}{4}) + \frac{3}{2}\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{27}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc $\dim\ker(M(\frac{27}{4}) + \frac{3}{2}\mathrm{Id}) = 1$ et la matrice $M(\frac{27}{4})$ n'est pas diagonalisable.

2. $\lambda = e^{it}$ est valeur propre de $M(z)$ si et seulement si

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow e^{3it} - ze^{it} - z = 0 \Leftrightarrow (1+e^{it})z = e^{3it}$$

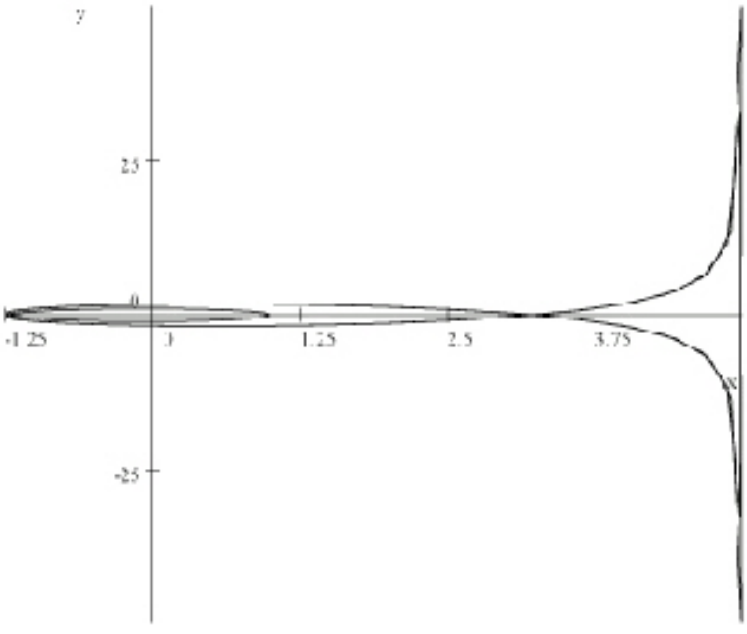
Puisque e^{3it} n'est jamais nul, nécessairement $z \neq 0$ et $1+e^{it} \neq 0$ c'est-à-dire $t \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Puisque l'on peut supposer $t \in]-\pi, \pi]$, on en déduit que

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad z = \frac{e^{3it}}{1+e^{it}} = \frac{e^{3it}}{e^{it/2}2\cos t/2} = \frac{e^{5/2it}}{\cos t/2}.$$

Si on repasse en cartésien, il s'agit de la courbe paramétrique d'équation

$$x(t) = \frac{\cos(5/2t)}{\cos(t/2)} \text{ et } y(t) = \frac{\sin(5/2t)}{\cos(t/2)}$$

On constate une symétrie $t \leftarrow -t$ et $\begin{pmatrix} \frac{\cos(5/2t)}{\cos(t/2)} \\ \frac{\sin(5/2t)}{\cos(t/2)} \end{pmatrix}$



oh la belle courbe

3. Soit x une valeur propre de $M(z)$ alors

$$P(x)=0 \Leftrightarrow x^3=z(1+x) \Rightarrow |x|^3 \leqslant |z|\,(1+|x|)$$

Supposons que $|x| \geqslant 1$ (donc $1+|x| \leqslant 2\,|x|$) alors $|x|^3 \leqslant 2\,|z|\,|x|$ et comme $x \neq 0$, on en déduit que $|x|^2 \leqslant 2\,|z|$ donc $|z| \geqslant \dfrac{|x|^2}{2} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Par conséquent, si $|z| < \dfrac{1}{2}$, nécessairement, toutes les valeurs propres de $M(z)$ sont de module strictement inférieures à 1. Il existe une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que

$$M(z)=P\begin{pmatrix} a(z) & 0 & 0 \\ 0 & b(z) & 0 \\ 0 & 0 & c(z) \end{pmatrix}P^{-1} \Rightarrow M(z)^n=P\begin{pmatrix} a(z)^n & 0 & 0 \\ 0 & b(z)^n & 0 \\ 0 & 0 & c(z)^n \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Les suites $a(z)^n, b(z)^n, c(z)^n$ convergent vers 0 donc $M(z)^n$ aussi

4. Montrer que la suite (M^n) tend vers 0 pour $|z|$ assez petit.

Correction de l'exercice 2.1.6 : La matrice A admet pour polynôme annulateur le polynôme $P(X)=X^3-X-1$. L'étude de son sens de variation sur $\mathbb{R}$ montre qu'il admet une unique racine réelle $\alpha \in [1,2]$. Il se factorise sous la forme $(X-\alpha)Q(X)$ où Q est un polynôme de second degré sans racine réelle. Ainsi $P(X)=(X-\alpha)(X-\beta)(X-\overline{\beta})$ où β est un complexe non réel. Le déterminant de A est égal à $\alpha^m\beta^p\overline{\beta}^q$ où m est la multiplicité de α, p la multiplicité de β et q la multiplicité de $\overline{\beta}$. Si $p=q$ alors $\det A=\alpha^m\beta^p\overline{\beta}=\alpha^m\,|\beta|^{2p}>0$.
Démontrons que c'est bien le cas. Soit $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur appartenant à $\ker(A-\beta\,\mathrm{Id})$ donc $AX=\beta X$. En conjuguant cette égalité et en tenant compte que A est à coefficients réels, on obtient $A\overline{X}=\overline{\beta X}$ donc $\overline{X} \in \ker(A-\overline{\beta}\,\mathrm{Id})$. L'application $S : X \mapsto \overline{X}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\ker(A-\beta\,\mathrm{Id})$ dans $\ker(A-\overline{\beta}\,\mathrm{Id})$. Elle est clairement injective et elle est surjective car $\overline{\overline{X}}=X$ donc elle réalise un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de $\ker(A-\beta\,\mathrm{Id})$ sur $\ker(A-\overline{\beta}\,\mathrm{Id})$ et par conséquent $\dim_{\mathbb{R}}\ker(A-\beta\,\mathrm{Id})=\dim_{\mathbb{R}}\ker(A-\overline{\beta}\,\mathrm{Id})$. Les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\ker(A-\beta\,\mathrm{Id})$ et $\ker(A-\overline{\beta}\,\mathrm{Id})$ sont également des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et la formule $\dim_{\mathbb{R}}E=2\dim_{\mathbb{C}}E$ nous montre que $\dim_{\mathbb{C}}\ker(A-\beta\,\mathrm{Id})=\dim_{\mathbb{C}}\ker(A-\overline{\beta}\,\mathrm{Id})$ ce qui signifie que les multiplicités de β et $\overline{\beta}$ sont égales, i.e. $p=q$.
On peut également voir les exercices 2.1.2 et 2.1.3

Correction de l'exercice 2.1.7 : Deux matrices diagonales quelconques commutant entre elles, nécessairement les matrices PAP^{-1} et PBP^{-1} commutent donc A et B commutent. Un calcul direct montre que c'est bien le cas. Les matrices A et B sont symétriques à coefficients réels donc elles sont diagonalisables en base orthonormale. La matrice A vérifie $A^2=4A$ donc X^2-4X est un polynôme annulateur de A et ses valeurs propres appartiennent à $\{0,4\}$. La matrice A admet au moins une valeur propre réelle (elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$!). Si A n'admet qu'une seule valeur propre, elle est semblable à une homothétie donc A est une homothétie ce qui n'est clairement pas le cas donc $\mathrm{Sp}\,A=\{0,4\}$. La matrice B commute avec la matrice A donc chaque espace propre de A est laissé stable par B, c'est-à-dire $B(\ker(A)) \subset \ker A$ (si $Ax=0$ alors $ABx=BAx=0$ donc $Bx \in \ker A$) et $B(\ker(A-4\,\mathrm{Id})) \subset \ker(A-4\,\mathrm{Id})$. Notons b (resp. a) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associée à la matrice B (resp. A) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. L'application linéaire $b_{|\ker a}$ est un endomorphisme de $\ker a$ (car $b(\ker a) \subset \ker a$) qui est symétrique

$$(\forall x \in \ker a, \forall y \in \ker a, \quad <b_{|\ker a}(x),y>=<b(x),y>=<x,b(y)>=<x,b_{|\ker a}(y)>)$$

L'endomorphisme $b_{|\ker a}$ est diagonalisable en base orthonormale, donc il existe une base orthonormale $\mathfrak{B}_1$ de $\ker a$ formée de vecteurs propres de $b_{|\ker a}$ donc de b (par définition de la restriction). Par définition, tout vecteur de $\ker a$ est un vecteur propre de a donc les vecteurs de $\mathfrak{B}_1$ sont des vecteurs propres de a (associé à la valeur propre 0). Le raisonnement est identique pour $b_{|\ker(a-4\,\mathrm{Id})}$ ce qui nous donne une base $\mathfrak{B}_2$ de $\ker(a-4\,\mathrm{Id})$ formée de vecteurs propres de $b_{|\ker(a-4\,\mathrm{Id})}$ donc de b qui sont également vecteurs propres pour a (plus précisément associé à la valeur propre 4). Les espaces $\ker a$

et $\ker(a-4\,\mathrm{Id})$ étant en somme directe orthogonale, le regroupement des bases $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ nous fournit une base orthonormale $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^4$ constitué de vecteurs propres pour b et pour a. De façon évidente, les matrices de a et b dans cette base (qui sont $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ où P est la matrice de changement de base de la base canonique dans la base $\mathfrak{B}$) sont des matrices diagonales. Puisque les bases initiales et finales sont orthonormales, la matrice P est orthogonale.
Un exercice que je vous conseille de faire est d'expliciter une base $\mathfrak{B}$ pour cet exemple concret. Cette méthode se généralise à deux endomorphismes symétriques en dimension quelconque ou à deux endomorphismes diagonalisables (mais on n'a plus de BON) en utilisant que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable est encore un endomorphisme diagonalisable.

Correction de l'exercice 2.1.8 :

1. Un dessin s'impose. Le segment MM' est une diagonale et les diagonales d'un carré se coupent en leurs milieux et elles sont orthogonales. Donc les deux points de la parabole complétant le carré sont sur la médiatrice de MM'. Le mileu du segment a pour coordonnées $(\dfrac{x+x'}{2},0)$ et les points de la parabole d'abscisses $\dfrac{x+x'}{2}$ sont ceux d'ordonnées y vérifiant $y^2=p(x+x')$. Il s'agit des points $(\dfrac{x+x'}{2},\sqrt{p(x+x')})$ et $(\dfrac{x+x'}{2},-\sqrt{p(x+x')})$. Pour obtenir un carré, il faut et il suffit d'exiger que les deux diagonales aient même longueur (le théorème de Pythagore assurant alors que tous les cotés ont même longueur). La diagonale MM' a pour longueur $x'-x$ (puisque $x'>x$) et la seconde a pour longueur $2\sqrt{p(x+x')}$. Par conséquent x vérifie l'égalité

$$x'-x=2\sqrt{p(x+x')}\Leftrightarrow (x'-x)^2=4p(x+x')\Leftrightarrow x'^2-(2x+4p)x'+x^2-4px=0.$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta=(2x+4p)^2-4(x^2-4px)=16p\,(p+2x)>0$ car $x\geqslant 0$ et $p>0$. Les racines du trinôme sont donc

$$x'_{\pm}=\frac{(2x+4p)\pm 4\sqrt{p\,(p+2x)}}{2}=x+2p+2\sqrt{2px+p^2}.$$

: La solution x'_+ est clairement supérieure à x et $x'_--x=2(p-\sqrt{2px+p^2})<0$ donc $x'_-<x$. Ainsi, si $x\geqslant 0$, il existe bien un seul $x'>x$ satisfaisant aux conditions exigées et

$$f(x)=x+2p+2\sqrt{2px+p^2}.$$

2. La suite (x_n) est bien définie, car si $x_n\geqslant 0$ alors $f(x_n)$ existe bien et $x_{n+1}=f(x_n)\geqslant 0$. La suite (x_n) est croissante car $x_{n+1}-x_n=2p+2\sqrt{2px_n+p^2}\geqslant 0$. Elle est convergente dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=l\in\mathbb{R}_+$ alors $l=f(l)\Leftrightarrow \underbrace{2p}_{>0}+\underbrace{2\sqrt{2pl+p^2}}_{>0}=0$ ce qui est absurde donc la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.
Pour le DAS, il faut se rappeler que si nous disposons d'une suite (u_n) telle que $u_{n+1}=f(u_n)$ avec $u_n\to 0$ et f possède un $DL(0)$ alors il existe un unique réel α non nul tel que la suite $u_{n+1}^{\alpha}-u_n^{\alpha}$ admet une limite finie L non nul. En invoquant Césaro ou les théorèmes de sommation des séries divergentes, on en déduit que $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim} Ln^{1/\alpha}$
Ici notre suite tend vers $+\infty$ mais on va néanmoins essayer cette technique (qui parfois marche très bien) et on s'attend bien entendu à obtenir un exposant $\alpha>0$ (pour diverger tout de même !)

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^{\alpha}-x_n^{\alpha} &= (x_n+2p+2\sqrt{2px_n+p^2})^{\alpha}-x_n^{\alpha}=x_n^{\alpha}\left((1+\frac{2p}{x_n}+2\sqrt{2\frac{p}{x_n}+(\frac{p}{x_n})^2})^{\alpha}-1\right)\\
&\quad (\text{ on n'oublie pas que } \frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{=}o(\frac{1}{\sqrt{x}}))\\
&= x_n^{\alpha}\left((1+2\sqrt{2\frac{p}{x_n}}+o(\frac{1}{\sqrt{x_n}}))^{\alpha}-1\right)=x_n^{\alpha}\left(2\alpha\sqrt{2\frac{p}{x_n}}+o(\frac{1}{\sqrt{x_n}})\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}2\alpha\sqrt{2p}x_n^{\alpha-1/2}.
\end{aligned}$$

Si on souhaite une limite finie alors $\alpha=\dfrac{1}{2}$ et dans ce cas $\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2p}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n}$ est équivalente à une suite positive $(\sqrt{2p})$ divergente donc

$$\underbrace{\sqrt{x_n}}_{\to+\infty}-\sqrt{x_0}=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{x_{k+1}}-\sqrt{x_k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=0}^{n-1}2\alpha\sqrt{2p}=\sqrt{2p}n$$

donc $\sqrt{x_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2p}n$ et, en élevant au carré, on obtient $x_n\underset{n\to+\infty}{\sim}2pn^2$.
Pour obtenir le terme suivant, on introduit la suite y_n telle que $x_n=2pn^2+y_n$. Par définition de l'équivalence, $y_n\underset{n\to+\infty}{=}o(n^2)$ et, si l'on réinjecte cette expression dans la relation de récurrence satisfaite par (x_n), on obtient

$$\begin{aligned}
&2p(n+1)^2+y_{n+1}=2pn^2+y_n+2p+2\sqrt{2p(2pn^2+y_n)+p^2}\\
\Leftrightarrow\ &2pn^2+4pn+2p+y_{n+1}=2pn^2+y_n+2p+2\sqrt{4p^2n^2+2py_n+p^2}\\
\Leftrightarrow\ &4pn+y_{n+1}=y_n+2\sqrt{4p^2n^2(1+\frac{y_n}{2pn^2}+\frac{1}{4n^2})}
\end{aligned}$$

Le terme dominant sous la racine est $4p^2n^2$ c'est pour cela que nous l'avons factorisé. D'autre part ; les termes $\dfrac{y_n}{2pn^2}$ et $\dfrac{1}{4n^2}$ tendent vers 0 donc on pourra effectuer un DL de la racine

$$\begin{aligned}
&4pn+y_{n+1}=y_n+4pn\sqrt{1+\frac{y_n}{2pn^2}+\frac{1}{4n^2}}\\
\Leftrightarrow\ &4pn+y_{n+1}=y_n+4pn(1+\frac{y_n}{4pn^2}+\frac{1}{8n^2}+o(\frac{y_n}{4pn^2}+\frac{1}{8n^2}))\\
\Leftrightarrow\ &4pn+y_{n+1}=y_n+4pn+\frac{y_n}{n}+\frac{p}{2n}+o(\frac{y_n}{n}+\frac{p}{2n})\\
\Leftrightarrow\ &y_{n+1}-y_n=\frac{y_n}{n}+\frac{p}{2n}+o(\frac{y_n}{n}+\frac{p}{2n})
\end{aligned}$$

On a donc l'équivalent

$$y_{n+1}-y_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{y_n}{n}+\frac{p}{2n}. \tag{6}$$

mais il ne nous fournit aucune information à priori (on ne sait pas si $y_n\to+\infty$ ou admet une limite finie, positive, négativen nulle). Nous allons devoir légèrement affiner pour essayer d'obtenir une information (même ténue) sur y_n. Nous savons que

$$4pn+y_{n+1}=y_n+2\sqrt{4p^2n^2+2py_n+p^2}\geqslant y_n+2\sqrt{4p^2n^2}=y_n+4pn$$

donc $y_{n+1}\geqslant y_n$ et notre suite (y_n) est croissante. Puisque $x_0=y_0\geqslant 0$, la suite (y_n) converge donc dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Supposons que y_n converge vers une limite finie $L\geqslant 0$. L'équivalent (6) nous montre que $y_{n+1}-y_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{2L+p}{2n}\geqslant 0$. La la série de terme général $y_{n+1}-y_n$ est divergente donc la suite y_n tend vers $+\infty$ ce qui contredit notre hypothèse. Par conséquent, $y_n\to+\infty$. Le terme $\dfrac{y_n}{n}$ domine donc $\dfrac{p}{2n}$ et notre équivalent nous fourni une information un peu meilleure $y_{n+1}-y_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{y_n}{n}$ mais qui ne semble pas au premier abord exploitable. Il n'en est rien : nous allons utiliser les logarithmes pour nous aider à obtenir que des termes linéaires

$$\begin{aligned}
&y_{n+1}-y_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{y_n}{n}\Leftrightarrow y_{n+1}-y_n\underset{n\to+\infty}{=}\frac{y_n}{n}+o(\frac{y_n}{n})\Leftrightarrow y_{n+1}\underset{n\to+\infty}{=}y_n+\frac{y_n}{n}+o(\frac{y_n}{n})\\
&\Leftrightarrow\ln(y_{n+1})=\ln(y_n+\frac{y_n}{n}+o(\frac{y_n}{n}))=\ln(y_n)+\ln(1+\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))\\
&\Leftrightarrow\ln(y_{n+1})-\ln(y_n)=\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})
\end{aligned} \tag{7}$$

Le terme $\ln(y_{n+1})-\ln(y_n)$ est équivalent à $\frac{1}{n}$ donc la série $\sum_{n\geqslant 0}\ln(y_{n+1})-\ln(y_n)$ diverge et

$$\ln(y_n)-\ln(y_1)=\sum_{k=1}^{n-1}\ln(y_{k+1})-\ln(y_k)\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n-1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n$$

(car $\ln(n-1)=\underbrace{\ln n}_{\to+\infty}+\underbrace{\ln(1-\frac{1}{n})}_{\to 0}$). Puisque $y_n\to+\infty$, $\ln(y_n)-\ln(y_1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(y_n)$ et on a donc $\ln(y_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$. On a envie de passer à l'exponentielle pour dire que y_n est équivalente à n mais on ne peut pas en général (méditer sur $\ln(n)+\ln 2\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$ mais $\exp(\ln(n)+\ln 2)=2n\underset{n\to+\infty}{\not\sim}n$). Nous approchons de la solution mais il faut à nouveau affiner et plus spécialement, reprenons le DL (7)

$$\ln(y_{n+1})=\ln(y_n)+\ln(1+\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))=\ln(y_n)+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

La suite $\ln(y_{n+1})-\ln(y_n)-\frac{1}{n}$ est équivalente à la suite $-\frac{1}{2n^2}$ qui est de signe constante et est une série convergente donc la série $\sum_{n\geqslant 1}(\ln(y_{n+1})-\ln(y_n)-\frac{1}{n})$ est convergente. Ainsi la suite $(\sum_{k=1}^{n}(\ln(y_{k+1})-\ln(y_k)-\frac{1}{k}))_{n\geqslant 1}$ converge et

$$\sum_{k=1}^{n-1}(\ln(y_{k+1})-\ln(y_k)-\frac{1}{k})=\sum_{k=1}^{n-1}(\ln(y_{k+1})-\ln(y_k))-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln y_n-\ln y_1-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

On utilise le résultat classique sur la série harmonique. Il est un réel γ (la constante d'Euler) telle que

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1).$$

Par conséquent, la suite $(\ln y_n-\ln y_1-\ln n-\gamma)$ converge vers un réel K. En passant à l'exponentielle, la suite $\exp(\ln y_n-\ln y_1-\ln n-\gamma)=\frac{y_n}{y_1 n}e^{-\gamma}$ converge vers e^K donc $y_n\underset{n\to+\infty}{\sim}y_1e^{K-\gamma}n$ ce qui signifie qu'il existe un réel $C>0$ tel que

$$y_n\underset{n\to+\infty}{\sim}Cn\Leftrightarrow y_n=Cn+o(n)\Leftrightarrow x_n=2pn^2+Cn+o(n).$$

La morale de l'histoire : la détermination de l'équivalent d'une suite est en général aisée, par contre la détermination des termes suivants est en général difficile ; et, plus on poursuit dans la précision, plus les difficultés techniques jaillissent.
En mécanique quantique, la détermination des termes successifs d'un développement asymptotique est un problème majeur et ardu. Par exemple, les développements asymptotiques des valeurs propres d'endomorphismes est un problème sur lequel travaille un nombre impressionnant de mathématiciens et de physiciens. Ces développements permettent d'obtenir des informations extrémement intéressantes sur la structure de la matière : nombre maximum de nucléons formant un atome stable (dans la nature, ce nombre ne semble pas excéder 120 et toute la question est de savoir si l'on peut produire des atomes "super-lourds"), théorie de renormalisation de Feynamm qui consiste à expurger les termes divergentes des développements asymptotiques de certaines suites et à considérer que les termes convergeants sont les seuls à avoir une interprétation physique (chromodynamique : les gluons, etc), étude de la répartition des nombres premiers, etc.

Correction de l'exercice 2.1.9 : *Résultat fondamental du cours : si A et B commutent, alors tout sous-espace F stable par A est stable par B.*

Notons $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et considérons une matrice B commutant avec A. On introduit également u (resp. v) l'endomorphisme associé à A (resp. B) dans la base canonique $\mathfrak{B}$.

Pour commencer, nous allons mener la réduction de A afin de simplifier le problème. Le polynôme caractéristique de A est $X^3 - 2X - 1 = (X+1)\left(X^2 - X - 1\right)$, le second facteur étant irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et premier avec le facteur $(X+1)$. Le lemme des noyaux nous fournit la décomposition suivante de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \ker(A + \mathrm{Id}) \oplus \ker(A^2 - A - \mathrm{Id}).$$

Sans calcul, on constate que $\ker(A + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(e_1)$ et

$$\ker(A^2 - A - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(2e_1 - e_2, e_2 + e_3).$$

Soit u l'endomorphisme associé à A dans la base canonique $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et P la matrice de changement de base de la base canonique $\mathfrak{B}$ dans la base $\mathfrak{B}' = (e_1, 2e_1 - e_2, e_2 + e_3)$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice de v dans la base $\mathfrak{B}'$ est $B' = P^{-1}AP$. Dire que A et B commmutent est équivalent à dire que A' et B' commutent. Les espaces $\ker(A + \mathrm{Id})$ et $\ker(A^2 - A - \mathrm{Id})$ sont stables par A' donc par B' ce qui implique que B' est de la forme $B' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$. En explicitant l'égalité $A'B' = B'A'$, nous aboutissons au système :

$$\begin{cases} c + d = 0 \\ -b - 3c + e = 0 \\ -b + 3d + e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -d \\ b = 3d + e \end{cases}.$$

Par conséquent B' commute avec A' si et seulement si $B' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 3d+e & -d \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$ avec a, d, e trois réels quelconques. Puisque $B = PB'P^{-1}$, on en déduit que l'ensemble des matrices B qui commutent avec A est l'ensemble des matrices de la forme

$$B = \begin{pmatrix} a & 2a - 6d - 2e & -2a + 4d + 2e \\ 0 & 2d + e & -d \\ 0 & -d & d + e \end{pmatrix} \text{ avec } a, d, e \in \mathbb{R}.$$

8.2 Analyse

Correction de l'exercice 2.2.1 :

1. La fonction φ est continue sur $[0,1]$ donc elle est bornée ; on pose $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |\varphi(x)|$. Soit $x \in \mathbb{R}$, la majoration

$$\forall n \geqslant 0, \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!] \left| \frac{x}{n} \varphi(\frac{k}{n}) \right| \leqslant \frac{|x|}{n} \|\varphi\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\to} 0. \tag{8}$$

Il existe donc un rang n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \left|\frac{x}{n}\varphi(\frac{k}{n})\right| < 1 \text{ et par conséquent } 1 + \left|\frac{x}{n}\varphi(\frac{k}{n})\right| > 0.$$

Nous pouvons dès lors prendre le logarithme de f_n, ce qui nous donne

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \ln f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + \frac{x}{n}\varphi(\frac{k}{n})).$$

Cela ressemble fortement à une somme de Riemann mais les termes ln(1+ sont en trop ! Nous disposons en 0 du DL suivant :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -2.$$

En particulier, la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ est bornée au voisinage de 0 donc il il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que

$$\forall x \in [-\alpha, \alpha]\backslash\{0\}, \quad \left|\frac{\ln(1+x) - x}{x^2}\right| \leqslant C \Rightarrow \forall x \in [-\alpha, \alpha], \quad |\ln(1+x) - x| \leqslant Cx^2.$$

Par le même raisonnement qu'au début de l'exercice, il existe un rang n_1 tel que

$$\forall n \geqslant n_1, \quad \forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \frac{x}{n}\varphi(\frac{k}{n}) \in [-\alpha, \alpha]. \tag{9}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall n \ \geqslant \ n_1, \quad \left|\ln f_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{n}\varphi(\frac{k}{n})\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln(1 + \frac{x}{n}\varphi(\frac{k}{n})) - \frac{x}{n}\varphi(\frac{k}{n})\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|\ln(1 + \frac{x}{n}\varphi(\frac{k}{n})) - \frac{x}{n}\varphi(\frac{k}{n})\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^2}{n^2}(\varphi(\frac{k}{n}))^2 \leqslant \|\varphi\|_\infty^2 x^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2} = \frac{\|\varphi\|_\infty^2 x^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \end{aligned} \tag{10}$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln f_n(x) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{x}{n}\varphi(\frac{k}{n})) = 0$. Or la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \varphi(\frac{k}{n})$ est la somme de Riemann de la fonction φ qui est continue sur $[0,1]$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \varphi(\frac{k}{n}) = \int\limits_0^1 \varphi(t)dt$. Il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln f_n(x) = x\int_0^1 \varphi(t)dt \text{ et } \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \exp(x\int_0^1 \varphi(t)dt.$$

2.

Etude de la convergence uniforme sur un compact Soit K un compact donné de $\mathbb{R}$. Il existe $a > 0$ tel que K soit contenu dans le segment $[-a, a]$. Les majorations (8), (9) et (10) restent valables si $x \in [-a, a]$ en remplaçant dans les majorants x par a. On en déduit en particulier la majoration

$$\forall n \geqslant n_1, \quad \forall x \in [-a, a], \quad \left|\ln f_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{n}\varphi(\frac{k}{n})\right| \leqslant \frac{\|\varphi\|_\infty^2 a^2}{n}$$

ainsi que la majoration

$$\begin{aligned} \forall n \ &\geqslant \ n_1, \quad \forall x \in [-a, a], \\ \left|\ln f_n(x) - x\int_0^1 \varphi(t)dt\right| &\leqslant \left|\ln f_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{n}\varphi(\frac{k}{n})\right| + \left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{n}\varphi(\frac{k}{n}) - x\int_0^1 \varphi(t)dt\right| \\ &\leqslant \frac{\|\varphi\|_\infty^2 a^2}{n} + |a|\left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{k}{n}) - \int_0^1 \varphi(t)dt\right| \end{aligned}$$

qui démontre que la suite $\ln f_n$ converge uniformément sur $[-a,a]$. Pour obtenir la convergence uniforme de f_n, nous allons utiliser la majoration suivante qui résulte de l'inégalité des accroissements finis

$$\forall(\alpha,\beta)\in[-K,K],\quad |\exp\alpha-\exp\beta|\leqslant|\alpha-\beta|\exp(K). \tag{11}$$

De façon évidente, la fonction $x\mapsto x\int_0^1\varphi(t)dt$ est bornée par une constante C_1 sur $[-a,a]$ et la suite $(\frac{\|\varphi\|_\infty^2\,a^2}{n}+|a|\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\varphi(\frac{k}{n})-\int_0^1\varphi(t)dt\right|)_{n\geqslant n_1}$ est bornée par une constante C_2. L'inégalité triangulaire

$$\forall n\geqslant n_1,\quad \forall x\in[-a,a],\quad |\ln f_n(x)|\leqslant\left|\ln f_n(x)-x\int_0^1\varphi(t)dt\right|+\left|x\int_0^1\varphi(t)dt\right|$$

montre que $\ln f_n(x)$ est bornée par C_1+C_2 quel que soit $x\in[-a,a]$ et quel que soit $n\geqslant n_1$. Nous sommes en droit d'appliquer l'inégalité (11) avec $K=C_1+C_2$, $\alpha=\ln f_n(x)$ et $\beta=x\int_0^1\varphi(t)dt$, ce qui nous donne

$$\forall n\geqslant n_1,\quad \forall x\in[-a,a],\quad \left|f_n(x)-\exp(x\int_0^1\varphi(t)dt)\right|=\left|\exp\ln f_n(x)-\exp(x\int_0^1\varphi(t)dt)\right|$$

$$\leqslant\left|\ln f_n(x)-x\int_0^1\varphi(t)dt\right|\exp(C_1+C_2)\leqslant\left(\frac{\|\varphi\|_\infty^2\,a^2}{n}+|a|\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\varphi(\frac{k}{n})-\int_0^1\varphi(t)dt\right|\right)\exp(C_1+C_2)$$

La suite $\left(\frac{\|\varphi\|_\infty^2\,a^2}{n}+|a|\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\varphi(\frac{k}{n})-\int_0^1\varphi(t)dt\right|\right)\exp(C_1+C_2)$ est indépendante de x et tend vers 0 donc la suite (f_n) converge uniformément sur $[-a,a]$ vers la fonction $x\mapsto\exp(x\int_0^1\varphi(t)dt)$.

Etude de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ Considérons $\varphi=1$ alors $f_n(x)=\prod_{k=0}^{n-1}(1+\frac{x}{n})=(1+\frac{x}{n})^n$ et supposons que la suite $f_n(x)$ converge uniformément vers $\mathbb{R}$. Nécessairement, la suite $(f_{n+1}-f_n)$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ ce qui signifie

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N}\text{ tel que }\forall n\geqslant n_0,\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad |f_{n+1}(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon.$$

En particulier, pour $\varepsilon=1$, la fonction $x\mapsto f_{n+1}(x)-f_n(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Or f_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ et f_n est un polynôme de degré n donc $f_{n+1}-f_n$ est un polynôme de degré $n+1$ qui est borné, ce qui est absurde. Donc la suite (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ mais seulement sur tous les compacts de $\mathbb{R}$.

Remarque : nous venons de prouver en particulier, que la suite de fonctions $((1+\frac{x}{n})^n)_{n\geqslant1}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers $x\mapsto\exp(x\int_0^1dt)=\exp x$ mais que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.
Nous venons également de montrer qu'une suite de polynômes échelonnés en degré ne peut converger uniformément sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2.2.2 : On commence par remarquer que :

$$x^{-x}\underset{\text{par déf}}{=}\exp(-x\ln x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x\ln x)^n}{n!}.$$

La fonction $x \mapsto x^{-x}$ est continue sur $]0,1]$ et tend vers 1 en 0 ($\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$) donc on peut la prolonger par continuité en 0 ce qui implique qu'elle est intégrable sur $[0,1]$. Le même raisonnement s'applique à la fonction $(-x\ln x)^n$.
Le tableau suivant nous fournit les variations de la fonction $x \mapsto f(x) = -x\ln x$ sur l'intervalle $]0,1]$.

x	0		$1/e$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

On en déduit que $\int\limits_0^1 \left|\dfrac{(-x\ln x)^n}{n!}\right| dx \leqslant \int\limits_0^1 \dfrac{e^{-n}}{n!}dx = \dfrac{e^{-n}}{n!}$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int\limits_0^1 \left|\dfrac{(-x\ln x)^n}{n!}\right| dx$ est convergente et le théorème de Lebesgue nous démontre que

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{(-x\ln x)^n}{n!}dx.$$

Nous allons calculer ses intégrales à l'aide d'intégrations par parties successives en intégrant les puissances de x et en dérivant les puissances de $\ln x$ (pour être rigoureux, on intégre de ε à 1, on effectue les IPP puis on fait tendre ε vers 0, je laisse le soin au lecteur de le faire).

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (-x\ln x)^n dx &= \int_0^1 x^n(-\ln x)^n dx = [\frac{x^{n+1}}{n+1}(-\ln x)^n]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}(-n\frac{1}{x}(\ln x)^{n-1})dx \\
&= \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^{n-1})dx = \frac{n}{n+1}\left[[\frac{x^{n+1}}{n+1}(-\ln x)^{n-1}]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}(-(n-1)\frac{1}{x}(\ln x)^{n-2})dx\right] \\
&= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\int_0^1 x^n(\ln x)^{n-2}dx = \cdots = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+1)^k}\int_0^1 x^n(\ln x)^{n-k}dx = \cdots \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{(n+1)^n}\int_0^1 x^n(\ln x)^{n-n}dx = \frac{n!}{(n+1)^n}\int_0^1 x^n dx = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\int\limits_0^1 \dfrac{(-x\ln x)^n}{n!}dx = \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}$ ce qui nous donne

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{(-x\ln x)^n}{n!}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}.$$

Correction de l'exercice 2.2.3 : Le terme u_n nous fait penser à juste titre à une somme de Riemann

$$u_n = \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(n+p)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(1+\frac{p}{n})^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(1+\frac{p}{n})^\alpha}\right)$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^\alpha}$ est continue sur $[0,1]$ donc le théorème sur les sommes de Riemann montre que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(1+\frac{p}{n})^\alpha}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^\alpha} = C(\alpha) > 0.$$

(Nous n'explicitons pas $C(\alpha)$ car, dans la suite, nous n'exploiterons que le fait qu'elle soit non nulle). En remarquant que

$$\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(1+\frac{p}{n})^{\alpha}}=\underbrace{\frac{1}{2^{\alpha}n}}_{\to 0}+\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(1+\frac{p}{n})^{\alpha}},$$

on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n}\frac{1}{(1+\frac{p}{n})^{\alpha}}\right)=C(\alpha)$, ce qui nous fournit l'équivalent

$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{C(\alpha)}{n^{\alpha-1}}.$$

La suite (u_n) est équivalente à une suite positive qui est une série de Riemann d'indice $\alpha-1$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ converge si et seulement si $\alpha-1>1$ c'est-à-dire $\alpha>2$.

Correction de l'exercice 2.2.4 :

Domaine de définition La fonction f n'est manifestement pas définie si $x+n=0$ pour un certain entier n c'est-à-dire si $n\in\mathbb{Z}_-$. Si $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{x+n}$ est alternée, le terme $\frac{1}{x+n}$ est positif pour n assez grand, décroissant et converge vers 0 donc la série converge et $f(x)$ est bien définie. Par conséquent, $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-$

Mode de convergence Etude sur $]0,+\infty[$ avec $a>0$.

Dans ce cas, $x+n\geqslant 0$ pour tout entier $n\geqslant 0$. Le théorème spécial des séries alternées montre que

$$\forall x\in]0,+\infty[_-,\quad\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}\right|\leqslant\frac{1}{x+n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}\to 0$$

donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{x+n}$ est uniformément convergente sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Etude sur $]-N-1,-N[$ où $N\in\mathbb{N}$.

Pour $n\geqslant N+2$, $x+n\geqslant -N-1+N+2\geqslant 1>0$. Nous pouvons appliquer le théorème spécial à la série $\sum\limits_{n\geqslant N+2}\frac{(-1)^n}{x+n}$

$$\forall x\in]0,+\infty[_-,\quad\forall n\geqslant N+2,\quad\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}\right|\leqslant\frac{1}{x+n+1}\leqslant\frac{1}{-N-1+n+1}=\frac{1}{n-N}\to 0$$

donc la série $\sum\limits_{n\geqslant N+2}\frac{(-1)^n}{x+n}$ est uniformément convergente sur l'intervalle $]-N-1,-N[$ ce qui implique que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{x+n}$ est uniformément convergente sur l'intervalle $]-N-1,-N[$ (on a rajouté un nombre fixé de termes à la somme).

La convergence uniforme sur un nombre fini d'intervalles impliquant la convergence uniforme sur la réunion de ces intervalle, on a donc montrer que la série converge uniformément sur tout ensemble de la forme $[a,+\infty[\backslash\mathbb{Z}_-$ avec $a\in\mathbb{R}$.

Etude de la convergence sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-$.

Supposons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-$ alors le terme $\frac{(-1)^n}{x+n}$ converge vers 0 uniformément sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-$ ce qui signifie que

$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists n_0\in\mathbb{N}\text{ tel que }\forall n\geqslant n_0,\quad\forall x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-,\quad\left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right|\leqslant\varepsilon\Leftrightarrow|x+n|\geqslant\frac{1}{\varepsilon}.$$

En fixant $\varepsilon = 1$, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-, |x+n_0| \geqslant 1$ or pour $x = -n_0 + \dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-$, on a $|x+n_0| = \dfrac{1}{2} < 1$ ce qui nous fournit une contradiction.

Conclusion : la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-$ mais sur tout ensemble de la forme $[a,+\infty[\backslash\mathbb{Z}_-$.

Limite en $+\infty$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n} = \sum\limits_{n\geqslant 0} 0$ converge donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = 0$$

Equivalent de f en 0 On voit que le seul terme singulier de la série est le terme $n=0$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur $[-\dfrac{1}{2},+\infty[$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(-1)^n}{x+n} = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge donc

$$\lim_{x\to 0}(f(x) - \frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to 0} \frac{(-1)^n}{x+n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

Nous venons donc de prouver que $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) - \dfrac{1}{x}) = -\ln 2$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$. Nous avons même obtenu les deux premiers termes du développement asymptotique de f

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} - \ln 2 + o(1).$$

Correction de l'exercice 2.2.5 :

1. On serait bien tenté d'utiliser le développement en série entière de $\dfrac{1}{1+x^2}$ puis de permuter les symboles série et intégrale. Malheureusement, nous devrions montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int\limits_0^1 \left|(-1)^k x^{t+2kk}\right| dt$ converge, ce qui n'est pas le cas, car $\int\limits_0^1 \left|(-1)^k x^{t+2k}\right| dt = \int\limits_0^1 x^{t+2k} dt = \dfrac{1}{2k+1+t} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2k}$ qui est divergente.
Nous devons faire autrement. On va revenir à la méthode qui a permis de démontrer le développement en série entière de $\dfrac{1}{1+x^2}$. Pour cela, nous remercions chaleureusement notre cher Gauss pour avoir découvert si jeune cette belle formule, c'est-à-dire la formule :

$$\sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-x)^{2n+2}}{1+x^2}$$

qui nous fournit l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-x^2)^k x^t dx = \int_0^1 \frac{x^t}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{(-x)^{2n+2} x^t}{1+x^2} dx.$$

Nous majorons alors la seconde intégrale

$$\forall t \geqslant 0, \quad \forall n \geqslant 0, \quad \left| \int_0^1 \frac{(-x)^{2n+2} x^t}{1+x^2} dx \right| \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n+2} x^t}{1+x^2} dx \leqslant \int_0^1 x^{2n+2+t} dx = \frac{1}{2n+3+t} \leqslant \frac{1}{2n+3} \to 0.$$

Nous venons donc de montrer que la suite de fonctions $t\mapsto\int\limits_0^1\dfrac{(-x)^{2n+2}x^t}{1+x^2}dx$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$. Par suite, la suite de fonctions $(t\mapsto\sum\limits_{k=0}^{n}\int\limits_0^1(-x^2)^kx^tdx)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $t\mapsto\int\limits_0^1\dfrac{x^t}{1+x^2}dx$, c'est-à-dire la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int\limits_0^1(-x^2)^kx^tdx$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers $t\mapsto\int\limits_0^1\dfrac{x^t}{1+x^2}dt$. En particulier, nous disposons de l'égalité :

$$\forall t\geqslant 0,\quad\int_0^1\frac{x^t}{1+x^2}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-x^2)^nx^tdx=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1x^{2n+t}dx=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1+t}.$$

La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{2n+1+t}$ convergeant uniformément sur $\mathbb{R}_+$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(-1)^n}{2n+1+t}=\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ étant convergente, on en déduit que

$$\lim_{t\to 0^+}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1+t}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{t\to 0}\int_0^1\frac{x^t}{1+x^2}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\int_0^1\frac{x^0}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

2.

$$\begin{aligned}\forall t\ &\geqslant\ 0,\quad\int_0^1\frac{x^t}{1+x^2}dx-\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1+t}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1+t}-\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)\\&=\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-(-1)^nt}{(2n+1+t)(2n+1)}=-t\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1+t)(2n+1)}.\end{aligned}$$

Quel que soit $t\geqslant 0$ et quel que soit $n\in\mathbb{N}$, le terme $\dfrac{(-1)^n}{(2n+1+t)(2n+1)}$ est majoré en valeur absolue par $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ qui est une série absolument convergente donc la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{(2n+1+t)(2n+1)}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1+t)(2n+1)}=\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ converge donc

$$\lim_{t\to 0^+}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1+t)(2n+1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{t\to 0^+}\frac{(-1)^n}{(2n+1+t)(2n+1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

On en déduit que l'équivalent recherché

$$\int_0^1\frac{x^t}{1+x^2}dx-\frac{\pi}{4}\underset{t\to 0^+}{\sim}-\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\right)t.$$

Remarque : cet équivalent peut également s'écrire

$$\int_0^1\frac{x^t}{1+x^2}dx\underset{t\to 0^+}{=}\frac{\pi}{4}-\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\right)t+o(t).$$

On en déduit, en particulier, que la fonction $t\mapsto\int\limits_0^1\frac{x^t}{1+x^2}dx$ *est dérivable en* 0 *et sa dérivée est* $-\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\right)$. *Je laisse le soin au lecteur de montrer, par les théorèmes de dérivation des intégrales à paramètre, que la fonction* $t\mapsto\int\limits_0^1\frac{x^t}{1+x^2}dx$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *et que sa dérivée est* $t\mapsto\int\limits_0^1\frac{(\ln x)x^t}{1+x^2}dx$ *(*$x^t=\exp(t\ln(x))$*. On en déduit, en particulier, que* $\int\limits_0^1\frac{(\ln x)}{1+x^2}dx=-\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\right)$.

Correction de l'exercice 2.2.6 : Etant donné que l'on ne sait pas faire grand chose avec les produits mais que l'on dispose d'un bel arsenal pour les sommes, on se propose de passer immédiatement au logarithme. Posons $u_n=(2^2 3^3..n^n)^{4/n^2}$ alors

$$\ln u_n=\frac{4}{n^2}\sum_{k=2}^{n}k\ln k.$$

Tiens, tiens, on obtient une somme du type $\sum\limits_{k1}^{n}f(k)$ où $f(x)=x\ln x$ est une fonction monotone sur $[1,+\infty[$ (je laisse le soin au lecteur de le vérifier par la méthode qu'il souhaite), la comparaison série-intégrale s'impose.

$$\forall k\in\mathbb{N}^\times,\quad\forall x\in[\![k,k+1]\!],\quad k\ln k\leqslant x\ln x\leqslant(k+1)\ln(k+1)$$

$$\Rightarrow\forall k\in\mathbb{N}^\times,\quad\forall x\in[\![k,k+1]\!],\quad k\ln k\leqslant\int_k^{k+1}x\ln x\leqslant(k+1)\ln(k+1)$$

Nous sommons alors sur $k\in[\![2,n]\!]$, ce qui nous donne

$$\forall n\geqslant 2,\quad\sum_{k=2}^{n}k\ln k\leqslant\int_2^{n+1}x\ln x dx\leqslant\sum_{k=2}^{n}(k+1)\ln(k+1)=\sum_{k=3}^{n+1}k\ln k=\sum_{k=2}^{n}k\ln k-2\ln 2+(n+1)\ln(n+1)$$

ce que l'on peut réécrire

$$\forall n\geqslant 2,\quad\sum_{k=2}^{n}k\ln k\leqslant\int_2^{n+1}x\ln x dx\text{ et }2\ln 2-(n+1)\ln(n+1)\int_2^{n+1}x\ln x dx\leqslant\sum_{k=2}^{n}k\ln k$$

donc

$$\forall n\geqslant 2,\quad 2\ln 2-(n+1)\ln(n+1)+\int_2^{n+1}x\ln x dx\leqslant\sum_{k=2}^{n}k\ln k\leqslant\int_2^{n+1}x\ln x dx.\tag{12}$$

Nous calculons l'intégrale inciminée à l'aide d'une intégration par parties

$$\int_2^{n+1}x\ln x dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_{x=2}^{x=n+1}-\int_2^{n+1}\frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx=\frac{(n+1)^2\ln(n+1)}{2}-2\ln 2-(\frac{(n+1)^2}{4}-1).$$

Nous obtenons ainsi que le membre de gauche et le membre de droite de l'encadrement (12) sont équivalents à $\frac{(n+1)^2\ln(n+1)}{2}$. En divisant chaque membre de l'encadrement par $\frac{(n+1)^2\ln(n+1)}{2}$, on constate que les membre de gauche et de droite de ce nouvel encadrement tendent vers 1 (par définition de l'équivalence) donc $\dfrac{\sum\limits_{k=2}^{n}k\ln k}{\frac{(n+1)^2\ln(n+1)}{2}}$ tend vers 1 par le théorème d'encadrement. On en déduit que

$$\sum_{k=2}^{n}k\ln k\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{(n+1)^2\ln(n+1)}{2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^2\ln(n+1)}{2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^2\ln n}{2}$$

(car $\ln(n+1)=\ln n+\underbrace{\ln(1+\frac{1}{n})}_{\to 0}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n$). Par conséquent,

$$\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}.\frac{n^2\ln n}{2}=2\ln n.$$

Nous avons déjà vu dans l'exercice 2.1.8 que l'on peut prendre l'exponentielle d'un équivalent (un autre exemple, $\ln(2n)=\ln n+\ln 2\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n$ mais $2n\underset{n\to+\infty}{\not\sim} n$). Nous devons affiner et pour cela obtenir un developpement asymptotique de $\ln u_n$ avec un terme en $o(1)$ (pour avoir un reste convergeant vers 0 donc son exponentielle tendra vers 1, ce qui nous permettra d'obtenir un équivalent du terme exponentié). Autrement dit, il nous faut un développement asymptotique de $\sum_{k=2}^{n} k\ln k$ de la forme $a_n+o(n^2)$. Pour cela, nous allons étudier la suite

$$v_n=\sum_{k=2}^{n} k\ln k-\frac{n^2\ln n}{2}$$

et, plus précisément, nous allons étudier la nature de la série de terme général $v_{n+1}-v_n$ afin d'exploiter toutes les ressources des sommes partielles (resp. restes partielles) de séries divergentes (resp. convergentes).

$$\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n &= (n+1)\ln(n+1)-\frac{(n+1)^2\ln(n+1)}{2}+\frac{n^2\ln n}{2}\\
&= (n+1)\left(\ln n+\ln(1+\frac{1}{n})\right)-\frac{1}{2}(n+1)^2\left(\ln n+\ln(1+\frac{1}{n})\right)+\frac{n^2\ln n}{2}\\
&= (n+1)\left(\ln n+\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))\right)-\frac{1}{2}(n+1)^2\left(\ln n+\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))\right)+\frac{n^2\ln n}{2}
\end{aligned}$$

On développe le tout en priant pour obtenir des simplifications substantielles (vu que tous les termes sont explicites, nous n'avons pas besoin de prier, ce qui ne fut pas le cas dans l'exercice 2.1.8)

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2}\ln n-\frac{1}{2}n+o(n)=-\frac{1}{2}n+o(n).$$

La suite $v_{n+1}-v_n$ est donc équivalente à la suite de signe constant $-\frac{1}{2}n$ dont la série associée est clairement divergente, ce qui implique que la série $\sum_{n\geqslant 1}(v_{n+1}-v_n)$ diverge c'est-à-dire que la suite (v_n) diverge. Le théorème de sommation des séries divergentes nous fournit l'équivalent suivant

$$v_n-v_1=\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1}-v_k)\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=1}^{n-1}-\frac{1}{2}k=-\frac{n(n-1)}{4}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{n^2}{4}.$$

La suite v_n tendant vers $-\infty$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{n^2}{4} &\Leftrightarrow v_n\underset{n\to+\infty}{=}-\frac{n^2}{4}+o(n^2)\Leftrightarrow\sum_{k=2}^{n}k\ln k=\frac{n^2\ln n}{2}-\frac{n^2}{4}+o(n^2)\\
&\Rightarrow \ln u_n=2\ln n-1+o(1)\Rightarrow u_n=\exp(2\ln n-1+o(1))=\frac{n^2}{e}\underbrace{\exp(o(1))}_{\to 1}
\end{aligned}$$

ce qui nous démontre que u_n est équivalente à $\frac{n^2}{e}$.

Correction de l'exercice 2.2.7 :

1. Une suite qui tend vers 0 est bornée donc $\sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$ existe bien. Chaq
ue terme u_n étant borné par $\sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$, on en déduit que $\|u\|_\infty$ alors $u_n=0$ pour tous les entiers n.
L'égalité $\|\lambda u\|_\infty=|\lambda|\,\|u\|_\infty$ est classique et je vous renvois sur votre cours de première année sur les bornes supérieures.
Si u et v sont dans E, alors pour tout entier n, $\quad|u_n+v_n|\leqslant|u_n|+|v_n|\leqslant\|u\|_\infty+\|v\|_\infty$. Nous venons de majorer en module tous les terme de la suite par une constante indépendante de n (on revoit la définition d'une borne sup) donc $\sup_{n\geqslant0}|u_n+v_n|\leqslant\|u\|_\infty+\|v\|_\infty$ ce qui signifie $\|u+v\|_\infty\leqslant\|u\|_\infty+\|v\|_\infty$.

2. L'application f est bien définie : $\forall n\geqslant1,\quad\left|\dfrac{u_n}{2^n}\right|\leqslant\dfrac{\|u\|_\infty}{2^n}$ et $\sum_{n\geqslant1}\dfrac{1}{2^n}$ est convergente ce qui implique que la série $\sum_{n\geqslant1}\dfrac{u_n}{2^n}$ est absolument convergente donc convergente. L'application f est clairement linéaire et est à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc il s'agit d'une forme linéaire. La majoration
$$\forall u\in E,\quad|f(u)|=\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{2^n}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{u_n}{2^n}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\|u\|_\infty}{2^n}=\|u\|_\infty\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\|u\|_\infty$$
montre que f est continue sur E et de norme moindre que 1. Nous savons que $\|f\|=\sup_{\|u\|_\infty=1}|f(u)|$D'autre, part, si u désigne la suite appartenant à E telle que $u_k=1$ si $k\leqslant N$ et $u_k=0$ si $k\geqslant N+1$, alors
$$\|u\|_\infty=1\text{ et }|f(u)|=\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}\right|=\frac{1}{2}.\frac{1-(\frac{1}{2})^N}{1-\frac{1}{2}}=1-(\frac{1}{2})^N.$$
Par définition de $\|f\|$, on avons la minoration $\|f\|\geqslant1-(\frac{1}{2})^N$ valable pour entier $N\geqslant1$ et, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient que $\|f\|\geqslant1$ donc $\|f\|=1$.

3. Supposons qu'il existe $u\in E$ tel que $\|u\|_\infty\leqslant1$ et $|f(u)|=1$. Si $f(u)=-1$ alors $f(-u)=1$ et $\|-u\|_\infty=\|u\|_\infty\leqslant1$. On peut donc supposer que $\|u\|_\infty\leqslant1$, c'est-à-dire que $\forall n\geqslant0,\quad u_n\in[-1,1]$, et $f(u)=1$. Supposons qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $u_N<1$ alors
$$f(u)=\frac{u_N}{2^N}+\sum_{n\neq N}\frac{u_n}{2^n}\leqslant\frac{u_N}{2^N}+\sum_{n\neq N}\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^N}+\sum_{n\neq N}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=1,$$
ce qui nous fournit une contradiction. Par conséquent, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant1$ donc $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=1$ ce qui implique que $\lim_n u_n=1$ et $u\notin E$. Conclusion, il n'existe pas $u\in E$ tel que $\|u\|_\infty\leqslant1$ et $|f(u)|=1$
Si $\overline{B}$ est compacte, l'application $|f|$ est continue sur le compact $\overline{B}$ donc elle atteint ses bornes donc il existe $u\in\overline{B}$ tel que $|f(u)|=\sup_{\|u\|_\infty\leqslant1}|f(u)|=\|f\|$ ce qui est impossible et $\overline{B}$ n'est donc pas compacte.

Correction de l'exercice 2.2.8 : On commence par remarquer que
$$\int_0^x f(t)\cos(x-t)dt=\int_0^x f(t)(\cos x\cos t+\sin x\sin t)dt=\cos x\int_0^x f(t)\cos tdt+\sin x\int_0^x f(t)\sin tdt$$
et notre équation est donc
$$\forall x\quad\in\quad\mathbb{R}\quad f(x)-2x(\cos x\int_0^x f(t)\cos tdt+\sin x\int_0^x f(t)\sin tdt)=1$$
$$\Leftrightarrow\quad\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=2x(\cos x\int_0^x f(t)\cos tdt+\sin x\int_0^x f(t)\sin tdt)+1\qquad(13)$$

Les fonctions $t \mapsto f(t)\cos t$ et $t \mapsto f(t)\sin t$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc les fonctions $x \mapsto \int\limits_0^x f(t)\cos t dt$ et $x \mapsto \int\limits_0^x f(t)\sin t dt$ sont C^1 sur $\mathbb{R}$ (cf. le cours de calcul intégrale, il s'agit en fait des primitives s'annulant en 0 des fonctions sus-citées) et leurs dérivées sont $f(x)\cos x$ et $f(x)\sin x$. Le membre de droite de l'égalité (13) est donc C^1 sur $\mathbb{R}$ donc le membre de gauche, qui est f, est C^1 sur $\mathbb{R}$. Puisque f est C^1, le même type de raisonnement montre que f est C^2 sur $\mathbb{R}$ (la primitive d'une fonction C^k est C^{k+1}).
Intermède : En évaluant en $x = 0$ cette égalité, on obtient que

$$f(0) = 1. \tag{14}$$

Nous sommes en droit de dériver l'égalité (13), ce qui nous donne l'équation différentielle

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\left(\cos x \int\limits_0^x f(t)\cos t dt + \sin x \int\limits_0^x f(t)\sin t dt\right) + 2x\left(-\sin x \int\limits_0^x f(t)\cos t dt + \cos x \int\limits_0^x f(t)\sin t dt + f(x)(\right. \\ &= 2\left(\cos x \int\limits_0^x f(t)\cos t dt + \sin x \int\limits_0^x f(t)\sin t dt\right) + 2x\left(-\sin x \int\limits_0^x f(t)\cos t dt + \cos x \int\limits_0^x f(t)\sin t dt + f(x)\right. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\frac{f(x)-1}{x} = 2\left(\cos x \int\limits_0^x f(t)\cos t dt + \sin x \int\limits_0^x f(t)\sin t dt\right). \tag{16}$$

Intermède : le membre de gauche est égal à $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (cf. (14) qui est le taux d'accroissement de f en 0 donc il tend vers $f'(0)$ lorsque $x \to 0$ (on sait que f est C^2 sur R), le membre de gauche tend vers 0 donc

$$f'(0) = 0 \tag{17}$$

La combinaison des égalités (15) et (16) nous donne la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{f(x)-1}{x} + 2xf(x) + 2x\left(-\sin x \int\limits_0^x f(t)\cos t dt + \cos x \int\limits_0^x f(t)\sin t dt\right). \tag{18}$$

Pour évaluer la dérivée seconde de f, nous sommes amené à dériver le dernier terme de l'égalité

$$\left(2x(-\sin x \int\limits_0^x f(t)\cos t dt + \cos x \int\limits_0^x f(t)\sin t dt)\right)' = \underbrace{2(-\sin x \int\limits_0^x f(t)\cos t dt + \cos x \int\limits_0^x f(t)\sin t dt)}_{\text{il apparait dans le membre de droite de 18}}$$

$$+2x(\underbrace{-\cos x \int\limits_0^x f(t)\cos t dt - \sin x \int\limits_0^x f(t)\sin t dt}_{\text{il apparait dans le membre de droite de 13}} - f(x)\cos x \sin x + f(x)\sin x \cos x)$$

$$= (f'(x) - \frac{f(x)-1}{x} - 2xf(x))\frac{1}{x} + 1 - f(x)$$

Par conséquent, nous obtenons

$$f"(x) = \left[\frac{f(x)-1}{x} + 2xf(x)\right]' + (f'(x) - \frac{f(x)-1}{x} - 2xf(x))\frac{1}{x} + 1 - f(x).$$

Au premier abord, on est effrayé par l'équation différentielle, mais si on simplifie, on obtient

$$\begin{aligned} f"(x) &= \frac{xf'(x)-f(x)+1}{x^2}+2f(x)+2xf'(x)+\frac{f'(x)}{x}-\frac{f(x)-1}{x^2}-2f(x)+1-f(x) \\ &\Leftrightarrow \quad x^2f"(x)-2x(1+x^2)f'(x)+(2+x^2)f(x)=2+x^2. \end{aligned} \tag{19}$$

On vient donc de montrer que f satisfait à l'équation différentielle (19) sur $\mathbb{R}^\times$ (on a effectué des divisions par x pour y aboutir) et comme f est C^2 sur $\mathbb{R}$, on constate que, par passage à la limite, que l'équation différentielle est satisfaite sur $\mathbb{R}$.
D'un côté, on est heureux d'avoir une équation différentielle, de l'autre, les méthodes d'intégrations directes ne donnent rien et la vue des calculs découlant des développements en série entière nous font froid dans le dos. On se demande alors s'il n'y a pas une autre méthode.....un éclair de génie : on se rappelle que notre prof nous a déjà résolue des équations différentielles tordues sans le moindre calcul en recherchant une solution simple et en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz.
La fonction f est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x^2f"(x)=2x(1+x^2)f'(x)-(2+x^2)f(x)+2+x^2 \\ f(0)=1 \text{ et } f'(0) \end{cases}$$

La fonction $f=1$ est solution de ce problème donc on est tenté de dire que $f=1$. Malheureusement, si l'on relie le théorème de Cauchy

Correction de l'exercice 2.2.9 : Si on exige que $i\geqslant 1$ et $j\geqslant 1$, la relation $i+j=n$ implique que $j=n-i$ donc $j\leqslant n-1$ et $i\leqslant n-1$. En appliquant Fubini, nous avons :

$$\sum_{i\geqslant 1,j\geqslant 1,i+j=n}\frac{1}{ij}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i(n-i)}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n}(\frac{1}{i}+\frac{1}{n-i})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-i}.$$

Pour la seconde somme, on effectue le changement de variable $i'=n-i$, ce qui nous donne

$$\sum_{i\geqslant 1,j\geqslant 1,i+j=n}\frac{1}{ij}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}.$$

La comparaison série-intégrale pour la fonction $\frac{1}{x}$, on obtient que $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n$ donc

$$\sum_{i\geqslant 1,j\geqslant 1,i+j=n}\frac{1}{ij}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2\ln n}{n}.$$

Trouver un équivalent simple de $\sum\limits_{i\geqslant 1,j\geqslant 1,i+j=n}\frac{1}{ij}$.

Correction de l'exercice 2.2.10 :

1. Soit $f\in E$, il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall t\in]-t,t[,\quad f(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nt^n$. En utilisant le changement de variable $u=xt$, nous remarquons pour commencer que

$$\phi(f)(x)=\int_0^x\frac{f(t)}{x+t}dt=\int_0^1\frac{f(xt)}{x+xt}xdt=\int_0^1\frac{f(xt)}{1+t}dt$$

pour $x\neq 0$ et la formule reste valide pour $x=0$.
Nous allons appliquer le théorème de permutation série-intégrale. Pour $x\in]-r,r[$, la fonction $t\mapsto a_n\frac{(xt)^n}{1+t}$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur ce segment et l'on a

$$\int_0^1\left|a_n\frac{(xt)^n}{1+t}\right|dt=|a_nx^n|\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt\leqslant|a_nx^n|.$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ étant absolument convergente par définition, nous en déduisons que la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|a_n\frac{(xt)^n}{1+t}\right| dt$ est convergente. On en déduit que

$$\forall x\in]-r,r[,\quad \int_0^1 \frac{f(xt)}{1+t}dt=\int_0^1(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\frac{(xt)^n}{1+t})dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 a_n\frac{(xt)^n}{1+t}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt$$

donc la fonction $\phi(f)$ est bien développable en série entière sur $]-r,r[$. L'application ϕ est bien à valeurs dans E_r et elle est linéaire donc ϕ est un endomorphisme de E_r.

2. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et f un vecteur propre de ϕ associé à λ :

$$\begin{aligned}\phi(f) &= \lambda f \Leftrightarrow \forall x\in]-r,r[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda a_nx^n\\ &\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\quad a_n(\lambda-\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt)=0.\end{aligned}$$

Puisque f est non nulle, il existe un $N\in\mathbb{N}$ tel que $a_N\neq 0$ alors $\lambda=\int_0^1\frac{t^N}{1+t}dt$. La suite $(\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante car

$$\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}dt-\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt=\int_0^1\frac{t^{n+1}-t^n}{1+t}dt=\int_0^1\underbrace{\frac{t^n}{1+t}}_{\geqslant 0}\underbrace{(t-1)}_{\leqslant 0}dt<0$$

(car une fonction continue sur $[0,1]$ négative et non nulle a une intégrale strictement négative). On en déduit que

$$\forall n\neq N,\quad \lambda-\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt\neq 0 \text{ donc } a_n=0.$$

Par conséquent, $\forall x\in]-r,r[,\quad f(x)=a_Nx^N$ et cette fonction appartient bien à E_r.
On en déduit que $\mathrm{Sp}\,\phi=\{\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt,\quad n\in\mathbb{N}\}$ et $E_\lambda(\phi)=\mathrm{Vect}(x\mapsto x^n)$ avec $\lambda=\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt$.
Puisque pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt$ est non nulle (l'intégrale d'une fonction positive non nulle), montrons que l'endomorphisme ϕ est bijectif. Soit $g=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\in E_r$, recherchons les antécédents $f=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ de g par ϕ :

$$\begin{aligned}\phi(f) &= g\Leftrightarrow \forall x\in]-r,r[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt\\ &\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=b_n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt\Leftrightarrow b_n=\frac{a_n}{\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt}.\end{aligned}$$

Ainsi, si $f\in E_r$ alors f est unique. Montrons que f appartient bien à E_r. Nous avons vu précédemment que la suite $(I_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt)_{n\geqslant 0}$ est positive décroissante. Nous disposons également

de la relation :

$$I_{n+1}+I_n=\int_0^1\frac{t^{n+1}+t^n}{1+t}dt=\int_0^1\frac{t^n(t+1)}{1+t}dt=\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}$$

On en déduit que

$$\forall n\geqslant 0,\quad \frac{1}{n+1}=I_n+I_{n+1}\leqslant 2I_n \text{ donc } I_n\geqslant\frac{1}{2(n+1)} \text{ et } I_n\leqslant\frac{1}{n+1} \tag{20}$$

ce qui implique que

$$\forall n\geqslant 0,\quad |b_n|=\frac{|a_n|}{I_n}\leqslant 2(n+1)\,|a_n|=2n\,|a_n|+2\,|a_n|\,.$$

Du cours sur les séries entières, nous savons que la série dérivée d'une série entière de rayon r est de rayon égal à r. Si $x\in]-r,r[$, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}na_nx^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^n$ sont absolument convergentes et la majoration

$$\forall n\geqslant 0,\quad |b_nx^n|\leqslant 2n\,|a_nx^n|+2\,|a_nx^n|$$

montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}b_nx^n$ est absolument convergente quel que soit $x\in]-r,r[$, ce qui signifie que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}b_nx^n$ admet un rayon de convergence supérieur ou égal à r. Par conséquent, $f\in E_r$ ce qui achève la preuve de la bijectivité de ϕ.

3. Soit $P=\sum\limits_{n=0}^N a_nx^n\in\mathbb{R}[t]$.

$$\forall x\in]-1,1[,\quad |\phi(P)(x)|=\left|\int_0^1\frac{P(xt)}{1+t}dt\right|\leqslant\int_0^1\frac{|P(xt)|}{1+t}dt$$

Si $x\in[-1,1]$ alors $\forall t\in[0,1]$, $xt\in[-1,1]$ donc

$$\forall x\in]-1,1[,\quad |\phi(P)(x)|\leqslant\int_0^1\frac{\|P\|}{1+t}dt=\|P\|\ln 2\Rightarrow\forall P\in\mathbb{R}[t],\quad \|\phi(P)\|\leqslant\|P\|\ln 2$$

donc ϕ est un endomorphisme continu de $\mathbb{R}[t]$ et sa norme subordonnée est moindre que $\ln 2$. Posons $P_n=x^n$ alors $\|P_n\|=1$ et

$$\phi^{-1}(P_n)(x)=\frac{x^n}{I_n}\text{ où }I_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt\Leftrightarrow\left\|\phi^{-1}(P_n)\right\|=\frac{1}{I_n}\geqslant n+1\text{ (cf. (20).}$$

On en déduit que

$$\left\|\left|\phi^{-1}\right|\right\|=\sup_{\|P\|=1}\left\|\phi^{-1}(P)\right\|\geqslant\left\|\phi^{-1}(P_n)\right\|\geqslant n+1\to+\infty$$

donc ϕ^{-1} n'est pas continue.
Remarque : en dimension finie, tous les endomorphismes sont continus. En particulier, tout automorphisme est continu ainsi que son inverse. En dimension infini, nous venons trouver un endomorphisme continu, inversible dont l'inverse n'est pas continu.

Correction de l'exercice 2.2.11 : Posons $A=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{\alpha}{n}\\ \dfrac{\alpha}{n} & 1\end{pmatrix}$ et $W=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Alors on a la décomposition $A=I_2+\dfrac{\alpha}{n}W$. Les matrices I_2 et W commutent donc appliquer la formule du binôme de Newton

$$A^n=\sum_{k=0}^n\tbinom{n}{k}(\frac{\alpha}{n})^kW^kI_2^{n-k}=\sum_{k=0}^n\tbinom{n}{k}(\frac{\alpha}{n})^kW^k.$$

Il est immédiat que $W^2=-I_2$ donc $W^{2k}=(W^2)^k=(-1)^kI_2$ et $W^{2k+1}=W.W^{2k}=(-1)^kW$. Nous allons donc décomposer la somme précédente selon les termes pairs et les termes impairs

$$\begin{aligned}A^n &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\tbinom{n}{2k}(\frac{\alpha}{n})^{2k}W^{2k}+\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\tbinom{n}{2k+1}(\frac{\alpha}{n})^{2k+1}W^{2k+1}\\ &= \left(\sum_{k=0}^{E(n/2)}\tbinom{n}{2k}(-1)^k(\frac{\alpha}{n})^{2k}\right)I_2+\left(\sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\tbinom{n}{2k+1}(-1)^k(\frac{\alpha}{n})^{2k+1}\right)W.\end{aligned}$$

Ces deux sommes rappellent les parties réelles et imaginaires de puissance d'un complexe de la forme $x+iy$. Plus précisément,

$$\begin{aligned}(x+iy)^n &= \sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}(iy)^kx^{n-2k}=\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\tbinom{n}{2k}(iy)^{2k}x^{n-2k}+\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\tbinom{n}{2k+1}(iy)^{2k+1}x^{n-(2k+1)}\\ &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\tbinom{n}{2k}(-1)^ky^{2k}x^{n-2k}+i\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\tbinom{n}{2k+1}(-1)^ky^{2k+1}x^{n-(2k+1)}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(x+iy)^n &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\tbinom{n}{2k}(-1)^ky^{2k}x^{n-2k}\text{ et }\mathrm{Im}(x+iy)^n=\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\tbinom{n}{2k+1}(-1)^ky^{2k+1}x^{n-(2k+1)}\\ \mathrm{Re}(1+iy)^n &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\tbinom{n}{2k}(-1)^ky^{2k}\text{ et }\mathrm{Im}(1+iy)^n=\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\tbinom{n}{2k+1}(-1)^ky^{2k+1}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$A^n=\mathrm{Re}\left((1+i\frac{\alpha}{n})^n\right)I_2+\mathrm{Im}\left((1+i\frac{\alpha}{n})^n\right)W.$$

Etudions la suite $((1+i\frac{\alpha}{n})^n)_{n\geqslant 1}$. Pour commencer, écrivons $(1+i\frac{\alpha}{n})$ sous forme polaire $\rho_ne^{i\theta_n}$

$$\rho_n=\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}\text{ et }\tan\theta_n=\frac{\alpha}{n}\Rightarrow\theta_n=\arctan(\frac{\alpha}{n})\bmod\pi.$$

La suite complexe $(1+i\frac{\alpha}{n})_{n\geqslant 1}$ converge vers 1 donc son angle polaire est nécessairement dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ pour n assez grand. D'autre part, la suite réelle $(\arctan(\frac{\alpha}{n}))_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 donc pour n assez grand, $\arctan(\frac{\alpha}{n})\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, ce qui entraine que l'on peut choisir $\theta_n=\arctan(\frac{\alpha}{n})$ pour n assez grand. Ainsi, on a

$$(1+i\frac{\alpha}{n})^n=\rho_n^ne^{in\theta_n}.$$

La suite $\rho_n^n=(\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}})^n$ converge vers 1 (il suffit de passer au logarithme et utiliser le DL de $\ln(1+x)$ en 0) et la suite $n\theta_n=n\arctan(\frac{\alpha}{n})$ converge vers α ($\arctan x\underset{x\to 0}{\sim}x$) donc la suite complexe $(1+i\frac{\alpha}{n})^n$ converge vers $\exp(i\alpha)$. On en déduit, par continuité des parties réelles et imaginaires) que $\mathrm{Re}\left((1+i\frac{\alpha}{n})^n\right)$ converge vers $\cos\alpha$ et $\mathrm{Im}\left((1+i\frac{\alpha}{n})^n\right)$ converge vers $\sin\alpha$. Par conséquent,

$$A^n\to(\cos\alpha)I_2+(\sin\alpha)W$$

9 Corrections MP*

9.1 Algèbre-géométrie

Correction de l'exercice 3.1.1 : Notons G_A l'application linéaire

$$\begin{aligned} G_A : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) &\to \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

Si λ est une valeur propre de A alors il existe un vecteur $e_\lambda \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ tel que

$$Ae_\lambda = \lambda e_\lambda$$

Notons X_λ la matrice dont la première colonne est e_λ et toutes les autres colonnes sont nulles c'est-à-dire

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} e_\lambda & (0) & \dots & (0) \end{pmatrix}$$

Un calcul direct montre que $AX_\lambda = \lambda X_\lambda$ et bien entendu la matrice X_λ est non nulle donc λ est une valeur propre de A.
Réciproquement soit λ une valeur propre de G_A donc il existe $X_\lambda \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})\backslash\{0\}$ telle que

$$AX_\lambda = \lambda X_\lambda \Leftrightarrow (A - \lambda Id)X_\lambda = 0$$

La matrice $A - \lambda Id$ n'est pas inversible (sinon $X_\lambda = 0$) donc λ est une valeur propre de A
Notons D_B l'application linéaire

$$\begin{aligned} D_B : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) &\to \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto XB \end{aligned}$$

Si λ est une valeur propre de B alors il existe un vecteur $e_\lambda \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ tel que

$$Be_\lambda = \lambda e_\lambda$$

Notons X_λ la matrice dont la première ligne est e_λ et toutes les autres ligness sont nulles c'est-à-dire

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} e_\lambda \\ (0) \\ \vdots \\ (0) \end{pmatrix}$$

Un calcul direct montre que $X_\lambda B = \lambda X_\lambda$ et bien entendu la matrice X_λ est non nulle donc λ est une valeur propre de A.
Réciproquement soit λ une valeur propre de D_B donc il existe $X_\lambda \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})\backslash\{0\}$ telle que

$$X_\lambda B = \lambda X_\lambda \Leftrightarrow X_\lambda(B - \lambda Id) = 0$$

La matrice $B - \lambda Id$ n'est pas inversible (sinon $X_\lambda = 0$) donc λ est une valeur propre de B
Revenons au cas de l'endomorphisme Φ. Cet endomorphisme est la somme des deux endomorphismes G_A et D_B i.e.

$$\Phi = G_A + D_B$$

Les deux endomorphismes G_A et D_B commutent car $\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} [G_A \circ D_B](X) &= G_A(XB) = AXB \\ [D_B \circ G_A](X) &= D_B(AX) = AXB \end{aligned}$$

Nous pouvons donc cotrigonaliser les deux endomorphismes i.e. si G' désigne la matrice de G_A dans une base fixée $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et si D' désigne la matrice de D_B dans la base $\mathcal{C}$, il existe une matrice inversible $P \in GL_{n^2}(\mathbb{C})$ telle

$$G' = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (*) \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n^2} \end{pmatrix} P^{-1} \qquad D' = P \begin{pmatrix} \mu_1 & & & (*) \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_{n^2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

(cela résulte que deux endomorphismes u et v de $L(\mathbb{C}^N)$ qui commutent sont cotrigonalisables. Il suffit de faire une preuve par récurrence : pour $n = 1$, c'est clair, pour l'hérédité, utiliser que u possède une valeur propre λ. Si $E_\lambda(u)$ est l'espace propre correspond la relation $u \circ v = v \circ u$ montre que E_λ est un sous-espace stable par v. L'endomorphisme $v_{|E_\lambda}$ possède une une valeur propre μ. Soit e un vecteur propre associé, alors e est par définition un vecteur propre de v et $e \in E_\lambda$ donc e est aussi un vecteur propre de u. Si on pose $F = \text{Vect}(e)$, on considère H un supplémentaire de F ainsi que la projection p de $\mathbb{C}^N$ sur H parallèlement à F. On applique ensuite l'hypothèse de récurrence à $p \circ v_{|H}$ et à $p \circ v_{|H}$ qui sont des endomorphismes de H puis on écrit l'égalité matricielle correspondante)
La matrice de Φ dans la base $\mathcal{C}$ est $G' + D'$ donc

$$G' + D' = P \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 & & & (*) \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n^2} + \mu_{n^2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

ce qui démontre que

$$Sp(\Phi) = \{\lambda + \mu,\ \lambda \in \text{Sp}(A),\ \mu \in \text{Sp}(B)\}$$

Correction de l'exercice 3.1.2 :

1. **Etude de $d_n(E)$ lorsque E est borné ou non**
   Si l'ensemble E est borné, tous les produits $d(a_i, a_j)$ sont bornés par une même constante C (ne dépendant que de E) qui est en fait le diamètre de E, i.e. $d_2(E)$) donc

$$\delta_n(a_1, .., a_n) = \left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} d(a_i, a_j) \right)^{\frac{2}{n(n-1)}} \leqslant \left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} d_2(E) \right)^{\frac{2}{n(n-1)}} = d_2(E)$$

   et en passant au sup on a

$$\forall n \geqslant 2, \quad d_n(E) \leqslant d_2(E) < +\infty$$

   ce qui montre que la suite $(d_n(E))_{n \geqslant 2}$ est borné.
   Si l'ensemble E est non borné, il est nécesairement infini. Fixons $n-1$ éléments $a_2, .., a_n$ de E. Il existe une suite $(a^{(k)})_{k \geqslant 1}$ d'éléments de E tels que

$$\forall j \in \{2, .., n\}, \quad \lim_{k \to +\infty} d(a^{(k)}, a_j) = +\infty$$

   La suite $(\delta_n(a^{(k)}, a_2, .., a_n))_{k \geqslant 1}$ est le produit de constantes par des suites tendant vers $+\infty$ donc

$$\delta_n(a^{(k)}, a_2, .., a_n) \to +\infty$$

   quand $k \to +\infty$ ce qui implique de

$$d_n(E) = +\infty$$

2. **Si $E \subset F$**, il est immédiat que

$$\{\delta_n(a_1,..,a_n),\quad (a_1,..,a_n)\in E\}\subset\{\delta_n(a_1,..,a_n),\quad (a_1,..,a_n)\in F\}$$

donc

$$\sup_{(a_1,..,a_n)\in E}\delta_n(a_1,..,a_n)\leqslant\sup_{(a_1,..,a_n)\in F}\delta_n(a_1,..,a_n)\Rightarrow d_n(E)\leqslant d_n(F)$$

3. **Etude la monotonie de la suite $(d_n(E))_{n\geqslant 2}$**

Pour commencer, il faut remarquer que $(\delta_n(a_1,..,a_n))^{\frac{n(n-1)}{2}}$ est le produit de toutes les distances entre deux éléments de l'ensemble $\{a_1,..,a_n\}$.
Considérons $n+1$ éléments distincts $a_1,..,a_{n+1}$ de E.

$$(\delta_{n+1}(a_1,..,a_{n+1}))^{\frac{n(n+1)}{2}}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}d(a_i,a_j)$$

Notons $E_{n+1}^{(2)}$ l'ensemble des parties à deux éléments de E_{n+1}. Si $F=\{a,b\}$ est une partie à deux de E_{n+1}, on note

$$\mathfrak{d}(F)=d(a,b)=d(b,a)\text{ (par définition de la distance)}$$

Ainsi nous pouvons écrire

$$(\delta_{n+1}(a_1,..,a_{n+1}))^{\frac{n(n+1)}{2}}=\prod_{F\subset E_{n+1}^{(2)}}\mathfrak{d}(F)\tag{21}$$

Il est immédiat que

$$E_{n+1}=\bigcup_{k=1}^{n+1}(E_{n+1}\backslash\{a_k\})$$

et si $(E_{n+1}\backslash\{a_k\})^{(2)}$ désigne l'ensemble des parties à deux éléments de $(E_{n+1}\backslash\{a_k\})$, nous avons l'égalité ensembliste suivante

$$(E_{n+1})^{(2)}=\bigcup_{k=1}^{n+1}(E_{n+1}\backslash\{a_k\})^{(2)}\tag{22}$$

quiest valable si $n\geqslant 3$ (dans un ensemble possédant au moins trois éléments, toute partie à deux éléments $\{a_i,a_j\}$ ne rencontre pas le complémentaire d'un certain élément). L'égalité ensembliste précédente n'est pas une partition.
Fixons une partie $F=\{a_i,a_j\}$ à deux éléments de E_{n+1}. $F\in(E_{n+1}\backslash\{a_k\})^{(2)}$ ssi i et j sont distincts de k donc une partie F appartient aux $n+1-2=n-1$ ensembles $((E_{n+1}\backslash\{a_k\})^{(2)})_{\substack{k\neq i\\k\neq j}}$
et cette partie F apparait une fois et une seule dans chaque $(E_{n+1}\backslash\{a_k\})^{(2)}$(il s'agit de sous-parties !).
Ainsi dans le produit $\prod_{k=1}^{n+1}\prod_{F\subset(E_{n+1}\backslash\{a_k\})^{(2)}}(\mathfrak{d}(F))$, chaque partie F à deux éléments de E_{n+1} est compté exactement $(n-1)$ fois. Cette remarque combinée à l'égalité (22) montre que

$$\prod_{k=1}^{n+1}\prod_{F\subset(E_{n+1}\backslash\{a_k\})^{(2)}}(\mathfrak{d}(F))=(\prod_{F\subset E_{n+1}^{(2)}}\mathfrak{d}(F))^{n-1}$$

et l'utilisation de la formule (21) nous permet d'écrire la formule suivante :

$$(\delta_{n+1}(a_1,..,a_{n+1}))^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{k=1}^{n+1}\prod_{F\subset(E_{n+1}\setminus\{a_k\})^{(2)}}(\mathfrak{d}(F))^{\frac{1}{n-1}} = \left(\prod_{k=1}^{n+1}\prod_{F\subset(E_{n+1}\setminus\{a_k\})^{(2)}}(\mathfrak{d}(F))\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

valable pour tous $(n+1)$-uplets $(a_1,..,a_{n+1})$ de E. Le produit $\prod_{F\subset(E_{n+1}\setminus\{a_k\})^{(2)}}(\mathfrak{d}(F))$ est le produit sur toutes les parties à deux éléments de l'ensemble à n éléments $E_{n+1}\setminus\{a_k\}$ donc

$$\prod_{F\subset(E_{n+1}\setminus\{a_k\})^{(2)}}(\mathfrak{d}(F)) = (\delta_n(a_1,..,\widehat{a_k},..,a_{n+1}))^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

(le chapeau $\widehat{\ }$ sur a_k signifiant que l'élément a_k n'est pas considérer. Nous pouvons réécrire $(\delta_{n+1}(a_1,..,a_{n+1}))^{\frac{n(n+1)}{2}}$ sous la forme :

$$(\delta_{n+1}(a_1,..,a_{n+1}))^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{k=1}^{n+1}(\delta_n(a_1,..,\widehat{a_k},..,a_{n+1}))^{\frac{1}{n-1}}.$$

Cette dernière égalité vient d'être prouvée si les éléments $(a_1,..,a_{n+1})$ sont deux à deux distincts mais elle reste vraie dans le cas contraire car le membre de gauche est nul et l'un des facteur du membre de droite est nul.
Nous en déduisons la majoration suivante quelque soit le $(n+1)$-uplets choisi :

$$\forall(a_1,..,a_{n+1})\in E^{n+1},$$

$$(\delta_{n+1}(a_1,..,a_{n+1}))^{\frac{n(n+1)}{2}} \leqslant \prod_{k=1}^{n+1}\left((d_n(E))^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{k=1}^{n+1}(d_n(E))^{\frac{n}{2}} = (d_n(E))^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

et en passant au sup

$$(d_{n+1}(E))^{\frac{n(n+1)}{2}} \leqslant (d_n(E))^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad d_{n+1}(E)\leqslant d_n(E)$$

La suite $(d_n(E))_{n\geqslant 2}$ est décroissante, positive (!) donc elle converge vers une limite positive

4. **Calcul de $d_3(E)$ lorsque E est un segment**
Nous pouvons supposer que E est un segment $[\alpha,\beta]$ de la droite réelle. Soit a_1,a_2,a_3 trois points de ce segment (qui sont donc des nombres puisque le segment est sur la droite réelle). La définition de $\delta_3(a_1,a_2,a_3)$ nous permet de supposer également que $\alpha\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\beta$. Dans ce cas

$$\delta_3^3(a_1,a_2,a_3) = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)\leqslant(a_2-\alpha)(\beta-\alpha)(\beta-a_2)$$

L'étude de la fonction $a_2\mapsto(a_2-\alpha)(\beta-a_2)$ sur le segment $[\alpha,\beta]$ montre qu'elle possède un unique maximum en $a_2=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ et que ce maximum est $\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{4}$ ce qui nous donne la majoration

$$\delta_3^3(a_1,a_2,a_3)\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^3}{4}\quad\Leftrightarrow\quad\delta_3(a_1,a_2,a_3)\leqslant\frac{\beta-\alpha}{\sqrt[3]{4}}$$

valable pour tout triplet (a_1,a_2,a_3) de E. En passant au sup, on a

$$d_3(E)\leqslant\frac{\beta-\alpha}{\sqrt[3]{4}}$$

et $\delta_3(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \beta) = \frac{\beta-\alpha}{\sqrt[3]{4}}$ donc

$$d_3(E) = \frac{\beta-\alpha}{\sqrt[3]{4}}$$

Correction de l'exercice 3.1.3 :

Interprétation Supposons qu'il existe un certain sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{R})$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$. Soit f un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ sur G, c'est-à-dire une injection de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (\overline{a}, \overline{b}), (\overline{a'}, \overline{b'}) \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2, \quad f((\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{a'}, \overline{b'})) = f(\overline{a}, \overline{b}).f(\overline{a'}, \overline{b'}).$$

Si l'on pose $A = f(\overline{1}, \overline{0})$ et $B = f(\overline{0}, \overline{1})$. Alors, les matrices A et B appartiennent à G donc à $GL_n(\mathbb{R})$ et on a :

$$\forall (\overline{a}, \overline{b}) \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2, \quad f(\overline{a}, \overline{b}) = f(\overline{a}, \overline{0}).f(\overline{0}, \overline{b}) = f(a(\overline{1}, \overline{0})).f(b(\overline{0}, \overline{1})) = (f(\overline{1}, \overline{0}))^a.(f(\overline{0}, \overline{1}))^b = A^a B^b.$$

Par conséquent, la connaissance de A et B permet de reconstituer f. Que peut-on dire de A et B ?

- Pour commencer, les matrices A et B commutent car :

$$AB = f(\overline{1}, \overline{0}).f(\overline{0}, \overline{1}) = f((\overline{1}, \overline{0}) + (\overline{0}, \overline{1})) = f(\overline{1}, \overline{1})) = f(\overline{0}, \overline{1}).f(\overline{1}, \overline{0}) = BA.$$

- Ensuite, chacune est d'ordre 4. Montrons le pour A, le lecteur fera la vérification pour B. Pour commencer, on a :

$$A^4 = (f(\overline{1}, \overline{0}))^4 = f(4(\overline{1}, \overline{0})) = f(\overline{4}, \overline{0}) = f(\overline{0}, \overline{0}) = I_n,$$

Soit $k \in \{1, 2, 3\}$. Alors $(\overline{k}, \overline{0}) \neq (\overline{1}, \overline{0})$ et l'injectivité de f, montre que $f(\overline{k}, \overline{0}) \neq f(\overline{1}, \overline{0}) = I_n$. Or, nous avons l'égalité

$$A^k = (f(\overline{1}, \overline{0}))^k = f(k(\overline{1}, \overline{0})) = f(\overline{k}, \overline{0})$$

donc $A^k \neq A$.

- Soit $< A >$ (resp. $< B >$) le groupe engendré par A (resp. B). Montrons que $< A > \cap < B >= \{I_n\}$. Soit $g \in < A > \cap < B >$ alors il existe deux entiers k et l tel que

$$g = A^k = B^l \Rightarrow (f(\overline{1}, \overline{0}))^k = (f(\overline{0}, \overline{1}))^l \Leftrightarrow f(k(\overline{1}, \overline{0})) = f(l(\overline{0}, \overline{1})) \Leftrightarrow f(\overline{k}, \overline{0}) = f(\overline{0}, \overline{l})).$$

L'injectivité de f implique que $\overline{k} = \overline{0}$ et $\overline{l} = \overline{0}$, c'est-à-dire que 4 divise k et l donc $A^k = I_n$ et $B^l = I_n$ et $g = I_n$
Nous venons donc de montrer que l'existence d'un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ sur un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ implique l'existence de deux matrices A et B de $GL_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A^4 = B^4 = I_n, \quad AB = BA, \quad < A > \cap < B >= \{I_n\}.$$

Réciproquement, soient A et B deux telles matrices. Définissons l'application f de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall (\overline{a}, \overline{b}) \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2, \quad f(\overline{a}, \overline{b}) \underset{\text{par def}}{=} A^a B^b.$$

Vérifions que f est bien définie. Si $a' = a + 4k$ et $b' = b + 4l$, où a, b, a', b, k, l sont des entiers relatifs, alors

$$A^{a'} B^{b'} = A^{a+4k} B^{b+4l} = A^a (A^4)^k A^b (A^4)^l = A^a A^b.$$

Ainsi $A^a B^b$ dépend pas de a et b mais de leurs classes modulo 4 et f est ainsi bien définie.
Le calcul suivant montre que f est bien un morphisme

$$f((\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{a'}, \overline{b'})) = f(\overline{a + a'}, \overline{b + b'}) = A^{a+a'} B^{b+b'} = A^a A^{a'} B^b B^{b'} = A^a B^b A^{a'} B^{b'} \underset{AB=BA}{=} f(\overline{a}, \overline{b}).f(\overline{a'}, \overline{b'}) .$$

On en déduit déjà que $G = f((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$. Ce morphisme est bien surjectif car

$$f(\overline{a},\overline{b}) = I_n \Leftrightarrow A^aB^b = I_n \Leftrightarrow A^a = B^{-b} \Rightarrow A^a \in < A > \cap < B > = \{I_n\} \Rightarrow (A^a = I_n \text{ et } B^b = I_n).$$

Puisque A est d'ordre 4 donc 4 divise a et $\overline{a} = \overline{0}$. De même pour b donc $(\overline{a},\overline{b}) = (\overline{0},\overline{0})$ ce qui montre l'injectivité de f.
Par conséquent, f réalise un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ sur le sous-groupe $f((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2)$ de $GL_n(\mathbb{R})$.

Caractérisation de n Le polynôme $X^4 - 1$ est annulateur pour A et sa décomposition en produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ est

$$X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1).$$

Le théorème des noyaux nous montre que

$$\mathbb{R}^n = \ker(A - I_n) \oplus \ker(A + I_n) \oplus \ker(A^2 + I_n).$$

Si $\ker(A^2 + I_n) = \{0\}$ alors

$$\mathbb{R}^n = \ker(A - I_n) \oplus \ker(A + I_n) = \ker(A^2 - I_n)$$

donc $A^2 = I_n$ ce qui est impossible et on a :

$$\ker(A^2 + I_n) \neq \{0\}.$$

Notons dans la suite u (resp. v) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A (resp. B)

1. Supposons que $n = 4$. Soit e_1 un vecteur non nul de $\ker(A^2 + I_n)$. La famille $(e_1, u(e_1))$ est une famille libre. Sinon, $u(e_1)$ est colinéaire à e_1 donc il existe un réel λ tel que $u(e_1) = \lambda e_1$. Dans ce cas, on a

$$-e_1 = u^2(e_1) = u(\lambda e_1) = \lambda u(e_1) = \lambda^2 e_1 \Rightarrow (\lambda^2 + 1)\underbrace{e_1}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

ce qui est absurde car $\lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit que $(e_1, u(e_1))$ est une base de $\ker(A^2+I_n)$. Dans cette base, la matrice de $u_{|\text{Vect}((e_1,u(e_1))}$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On constate alors que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont deux matrices d'ordre 4 (la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour carré $-I_2$ donc elle est d'ordre 4) qui commutent de façon évidente. Vérifions que $< A > \cap < B > = \{I_4\}$. Si $g \in < A > \cap < B >$, alors il existe deux entiers k et q tels que $A^k = B^q$. Un calcul direct nous donne $A^k = \begin{pmatrix} * & (0) \\ (0) & I_2 \end{pmatrix}$ et $B^q = \begin{pmatrix} I_2 & (0) \\ (0) & * \end{pmatrix}$ donc, par identification, $A^k = B^k = \begin{pmatrix} I_2 & (0) \\ (0) & I_2 \end{pmatrix} = I_4$, ce qui implique que 4 divise k et q. On en déduit que $g = I_4$, ce qui nous assure, par l'**interprétation**, l'existence d'un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ sur un certain sous-groupe de $GL_4(\mathbb{R})$.

2. Si $n \geqslant 4$, considérons les matrices $A' = \begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & I_{n-4} \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} B & (0) \\ (0) & I_{n-4} \end{pmatrix}$ où A et B sont les deux matrices de $GL_4(\mathbb{R})$ définies dans 1. Les matrices A' et B' appartiennent à $GL_n(\mathbb{R})$, elles sont d'ordre 4 et $< A' > \cap < B' > = \{I_n\}$ (je laisse cette véification élémentaire au lecteur). Cela nous fournit, toujours par l'**interprétation**, l'existence d'un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ sur un certain sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

3. Si $n=1$, une matrice est un scalaire et il n'existe aucun réel d'ordre 4 donc $n=1$ est impossible.
4. Si $n=2$. Nous savons que $\ker(A^2+I_n)\neq\{0\}$ et le raisonnement du 1 montre qu'il existe un vecteur e_1 tel que $(e_1,u(e_1))$ est une famille libre de $\ker(A^2+I_n)$ donc

$$2\leqslant \dim\ker(A^2+I_n)\leqslant \dim\mathbb{R}^2=2,$$

ce qui démontre que $(e_1,u(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de u dans cette base est $A'=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. L'endomorphisme v commutant avec u, la matrice $B'=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ de v dans cette base commute avec celle de u. Un calcul direct montre que $a=d$ et $b=-c$. La matrice B' étant inversible, on en déduit que $a^2+b^2\neq 0$. En particulier, il existe un réel θ tel que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\theta \text{ et } \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\theta.$$

Nous pouvons alors écrire $B'=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$.On sait d'autre part que $B^4=I_2$ donc, en passant pour commencer au déterminant, on obtient que

$$(a^2+b^2)^2=1\Leftrightarrow a^2+b^2=1\Rightarrow B'=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

puis que

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^4=I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\cos 4\theta&-\sin 4\theta\\\sin 4\theta&\cos 4\theta\end{pmatrix}=I_2\Leftrightarrow\theta=q\frac{\pi}{2}\text{ avec } q\in[\![0,3]\!],$$

ce qui implique que

$$B'=\begin{pmatrix}\cos q\frac{\pi}{2}&-\sin q\frac{\pi}{2}\\\sin q\frac{\pi}{2}&\cos q\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}^q\text{ avec } q\in[\![0,3]\!].$$

Si l'on souhaite que B' soit d'ordre 4, alors $q=1$ ou 3. Or si $q=1$, on a $A'=B'$, ce qui implique que $A=B$ donc $g=A=B\neq I_2t$ et $g\in<A>\cap<B>$ ou $q=3$, alors $B'=A'^3$, ce qui implique que $B=A^3=A^{-1}$ donc $g=B=A^3\neq I_2$ et $g\in<A>\cap<B>$. On en déduit que le cas $n=2$ est impossible.
5. Si $n=3$, les polynômes caractéristique de A et de B sont de degré impair donc ils admettent nécessairement au moins une racine réelle, qui est nécessairement 1 ou -1. Par conséquent, $\dim(\ker(A-I_n)\oplus\ker(A+I_n))\geqslant 1$. D'autre part, les espaces vectoriels $\ker(A^2+I_n)$ et $\ker(B^2+I_n)$ sont non nuls. Le raisonnement du 1 montre que leurs dimensions est au moins 2. On en déduit pour A que :

$$\dim(\ker(A-I_n)\oplus\ker(A+I_n))=1 \text{ et } \dim\ker(A^2+I_n)=2$$

et pour B que

$$\dim(\ker(B-I_n)\oplus\ker(B+I_n))=1 \text{ et } \dim\ker(B^2+I_n)=2$$

Il existe donc $\varepsilon\in\{-1,1\}$ tel que $\dim\ker(A-\varepsilon I_n)=1$. Par le raisonnement, nous disposons d'une base $(e_1,u(e_1))$ de $\ker(A^2+I_n)$ et fixons une base (e_2) de $\ker(A-\varepsilon I_n)$. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}=(e_1,u(e_1),e_2)$ est

$$A'=\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

L'endomorphisme v commutant avec u, il laisse stable l'espace $\ker(A-\varepsilon I_n)$ ainsi que l'espace $\ker(A^2+I_n)$ donc sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$B' = \begin{pmatrix} \varepsilon' & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \text{ avec } X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et } \varepsilon' \in \{-1,1\}$$

La commutation de u et v implique la commutation de X et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'autre part, l'égalité $v^4 = \text{Id}$ implique que $X^4 = I_2$. Puisque $v^2 \neq \text{Id}$, on en déduit que $B'^2 \neq I_2$ et, comme et $\varepsilon'^2 = 1$, cela signifie que $X^2 \neq I_2$ donc X est d'ordre 4 (l'ordre de X divise 4 et il est différent de 2). Le raisonnement de 4. montre que $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^q$ avec $q = 1$ ou 3. Ainsi, on a

$$B' = \begin{pmatrix} \varepsilon' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } B' = \begin{pmatrix} \varepsilon' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ces deux cas, on a $B'^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A'^2$ donc $B^2 = A^2$. $g = A^2 = B^2 \in < A > \cap < B >$ et $g \neq I_3$, ce qui démontre que le cas $n = 3$ est impossible.

Conclusion : l'existence d'un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ est possible si et seulement si $n \geqslant 4$.

Correction de l'exercice 3.1.5 :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Effectuons pour commencer la réduction de A. Son polynôme caractéristique est

$$P_A(X) = X^3 - 3X^2 - 4X + 12 = (X-3)(X+2)(X-2)$$

donc la matrice A, qui est de taille 3, admet trois valeurs propres distinctes réelles donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

– $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2}(A)$ si et seulement $AX = -2X$, ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 2x - 12z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \\ y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6z \\ y = -5z \end{cases} \Leftrightarrow X = z \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{-2}(A) = \text{Vect}(e_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix})$$

– $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A)$ si et seulement $AX = 2X$, ce qui équivaut à

$$\begin{cases} -2x - 12z = 0 \\ x - 2y + 4z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6z \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow X = z \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{-2}(A) = \text{Vect}(e_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

– $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(A)$ si et seulement $AX = 3X$, ce qui équivaut à

$$\begin{cases} -3x - 12z = 0 \\ x - 3y + 4z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4z \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = z \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{-2}(A) = \text{Vect}(e_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Par conséquent, la matrice $P=\begin{pmatrix}6&-6&-4\\-5&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ est inversible et $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.
Décrivons maintenant explicitement $W(v)$. Le polynôme caractéristique P_A de A est un polynôme annulateur de A. Soit k un entier positif. La division euclidienne de X^k par P_A nous fournit deux polynômes Q_k et R_k avec $\deg R_k<3$ tels que

$$X^k=P_A(X)Q_k(X)+R_k(X)\Rightarrow A^k=\underbrace{P_A(A)}_{=0}Q_k(A)+R_k(A)=R_k(A) \tag{23}$$

Puisque R_k est de degré strictement inférieur à 3, il existe trois réels a_k,b_k,c_k tel que $R(X)=a_kX^2+b_kX+c_k$, ce qui combinée à l'égalité (23) démontre que

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \exists a_k,b_k,c_k\in\mathbb{R}\text{ tels que }A^k=a_kA^2+b_kA+c_kI_3\Leftrightarrow f^k=a_kf^2+b_kf+c_k\,\mathrm{Id}\,.$$

Par conséquent, l'espace $W(v)$ est engendré par les trois vecteurs $f^2(v),f(v)$ et v, c'est-à-dire

$$W(v)=\mathrm{Vect}(f^2(v),f(v),v).$$

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \exists a_k,b_k,c_k\in\mathbb{R}\text{ tels que }f^k(v)$$

L'espace $W(v)$ étant engendré par trois vecteurs et E étant de dimension trois, dire que $W(v)\neq E$ est équivalent à exiger que ces trois vecteurs sont liés. Si l'on fixe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, c'est équivalent à l'annulation du déterminant $\det_{\mathcal{B}}(v,f(v),f^2(v))$, ce que l'on résume par :

$$W(v)\neq E\Leftrightarrow\det_{\mathcal{B}}(v,f(v),f^2(v))=0. \tag{24}$$

Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et (x,y,z) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ des vecteurs propres de f (qui sont ceux de A) . Alors, on a l'égalité

$$\forall k\in\{0,1,2\},\quad f^k(v)=f^k(xe_1+ye_2+ze_3)=xf^k(e_1)+yf^k(e_2)+zf^k(e_3)=x(-2)^ke_1+y2^ke_2+z3^ke_3$$

donc les coordonnées de $f^k(v)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(x(-2)^k,y2^k,z3^k)$ et

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(v,f(v),f^2(v)) &= \begin{vmatrix}x&-2x&4x\\y&2y&4y\\z&3z&9z\end{vmatrix}=xyz\begin{vmatrix}1&-2&4\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}=xyz\begin{vmatrix}1&-2&4\\0&4&0\\0&5&5\end{vmatrix}\quad\begin{matrix}L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{matrix}\\ &= xyz\times1\times\begin{vmatrix}4&0\\5&5\end{vmatrix}=20xyz.\end{aligned}$$

On en déduit que si v est un vecteur de coordonnées (x,y,z) dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs propres de A alors

$$W(v)\neq0\Leftrightarrow xyz=0,$$

c'està dire que v est dans, au moins, l'un des trois plan $x=0$ ou $y=0$ ou $z=0$.
Si l'on veut exprimer ceci dans la base initiale β, il suffit d'exprimer les "anciennes" coordonnées de v dans la base β dans la "nouvelle" base $\mathcal{B}$. Notons (v_1,v_2,v_3) les coordonnées de v dans la base β alors

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6&-4\\-5&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}v_1-2v_2+4v_3\\-5v_1-10v_2-20v_3\\4v_1+12v_2+36v_3\end{pmatrix}$$

et, en factorisant les constantes adéquates, on a

$$W(v)\neq0\Leftrightarrow(v_1-2v_2+4v_3)(v_1+2v_2+4v_3)(v_1+3v_2+9v_3)=0$$

c'està dire que v est dans, au moins, l'un des trois plans

$$v_1-2v_2+4v_3=0\text{ ou }v_1+2v_2+4v_3=0\text{ ou }v_1+3v_2+9v_3=0.$$

2. $A=\begin{pmatrix}0&0&12\\1&0&-16\\0&1&7\end{pmatrix}$. Effectuons pour commencer la réduction de A. Son polynôme caractéristique est

$$P_A(X)=X^3-7X^2+16X-12=(X-3)(X-2)^2$$

Intermède : on peut dès à présent savoir si A est diagonalisable ou non. Les seules valeurs propres de A sont 2 et 3. Si A est diagonalisable alors elle est semblable à une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont des 2 et des 3. Une telle matrice diagonale est annulée par le polynôme $(X-2)(X-3)$ donc ce polynôme doit annulé A. Effectuons le calcul correspondant :

$$(A-2I_3)(A-3I_3)=\begin{pmatrix}-2&0&12\\1&-2&-16\\0&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&0&12\\1&-3&-16\\0&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&12&24\\-5&-10&-20\\1&2&4\end{pmatrix}\neq 0$$

donc A n'est pas diagonalisable.
Remarque : si $(A-2I_3)(A-3I_3)=0$ alors A était annulé par le polynôme $(X-2)(X-3)$, qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$, donc A serait diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Je laisse au lecteur le soin de la généralisation aux cas d'un nombre quelconque de valeurs propres de multiplicité quelconque.
Revenons à nos moutons. La valeur propre 3 étant de multiplicité 1, son espace propre est de dimension moindre que 1 et 3 étant une valeur propre, sa dimension est au moins 1. Donc, sans calcul, on peut affirmer que $\dim E_3(A)=1$. Par contre, nous devons déterminer par le calcul la dimension de $E_2(A)$ (en fait, grâce à l'intermède, on sait que

$$\dim E_2(A)+\dim E_3(A)<3\Leftrightarrow \dim E_2(A)+1<3\Leftrightarrow \dim E_2(A)<2\Leftrightarrow \dim E_2(A)\leqslant 1$$

et, 2 étant une valeur propre, $\dim E_2(A)\geqslant 1$ donc $\dim E_2(A)=1$). Nous allons également expliciter les valeurs propres, ce qui nous avancera dans le travail de trigonalisation de A (A étant annulé par un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, elle est trigonalisable sur $\mathbb{R}$)

– $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_2(A)$ si et seulement $AX=2X$, ce qui équivaut à

$$\begin{cases}-2x+12z=0\\x-2y-16z=0\\y+5z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6z\\y=-5z\end{cases}\Leftrightarrow X=z\begin{pmatrix}6\\-5\\1\end{pmatrix}\Rightarrow E_2(A)=\text{Vect}(\underline{e_2}=\begin{pmatrix}6\\-5\\1\end{pmatrix})$$

on retrouve bien que $\dim E_2(A)=1<2$ donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (ni sur $\mathbb{C}$)

– $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_3(A)$ si et seulement $AX=3X$, ce qui équivaut à

$$\begin{cases}-3x+12z=0\\x-3y-16z=0\\y+4z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4z\\y=-4z\end{cases}\Leftrightarrow X=z\begin{pmatrix}4\\-4\\1\end{pmatrix}\Rightarrow E_{-2}(A)=\text{Vect}(\underline{e_3}=\begin{pmatrix}4\\-4\\1\end{pmatrix})$$

(On trouve le résultat escompté à priori)
Nous allons trigonaliser A mais pas n'importe comment, en particulier, on ne va dire que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix}2&0&0*&2&0*&0&3\end{pmatrix}$. Le polynôme $(X-2)^2(X-3)$ annule A, les facteurs $(X-2)^2$ et $(X-3)$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}$ donc on peut appliquer le théorème des noyaux.

$$\mathbb{R}^3=\ker((A-2I_3)^2)\oplus\ker(A-3I_3).$$

Les espaces propres $\ker((A-2I_3)^2)$ et $\ker(A-3I_3)$ sont stables par A donc on peut espérer rendre semblable A à une matrice du type $\begin{pmatrix}2&0&0\\a&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, si l'on choisir une base de $\ker((A-2I_3)^2)$ formé d'un vecteur propre de A ($\ker(A-2I_3)\subset\ker((A-2I_3)^2)$) et d'un autre vecteur de $\ker((A-2I_3)^2)$. Puisque A n'est pas diagonalisable, le coefficient a est nécessairement non nul (sinon A admettrait deux vecteurs propres libres associés à la valeur propre 2). Nous devons rechercher un vecteur e_2 tel que

$$Ae_1=2e_1+ae_2\Leftrightarrow A(\frac{1}{a}e_1)=2(\frac{1}{a}e_1)+a_2.$$

Ainsi, cela revient à chercher un vecteur e_1' tel que $Ae_1'=2e_1'+e_2$. C'est plus intéressant car nous avons éliminer la constante indéterminée a. Effectuons le calcul

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-5\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}-2x+12z&=&6\\x-2y-16z&=&-5\\y+5z&=&1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}x&=&-3+6z\\y&=&1-5z\end{array}\right.$$

On peut donc choisir $e_1=\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$. La famille (e_1,e_2,e_3) est libre car $P=\begin{pmatrix}-3&6&4\\1&-5&-4\\0&1&1\end{pmatrix}$ est une matrice de déterminant 1 donc inversible. Nous obtenons ainsi une belle trigonalisation de A avec

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

En fait, nous venons même d'effectuer la réduction de Jordan de A (sur un exemple très simple). Comme cela a été vu au 1, pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$, on a $W(v)=\text{Vect}(v,f(v),f^2(v))$ et

$$W(v)\neq E\Leftrightarrow\det_{\mathcal{B}}(v,f(v),f^2(v))=0.$$

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base de trigonalisation de A (donc de f), Il est évident que

$$\forall k\in\{0,1,2\},\quad f^k(e_1)=2^ke_1+2^{k-1}ke_2,\quad f^k(e_2)=2^ke_2,\quad f^k(e_3)=3^ke_3.$$

Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et (x,y,z) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Alors, on a l'égalité

$$\begin{array}{c}\forall k\in\{0,1,2\},\quad f^k(v)=f^k(xe_1+ye_2+ze_3)=xf^k(e_1)+yf^k(e_2)+zf^k(e_3)\\=x(2^ke_1+2^{k-1}ke_2)+y2^ke_2+z3^ke_3=x2^ke_1+(x2^{k-1}k+y2^k)e_2+z3^ke_3\end{array}$$

donc les coordonnées de $f^k(v)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(x2^k,x2^{k-1}k+y2^k,z3^k)$ et

$$\begin{array}{rcll}\det_{\mathcal{B}}(v,f(v),f^2(v))&=&\begin{vmatrix}x&2x&4x\\y&x+2y&4x+4y\\z&3z&9z\end{vmatrix}=xz\begin{vmatrix}1&2&4\\y&x+2y&4x+4y\\1&3&9\end{vmatrix}=xz\begin{vmatrix}1&-2&4\\0&x&4x\\0&5&5\end{vmatrix}&\begin{array}{l}L_2\leftarrow L_2-yL\\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{array}\\&=&x^2z\begin{vmatrix}1&-2&4\\0&1&4\\0&5&5\end{vmatrix}=x^2z\times1\times\begin{vmatrix}1&4\\5&5\end{vmatrix}=x^2z.&\end{array}$$

On en déduit que si v est un vecteur de coordonnées (x,y,z) dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs propres de A alors

$$W(v)\neq0\Leftrightarrow x^2z=0,$$

c'està dire que v est dans, au moins, l'un des deux plan $x=0$ ou $z=0$.
Si l'on veut exprimer ceci dans la base initiale β, il suffit d'exprimer les "anciennes" coordonnées

de v dans la base β dans la "nouvelle" base $\mathcal{B}$. Notons (v_1, v_2, v_3) les coordonnées de v dans la base β alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 - 2v_2 - 4v_3 \\ -v_1 - 3v_2 - 8v_3 \\ v_1 + 3v_2 + 9v_3 \end{pmatrix}$$

et l'on a

$$W(v) \neq 0 \Leftrightarrow (-v_1 - 2v_2 - 4v_3)^2(v_1 + 3v_2 + 9v_3) = 0$$

c'està dire que v est dans, au moins, l'un des deux plans

$$v_1 + 2v_2 + 4v_3 = 0 \text{ ou } v_1 + 3v_2 + 9v_3 = 0.$$

Correction de l'exercice 3.1.6 :

1. *Un petit rappel sur les racines de l'unité. On appelle racine $n^{ième}$ de l'unité toute solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$, ou plus explicitement, tout complexe de la forme de la forme $\exp(\frac{2ik\pi}{n})$, où $k \in \mathbb{Z}$. La n-périodicité de $k \mapsto \exp(\frac{2ik\pi}{n})$ implique que toute racine de l'unité est un complexe de la forme $\exp(\frac{2ik\pi}{n})$, où $k \in [\![0, n-1]\!]$. Le groupe multiplicatif $\mathbb{U}_n$ des racines $n^{ième}$ de l'unité est un groupe cyclique d'ordre n et $\exp(\frac{2ik\pi}{n})$ est un générateur de $\mathbb{U}_n$ si et seulement si* $\text{pgcd}(k, n) = 1$.

Les racines de $X^n - 1$ sont l'ensemble des racines $n^{ièmes}$ de l'unité donc $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \exp(\frac{2ik\pi}{n})$. Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, le pgcd de k et n est un diviseur de n et pour tout diviseur d de n, il existe au moins un entier k ($= d$ par exemple) dont le pgcd de k avec n soit d. Si l'on note $E_d = \{k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } \text{pgcd}(k, n) = d\}$, nous disposons de la partition de $[\![0, n-1]\!]$ donnée par :

$$[\![0, n-1]\!] = \coprod_{d|n} E_d,$$

ce qui implique que :

$$X^n - 1 = \prod_{k \in [\![0, n-1]\!]} (X - \exp(\frac{2ik\pi}{n}) = \prod_{d|n} \prod_{k \in E_d} (X - \exp(\frac{2ik\pi}{n})$$

Soit $k \in E_d$ alors $\text{pgcd}(k, n) = d \Leftrightarrow \exists (k', n') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $k = dk'$ et $n = dn'$ avec $\text{pgcd}(k', n') = 1$. En particulier, on a

$$\left(\exp(\frac{2ik\pi}{n})\right) = \exp(\frac{2idk'\pi}{dn'}) = \exp(\frac{2ik'\pi}{n'}) \tag{25}$$

donc $\exp(\frac{2ik\pi}{n})$ est une racine $(n')^{ième} = (\frac{n}{d})^{ième}$ de l'unité et $\text{pgcd}(k', n') = 1$ donc $\exp(\frac{2ik\pi}{n})$ est une racine primitive $(\frac{n}{d})^{ième}$ de l'unité. Réciproquement, la formule (25) montre que toute racine primitive $(\frac{n}{d})^{ième}$ de l'unité $\exp(\frac{2ik'\pi}{n'})$ est de la forme

$$\exp(\frac{2idk'\pi}{dn'}) = \exp(\frac{2ik\pi}{n}) \text{ avec } \text{pgcd}(k, n) = \text{pgcd}(dk', dn') = d\,\text{pgcd}(k', n') = d \Leftrightarrow k \in E_d$$

Ainsi, dans le produit $\prod_{k \in E_d} (X - \exp(\frac{2ik\pi}{n})$, le complexe $\exp(\frac{2ik\pi}{n})$ décrit l'ensemble des racines $(\frac{n}{d})^{ième}$ de l'unité donc ce produit est égal à $\Phi_{n/d}(X)$, ce qui montre que

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_{n/d}(X).$$

L'application $d \mapsto \dfrac{n}{d}$ est une bijection de l'ensemble des diviseurs de n sur lui-même (si d divise n, alors $n = d \times k$ avec $k \in \mathbb{N}$ donc k divise n et $k = \dfrac{n}{d}$) donc

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X). \tag{26}$$

2. Pour commencer, on note que

$$n = \deg(X^n - 1) = \sum_{d|n} \deg \Phi_d.$$

Le degré de Φ_d est le nombre d'entiers de l'intervalle entier $[\![0, n-1]\!]$ premiers à d. Or, dans le cours sur l'arithmétique de sup, il a été montrer que $\text{pgcd}(k,d) = 1$ si et seulement si $\overline{k}$ inversible dans $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \times)$ si et seulement $\overline{k} \in ((\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times, \times)$ (groupe des inversibles de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \times)$). Ainsi, le degré de Φ_d est le cardinal $((\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times, \times)$ qui vaut justement $\varphi(d)$, ce qui nous donne la formule escomptée

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

3. Nous allons procéder par récurrence forte sur $n \geqslant 1$. Posons l'hypothèse $(\mathcal{H}_n) : \forall k \in [\![1,n]\!], \quad \Phi_k \in \mathbb{Z}[X]$.
Initialisation : si $n = 1$, il n'existe qu'une seule racines $1^{ème}$ de l'unité qui est 1 ($z^1 = 1$) et elle est nécessairement primitive donc $\Phi_1(X) = X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$.
Hérédité ; Supposons que $(\mathcal{H}_{n-1})$ soit vraie, c'est-à-dire que $\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \Phi_k \in \mathbb{Z}[X]$. La formule (26) montre que

$$X^n - 1 = \Phi_n(X) \prod_{\substack{d|n \\ d<n}} \Phi_d(X).$$

Notons $P(X)$ le polynôme $\prod\limits_{\substack{d|n \\ d<n}} \Phi_d(X)$. Par l'hypothèse $(\mathcal{H}_{n-1})$, ce polynôme est à coefficients entiers et son coefficient dominant est 1. Il s'écrit donc sous la forme $P(X) = X^N + b_{N-1}X^{N-1} + \cdots + b_0$. Ecrivons également $\Phi_n(X)$ sous la forme $a_{n-N}X^{n-N} + a_{n-N-1}X^{n-N-1} + \cdots + a_0$. Si l'on développe le produit

$$(X^N + b_{N-1}X^{N-1} + b_{N-2}X^{N-2} + \cdots + b_0)(a_{n-N}X^{n-N} + a_{n-N-1}X^{n-N-1} + a_{n-N-2}X^{n-N-2} + \cdots + a_0),$$

on obtient

$$a_{n-N}X^n + (a_{n-N-1} + b_{N-1}a_{n-N})X^{n-1} + (a_{n-N-2} + b_{N-1}a_{n-N-1} + b_{N-2}a_{n-N})X^{n-2} + \cdots$$

On en déduit que :

$$a_{n-N} = 1 \in \mathbb{Z}, \quad a_{n-N-1} + b_{N-1}a_{n-N} = 0 \Leftrightarrow a_{n-N-1} = -b_{N-1} \in \mathbb{Z},$$
$$a_{n-N-2} + b_{N-1}a_{n-N-1} + b_{N-2}a_{n-N} = 0 \Leftrightarrow a_{n-N-2} = -(b_{N-1}a_{n-N-1} + b_{N-2}a_{n-N}) \in \mathbb{Z}$$

Plus généralement, le coefficient de X^s est égal à $\sum\limits_{k=0}^{s} b_k a_{s-k}$, si l'on convient de poser $a_k = 0$ si $k > n - N$ et $b_k = 0$ si $k > N$. En particulier, $b_k a_{s-k} = 0$ si $k > N$ ou $s - k > n - N \Leftrightarrow k < s - n + N$, ce qui nous donne

$$\sum_{k=0}^{s} b_k a_{s-k} = \sum_{k=\max(0,s-n+N)}^{\min(s,N)} b_k a_{s-k}. \tag{27}$$

Premier cas : Si $n-N<N$ (donc $s-n+N\geqslant N-(n-N)>0$). Montrons par récurrence forte descendante, que pour tout $s\in\underline{[\![N,n]\!]}$, $a_{s-N}\in\mathbb{Z}$. Pour $s=n$, nous l'avons fait précédemment. Supposons que $a_{n-N},...,a_{s-N+1}$ soient des entiers relatifs. Puisque $s\geqslant N$ et que $s-n+N\geqslant N-n+N=N-(n-N)>0$, on a $\min(s,N)=N$ et $\max(0,s-n+N)=s-n+N$. La formule (27) nous montre que :

$$0 = \sum_{k=\max(0,s-n+N)}^{\min(s,N)} b_k a_{s-k} = \sum_{k=s-n+N}^{N} b_k a_{s-k} \Leftrightarrow b_N a_{s-N} + \sum_{k=s-n+N}^{N-1} b_k a_{s-k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{s-N} = -\sum_{k=s-n+N}^{N-1} b_k a_{s-k} \underset{q=s-k}{=} \sum_{q=s-N+1}^{n-N} b_{s-q} a_q \in \mathbb{Z}$$

donc a_{s-N} est bien un entier. Ainsi s'achève la récurrence et montre que :

$$\forall s\in[\![N,n]\!],\quad a_{s-N}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\forall s\in[\![0,n-N]\!],\quad a_s\in\mathbb{Z}\Rightarrow\Phi_n\in\mathbb{Z}[X]$$

Deuxième cas : Si $n-N\geqslant N$.

(a) Montrons par récurrence forte descendante, que pour tout $s\in\underline{[\![n-N,n]\!]}$, $a_{s-N}\in\mathbb{Z}$. Pour $s=n$, nous l'avons fait précédemment. Supposons que $a_{n-N},...,a_{s-N+1}$ soient des entiers relatifs. Puisque $s\geqslant n-N\geqslant N$ et que $s-n+N=s-(n-N)\geqslant 0$, on a $\min(s,N)=N$ et $\max(0,s-n+N)=s-n+N$. La formule (27) nous montre que

$$0 = \sum_{k=\max(0,s-n+N)}^{\min(s,N)} b_k a_{s-k} = \sum_{k=s-n+N}^{N} b_k a_{s-k} \Leftrightarrow b_N a_{s-N} + \sum_{k=s-n+N}^{N-1} b_k a_{s-k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{s-N} = -\sum_{k=s-n+N}^{N-1} b_k a_{s-k} \underset{q=s-k}{=} \sum_{q=s-N+1}^{n-N} b_{s-q} a_q.$$

Les réels $(a_q)_{s-N+1\leqslant q\leqslant n-N}$ appartiennent à l'ensemble $\{a_{s-N+1},...,a_{n-N}\}$. Ce sont donc des entiers relatifs et, puisque les (b_{s-q}) sont également des entiers relatifs, on en déduit que a_{s-N} est bien un entier. Ainsi s'achève la récurrence et montre que :

$$\forall s\in[\![n-N,n]\!],\quad a_{s-N}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\forall s\in[\![n-2N,n-N]\!],\quad a_s\in\mathbb{Z}. \tag{28}$$

(b) Montrons maintenant que $(a_0,..,a_{n-2N})$ sont des entiers relatifs. Pour cela nous allons montrer par récurrence forte descendante que Montrons par récurrence forte descendante, que pour tout $s\in\underline{[\![N,n-N]\!]}$, $a_{s-N}\in\mathbb{Z}$. Pour $s=n-N$, nous l'avons fait à la récurrence précédente. Supposons que $a_{(n-N)-N},...,a_{s-N+1}$ soient des entiers relatifs. Puisque $s\geqslant N$ et que $s-n+N=s-(n-N)\leqslant 0$, on a $\min(s,N)=N$ et $\max(0,s-n+N)=0$. La formule (27) nous montre que

$$0 = \sum_{k=\max(0,s-n+N)}^{\min(s,N)} b_k a_{s-k} = \sum_{k=0}^{N} b_k a_{s-k} \Leftrightarrow b_N a_{s-N} + \sum_{k=0}^{N-1} b_k a_{s-k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{s-N} = -\sum_{k=0}^{N-1} b_k a_{s-k} \underset{q=s-k}{=} \sum_{q=s-N+1}^{s} b_{s-q} a_q.$$

Les réels $(a_q)_{s-N+1\leqslant q\leqslant s}$ appartiennent à l'ensemble

$$\{a_{s-N+1},...,a_s\}\subset\{a_{s-N+1},...a_{n-2N},a_{n-2N+1},...,a_{n-N}\}.$$

Ce sont donc des entiers relatifs (par l'hypothèse de récurrence et par le fait que $a_{n-2N},...,a_{n-N}$ sont des entiers relatifs) et, puisque les (b_{s-q}) sont également des entiers relatifs, on en déduit que a_{s-N} est bien un entier. Ainsi s'achève la récurrence et montre que :

$$\forall s\in[\![N,n-N]\!],\quad a_{s-N}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\forall s\in[\![0,n-2N]\!],\quad a_s\in\mathbb{Z}. \tag{29}$$

Des formules (28) et (29), on en déduit que tous les $(a_0, ..., a_{n-N})$ sont des entiers relatifs donc $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

Remarque : nous venons de faire un peu mieux. Si P et Q sont deux polynômes à coefficients dans un anneau A contenu dans un corps K tel que Q soit unitaire. Si Q divise P dans $K[X]$ (i.e. $P = QS$ avec $S \in K[X]$) *alors Q divise P dans $A[X]$* (i.e. $S \in A[X]$).

Correction de l'exercice 3.1.7 :

1. Montrons que $\mathrm{Aut}\, G$ est un sous-groupe du groupe des bijections de G. $\mathrm{Id}_G \in \mathrm{Aut}\, G$, la composée de deux morphismes de G dans G est un moprhisme et la composée de deux bijections de G dans G est une bijection de G dans G Par conséquent, si f et $h \in \mathrm{Aut}\, G$ alors $f \circ h \in \mathrm{Aut}\, G$. Si $f \in \mathrm{Aut}\, G$, f^{-1} est une bijection de G dans lui-même. Soient $x, y \in G$,il existe $x', y' \in G$ tels que $x = f(x')$ et $y = f(y')$ donc
$$f^{-1}(x.y) = f^{-1}(f(x').f(y')) = f^{-1}(f(x'.y')) = x'.y' = f^{-1}(x).f^{-1}(y')$$
ce qui démontre que $f^{-1} \in \mathrm{Aut}\, G$.
2. Soit $a \in G$. L'application φ_a est une application de G dans G et c'est un morphisme de groupe car :
$$\forall x, y \in G, \quad \varphi_a(x.y) = a.x.ya^{-1} = (a.x.a^{-1})(a.y.a^{-1}) = \varphi_a(x).\varphi_a(y).$$
L'application φ_a est une bijection de G dans G car
$$\forall x, y \in G, \quad \varphi_a(x) = y \Leftrightarrow a.x.a^{-1} = y \Leftrightarrow x = a^{-1}.y.a \Leftrightarrow x = (a^{-1})^{-1}.y.a^{-1} \Leftrightarrow x = \varphi_{a^{-1}}(y)$$
et $\varphi_{a^{-1}}$ est sa bijection réciproque.
3. *Rappel : un groupe cyclique est un groupe engendré par un élément. Tout groupe cyclique est isomorphe à un groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$ (ou $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ qui lui est isomorphe) s'il est fini de cardinal n ou isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$ s'il est infini. Or tout sous-groupe de $(\mathbb{U}_n, \times)$ est cyclique (soit $(G, \times)$ est un tel sous-groupe d'ordre d. Le théorème de Lagrange montre que $\forall x \in G \subset \mathbb{U}_n \subset \mathbb{C}^\times, \quad x^d = 1$. Le groupe $(G, \times)$ est inclu dans le groupe $(\mathbb{U}_d, \times)$ qui est également de cardinal d donc $G = \mathbb{U}_d$ est cyclique) et tout sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ est de la forme $a\mathbb{Z}$ qui est cyclique. Par conséquent, tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.*
Nous avons montré dans la question précédente que, pour tout $a \in G$, $\varphi_a \in \mathrm{Aut}\, G$ et $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}} \in \mathrm{Aut}\, G$. Montrons que $H = \{\varphi_a, \quad a \in G\} \subset \mathrm{Aut}\, G$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}\, G$. Il contient $\mathrm{Id}_G = \varphi_1$ qui est l'élément neutre de $\mathrm{Aut}\, G$. Il est stable par passage à l'inverse. Il nous suffit donc de montrer qu'il est stable par "produit" (qui est ici la composition) :
$$\begin{aligned} \forall a, b &\in G, \quad \forall x \in G \quad (\varphi_a \circ \varphi_b)(x) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = \varphi_a(b.x.b^{-1}) = a.(b.x.b^{-1}).a^{-1} \\ &= (a.b).x.b^{-1}.a^{-1} = (a.b).x.(a.b)^{-1} = \varphi_{a.b}(x) \Rightarrow \forall a, b \in G, \quad \varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{a.b} \in H, \end{aligned}$$
donc H est bien un sous-groupe de $\mathrm{Aut}\, G$ qui est cyclique. Par conséquent, H est un groupe cyclique. Soit φ_c un générateur de H et soit a un élément quelconque de G. Il existe un entier n tel que
$$\varphi_a = (\varphi_c)^n = \varphi_c \circ \cdots \varphi_c = \varphi_{c^n}.$$
On en déduit que
$$\begin{aligned} &\varphi_a \circ (\varphi_{c^n})^{-1} = \mathrm{Id}_G \Leftrightarrow \varphi_a \circ \varphi_{c^{-n}} = \mathrm{Id}_G \Leftrightarrow \varphi_{a.c^{-n}} = \mathrm{Id}_G \\ \Leftrightarrow \forall x \in G, &\quad (a.c^{-n}).x.(a.c^{-n})^{-1} = x \Leftrightarrow \forall x \in G, \quad (a.c^{-n}).x = x.(a.c^{-n}). \end{aligned}$$
Ainsi, pour tout élément $a \in G$, il existe un entier n tel que $a.c^{-n}$ commute avec tous les éléments de G (on dit que $a.c^{-n}$ appartient au centre $Z(G)$ de G). On peut encore dire que $a = c^n.z$ où $z \in Z(G)$.
Montrons maintenant que G est commutatif. Soient a et b deux éléments quelconques de G. Il existe deux entiers relatifs n et m et deux éléments z, z' de $Z(G)$ tels que $a = c^n.z$ et $b = c^m.z'$. :
$$a.b = c^n.z.c^m.z' \underset{\text{par def de } Z(G)}{=} c^n.c^m.z.z' = c^{n+m}.z'.z = c^m.c^n.z'.z \underset{\text{par def de } Z(G)}{=} c^m.z'.c^n.z = b.a,$$
ce qui démontre bien que deux éléments quelconques de G commutent.

4.

Aut G **lorsque** $G = (\mathbb{Z}, +)$ Soit f un élément de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}, +)$.

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}, \quad f(n+m) = f(n) + f(m).$$

Une simple récurrence, que je laisse au lecteur, montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = f(1)n$. Puisque f est un morphisme, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(-n) = -f(n) = -f(1)n = f(1)(-n)$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \underbrace{f(1)}_{\in\mathbb{Z}} n.$$

Réciproquement, il est immédiat qu'une application de la forme

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f_\alpha(n) = \alpha n, \text{ où } \alpha \in \mathbb{Z},$$

est un morphisme de $(\mathbb{Z}, +)$. Soit f_α un tel morphisme. Pour que f soit surjectif, il est indispensable que 1 (qui est le générateur de $(\mathbb{Z}, +)$) admette un antécédent n, i.e.

$$f_\alpha(n) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{\alpha}_{\in\mathbb{Z}} \underbrace{n}_{\in\mathbb{Z}} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1.$$

Par conséquent, f est surjectif il est indispensable que $\alpha = \pm 1$. Réciproquement, supposons que $\alpha = \pm 1$ alors $f_\alpha = \pm \mathrm{Id}_\mathbb{Z}$ qui est bien bijectif de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$. On en déduit que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}, +) = \{\pm \mathrm{Id}_\mathbb{Z}\} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ (par $F : a \mapsto f_a$, je laisse le soin au lecteur de vérifier qu'il s'agit bien d'un morphisme bijectif de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ sur $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}, +)$).

Aut G **lorsque** $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ Soit f un élément de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

$$\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad f(\overline{a} + \overline{b}) = f(\overline{a}) + f(\overline{b}).$$

Une simple récurrence, que je laisse au lecteur, montre que $\forall a \in \mathbb{N}, \quad f(\overline{a}) = af(\overline{1}) = \overline{a}f(\overline{1})$ (par définition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a : $k.\overline{s} = \overline{ks} = \overline{k}.\overline{s}$) Puisque $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{a}, \quad a \in \mathbb{N}\}$, on déduit que :

$$\forall \overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad f(\overline{a}) = \overline{a}f(\overline{1}).$$

Réciproquement, il est immédiat qu'une application de la forme

$$\forall \overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad f_{\overline{\alpha}}(\overline{a}) = \overline{\alpha}.\overline{a}, \text{ où } \alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

est un morphisme de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Soit $f_{\overline{\alpha}}$ un tel morphisme. Pour que $f_{\overline{\alpha}}$ soit surjectif, il est indispensable que $\overline{1}$ (qui est le générateur de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$) admette un antécédent $\overline{a}$, i.e.

$$f(\overline{a}) = \overline{1} \Leftrightarrow \overline{\alpha}.\overline{a} = 1 \Leftrightarrow \overline{\alpha} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$$

où $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$. Réciproquement, $\overline{\alpha} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, le morphisme $f_{\overline{\alpha}}$ est bijectif car

$$\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad f_{\overline{\alpha}}(\overline{a}) = \overline{b} \Leftrightarrow \overline{\alpha}.\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{\alpha}^{-1}.\overline{b}.$$

On en déduit que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) = \{f_{\overline{\alpha}}, \quad \overline{\alpha} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\} \simeq ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \times)$ (par $F : \overline{\alpha} \mapsto f_{\overline{\alpha}}$, je laisse le soin au lecteur de vérifier qu'il s'agit bien d'un morphisme bijectif de $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \times)$ sur $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$).

Aut G **lorsque** $G = (\mathbb{Z}^2, +)$ Soit f un élément de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2, +)$.

$$\forall (a,b), (a',b') \in \mathbb{Z}^2, \quad f((a,b)+(a',b')) = f(a,b)+f(a',b') \Leftrightarrow f(a+a', b+b') = f(a,b)+f(a',b')$$

On constate alors que $a \mapsto f(a,0)$ et $b \mapsto f(b,0)$ sont des morphismes de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}^2$. En mimant la méthode employée dans la question 1, on en déduit que

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \quad f(a,0) = af(1,0) \text{ et } \forall b \in \mathbb{Z}, \quad f(0,b) = bf(0,1).$$

Les deux éléments $f(1,0)$ et $f(0,1)$ sont des éléments de $\mathbb{Z}^2$ donc il existe $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{Z}^4$ tel que

$$f(1,0)=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \text{ et } f(0,1)=\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\forall (a,b)\in\mathbb{Z}^2,\quad f(a,b)=f(a,0)+f(0,b)=a\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\alpha+b\gamma\\ a\beta+b\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix},$$

où $\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$. Réciproquement soit $A\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$, l'application

$$f_A:\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\mapsto A\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

est un morphisme de $(\mathbb{Z}^2,+)$ dans $(\mathbb{Z}^2,+)$. Si f_A est bijective, alors f_A^{-1} est un morphisme de $(\mathbb{Z}^2,+)$ dans $(\mathbb{Z}^2,+)$ donc il existe une matrice $B\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $f_A^{-1}=f_B$ donc $f_A\circ f_B=\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}^2}$, ce qui signifie que

$$\forall (a,b)\in\mathbb{Z}^2,\quad AB\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\Leftrightarrow\forall (a,b)\in\mathbb{Z}^2,\quad (AB-I_2)\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Si nous écrivons $AB-I_2=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

donc $AB-I_2=0_2$ et A est inversible dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et son inverse est B.
En passant au déterminant dans l'égalité $AB=I_2$, on obtient $\det A\det B=1$. Puisque $\det A$ et $\det B$ sont des entiers relatifs, on en déduit que $\det A=\pm 1$. Réciproquement, si A est une matrice à coefficients entiers dont le déterminant est ± 1, la matrice $A=\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}$ est inversible dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et son inverse est $\pm\begin{pmatrix}\delta & -\gamma\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$ qui est également à coefficients entiers.
Si l'on note $GL_2(\mathbb{Z})=\{A\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z}) \text{ telle que } \det A=\pm 1\}$, $GL_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication des matrices. Tous les morphismes bijectifs de $(\mathbb{Z}^2,+)$ dans lui-même sont de la forme f_A, avec $A\in GL_2(\mathbb{Z})$. Réciproquement si $A\in GL_2(\mathbb{Z})$, le morphisme f_A est un automorphisme de $(\mathbb{Z}^2,+)$ dont la réciproque est $f_A^{-1}=f_{A^{-1}}$.
Par conséquent, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2,+)=\{f_A,\quad A\in(GL_2(\mathbb{Z}),\times)\}\simeq(GL_2(\mathbb{Z}),\times)$ ((par $F:A\mapsto f_A$, je laisse le soin au lecteur de vérifier qu'il s'agit bien d'un morphisme bijectif de $(GL_2(\mathbb{Z}),\times)$ sur $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2,+)$).

Aut G **lorsque** $G=(\mathcal{S}_3,\circ)$ Soit f un élément de $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_3,\circ)$. Le groupe $(\mathcal{S}_3,\circ)$ est engendré par les transpositions $(1,2)$, $(2,3)$, $(1,3)$ donc la connaissance d'un automorphisme découle de la connaissance de l'image de ces trois transpositions. Néanmoins, ces transpositions satisfont à la relation

$$\text{pour tout triplet } (i,j,k) \text{ d'éléments distincts de } \{1,2,3,\},\quad (i,j)(j,k)(i,j)^{-1}=(i,k).$$

La connaissance de l'image de deux transpositions $(1,2)$ et $(2,3)$ induit la connaissance de l'image de la troisième transposition $(1,3)$. Pour la première transposition $(1,2)$, on a trois possibilités pour son image $f(1,2)$ et la seconde $(2,3)$ dispose alors de deux possibilités (si on exige que f soit bijective). Ces deux images étant fixées, on en déduit l'image de $(1,3)=(1,2)(2,3)(1,2)^{-1}$ qui est $f(1,2)f(2,3)(f(1,2))^{-1}$. On en déduit également l'image

des trois cycles $(1,2,3)=(1,2)(2,3)$ (qui est $f(1,2)f(2,3)$) et $(1,3,2)=(2,3)(1,2)$ (qui est $f(2,3)f(1,2)$). Bien entendu, puisque $f(\mathrm{Id})=\mathrm{Id}$ est fixé, on a au plus six éléments (qui est le cardinal de $\mathcal{S}_3$) dans le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_3,\circ)$.
D'autre part, on sait que pour toute permutation $\sigma\in\mathcal{S}_3$, l'application $\varphi_\sigma:\tau\mapsto\sigma\tau\sigma^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}_3$. Si nous pouvons montrer que les φ_σ sont deux à deux distincts, c'est-à-dire si l'application $\sigma\mapsto\varphi_\sigma$ est injective, nous saurons que le cardinal de $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_3,\circ)$ est six et que $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_3,\circ)=\{\varphi_\sigma,\quad \sigma\in\mathcal{S}_3\}$. L'application $\psi:\sigma\mapsto\varphi_\sigma$ est un morphisme de $(\mathcal{S}_3,\circ)$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_3,\circ)$ (cf. après le rappel de la question 3). Soit $\sigma\in\mathcal{S}_3$ un élément du noyau de ψ.

$$\forall\tau\in\mathcal{S}_3,\quad \sigma\tau\sigma^{-1}=\tau\Leftrightarrow\forall\tau\in\mathcal{S}_3,\quad \sigma\tau=\tau\sigma,$$

ce qui signifie que σ commute avec tous les éléments de $\mathcal{S}_3$. Supposons que σ soit différent de l'identité donc σ est un 2-cycle ou un 3-cycle. On sait, d'après le cours sur les transpositions, que deux cycles quelconques commutent si et seulement si leurs supports respectifs sont disjoints. L'explication précédente des cycles de $\mathcal{S}_3$ montre que deux cycles distincts n'ont jamais leurs supports disjoints ce qui nous fournit une contradiction donc $\sigma=\mathrm{Id}$, ce qui démontre que $\ker\psi=\{\mathrm{Id}\}$ et ψ est injectif. Or c'est une application d'un ensemble à 6 éléments dans un ensemble à au plus 6 éléments donc $\mathrm{card}(\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_3,\circ))=6$ et ψ est bijective. On en conclu que

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_3,\circ)=\{\varphi_\sigma,\quad \sigma\in\mathcal{S}_3\}\simeq(\mathcal{S}_3,\circ)\text{ (par l'application }\psi\,!)$$

Correction de l'exercice 3.1.8 : $x=\overline{1}$ est une racine évidente de $x^3-\overline{21}x^2+\overline{29}x-\overline{9}$. On ne peut néanmoins factoriser, à priori, par $(X-\overline{1})$ le polynôme $X^3-\overline{21}X^2+\overline{29}X-\overline{9}$ car $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas un corps. L'idée est de relever chaque polynôme dans $\mathbb{Z}[X]$, d'effectuer la division euclidienne de $X^3-21X^2+29X-9$ par $X-1$ dans $\mathbb{Z}[X]$ puis de replacer aux classes modulo 4 (tout comme si on souhaite factoriser un polynôme sur $\mathbb{R}$, on le factorise dans $\mathbb{C}$ puis on repasse à $\mathbb{R}$ par regroupement). Je laisse le soin au lecteur de vérifier que $X^3-21X^2+29X-9=X^2-20X+9$ donc, en passant modulo 4, on a

$$X^3-\overline{21}X^2+\overline{29}X-\overline{9}=(X^2-\overline{20}X+\overline{9})(X-\overline{1})=(X^2+\overline{1})(X-\overline{1})$$

car $20=4\times5$ et $9=2\times4+1$. On constate que le polynôme $X^2+\overline{1}$ n'admet aucune racine dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (en testant $X=\overline{0},..,\overline{3}$). On ne peut donc le factoriser au dela (il est de degré 2 donc si on peut le factoriser, l'un des facteurs est nécessairement de degré 1. *Je laisse le lecteur méditer sur la factorisation de* X^4+1 *sur* $\mathbb{R}$). Ainsi, on obtient l'équivalence

$$x^3-\overline{21}x^2+\overline{29}x-\overline{9}=\overline{0}\Leftrightarrow(x^2+\overline{1})(x-\overline{1})=\overline{0}.$$

La table de multiplication de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,

a \ b	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

nous montre que le produit de deux éléments est nul si et seulement si l'un des deux est nul ou les deux sont égaux à $\overline{2}$ (on ressort la table de multiplication de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$). Par conséquent,

$$\begin{aligned}(x^2+\overline{1})(x-\overline{1}) &= \overline{0}\Leftrightarrow\left(\left\{\begin{array}{ll}x-\overline{1}&=\overline{0}\\ x^2+\overline{1}&=\overline{0}\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{ll}x-\overline{1}&=\overline{2}\\ x^2+\overline{1}&=\overline{2}\end{array}\right.\right)\\ &\Leftrightarrow\left(\underbrace{\left\{\begin{array}{l}x=\overline{1}\\ \overline{1}^2+\overline{1}=0\end{array}\right.}_{\text{impossible}}\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}x=\overline{3}\\ \overline{3}^2+\overline{1}=\overline{2}\end{array}\right.\right)\Leftrightarrow x=\overline{3}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3.1.9 : Si p est un nombre premier, $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ est un groupe additif mais aussi un corps. En particulier, si $\overline{a}$ désigne $a \bmod p$, alors pour tous $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\overline{a}.\overline{b} = \overline{0}$ si et seulement si $\overline{a} = \overline{0}$ ou $\overline{b} = \overline{0}$. En remarquant, que si $a \in \mathbb{Z}$ et $\overline{b} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors $a.\overline{b} \underset{\text{par def}}{=} \overline{a}.\overline{b} \underset{\text{par def}}{=} \overline{ab}$, on en déduit que $a.\overline{b} = \overline{0}$ si et seulement si $p \mid a$ ou $\overline{b} = \overline{0}$.
Soit f un morphisme de groupe de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

$$7f(1 \bmod 7) = f(7 \bmod 7) = f(0 \bmod 7) = 0 \bmod 13$$

et comme 7 n'est pas divisible par 13, on en déduit que $f(1 \bmod 7) = 0 \bmod 13$ donc

$$\forall k \in [\![0, 6]\!], \quad f(k \bmod 7) = f(k.(1 \bmod 7)) = kf(1 \bmod 7) = k(0 \bmod 13) = 0 \bmod 13$$

donc $f = 0$.

Correction de l'exercice 3.1.10 :

1. Si $\lambda \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $x \in E$, alors $\lambda x \in E$. Je laisse le lecteur se convaincre que toutes autres conditions nécessaires à l'obtention d'un k-espace vectoriel sont satisfaites. Supposons que E soit un $\mathbb{C}$-espace vectoriel dont $(e_1, .., e_n)$ est une base. Alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ avec $x_k \in \mathbb{C}$. Soient $a_k = \mathrm{Re}(x_k)$ et $b_k = \mathrm{Im}(x_k)$ alors $x = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k + \sum_{k=1}^{n} b_k(ie_k)$ donc $(e_1, .., e_n, ie_1, .., ie_n)$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Il reste simplement à montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Soient $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et $(b_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de réels telle que
$$\sum_{k=1}^{n} a_k e_k + \sum_{k=1}^{n} b_k(ie_k) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (\underbrace{a_k + ib_k}_{\in \mathbb{C}})e_k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \quad a_k + ib_k = 0$$
et, puisque a_k et b_k sont des réels, $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad a_k = b_k = 0$. On en déduit que :$\dim_{\mathbb{R}} E = 2 \dim_{\mathbb{C}} E$.
Soit $X = (x_i)_i$ un vecteur propre de $A = (a_{i,j})$ associé à la valeur propre λ donc $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. On note $\overline{A} = (\overline{a_{i,j}})_{i,j}$ et $\overline{X} = (\overline{x_i})_i$. Les formules de multiplication des matrices montrent que $\overline{A}.\overline{X} = \overline{A.X}$. Puisque A est à coefficients réels, on en déduit que $A.\overline{X} = \overline{A.X} = \overline{\lambda X} = \overline{\lambda}.\overline{X}$ et $\overline{X} \neq 0$ donc X est un vecteur propre de A associé à $\overline{\lambda}$.
2. La matrice A admet comme polynôme annulateur $P(x) = x^3 - x - 1$.La dérivée de P est $P'(x) = 3x^2 - 1$ qui s'annule en $\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}\alpha$ et $-\alpha$. D'autre part, $P(-\alpha) < 0$ et $P(\alpha) < 0$, ce qui nous donne le tableau de variation

x	$-\infty$		$-\alpha$		α		$+\infty$
$P'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$P(x)$		$\nearrow$	< 0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$				< 0		

On en déduit que P n'admet qu'une seule valeur propre réelle λ qui est strictement positive.
– Si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ alors λ est sa seule valeur propre donc A est semblable à λI_n donc $A = \lambda I_n$, ce qui implique que $\det A = \lambda^n > 0$.
– Si A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Le polynôme P est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ sinon, il possède une racine $z \in \mathbb{C}$ qui est d'ordre au moins 2, c'est-à-dire racine de P et P'. Or P' n'admet que α et $-\alpha$ comme racines et $P(-\alpha) \neq 0$ et $P(\alpha) \neq 0$ donc P est bien scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Comme P n'admet qu'une racine réelle, les deux autres sont complexes et conjuguées (si $P(z) = 0$ alors $0 = \overline{P(z)} = P(\overline{z})$ car P est à coefficients réels). Notons les ξ et $\overline{\xi}$. Puisque le coefficient constant de P est non nul, les racines ξ et $\overline{\xi}$ sont non nulles. La matrice A est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Comparons les multiplicités de ξ et $\overline{\xi}$.

$\mathbb{C}^n$ étant naturellement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, l'application $f : X \mapsto \overline{X}$ est application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$. Elle est involutive, c'est-à-dire $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$ donc elle est bijective et sa réciproque est elle-même. La question 1 montre que $f(\ker(A-\xi I_n)) \subset \ker(A-\overline{\xi}I_n)$ et $f(\ker(A-\overline{\xi}I_n)) \subset \ker(A-\xi I_n)$ et chacun des espaces $\ker(A-\xi I_n)$ et $\ker(A-\overline{\xi}I_n)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Puisque f est involutive,

$$\ker(A-\overline{\xi}I_n) = f^2(\ker(A-\overline{\xi}I_n)) \subset f(\ker(A-\xi I_n)) \subset \ker(A-\overline{\xi}I_n),$$

on en déduit que

$$f(\ker(A-\xi I_n)) = \ker(A-\overline{\xi}I_n)$$

et en composant par f, on en déduit également que

$$f(\ker(A-\overline{\xi}I_n)) = \ker(A-\xi I_n).$$

L'endomorphisme f étant un $\mathbb{R}$-isomorphisme, il réalise un isomorphisme de $\ker(A-\xi I_n)$ sur $\ker(A-\overline{\xi}I_n)$ donc leurs dimensions, sur $\mathbb{R}$, sont égales et la question 1 montre alors que

$$\dim_{\mathbb{C}}(\ker(A-\overline{\xi}I_n)) = \dim_{\mathbb{C}}(\ker(A-\xi I_n)).$$

Notons $p = \dim\ker(A-\lambda I_n)$ et $q = \dim_{\mathbb{C}}(\ker(A+\xi I_n)) = \dim_{\mathbb{C}}(\ker(A-\overline{\xi}I_n)$. On en déduit qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda,..,\lambda}_{p \text{ fois}},\underbrace{\xi,..,\xi}_{q \text{ fois}},\underbrace{\overline{\xi},..,\overline{\xi}}_{q \text{ fois}})$$

donc $\det A = \lambda^p \xi^q \overline{\xi}^q = \lambda^p (\xi\overline{\xi})^q = \lambda^p |\xi|^{2q} > 0$.

3.

(a) En passant au déterminant, on obtient $\det A^2 = \det(-I_n) \Leftrightarrow (\det A)^2 = (-1)^n$. Puisque A est à coefficients réels, $\det A$ est un réel et $(\det A)^2$ est un réel positif donc $(-1)^n$ est positive, c'est-à-dire n est pair.

(b) La matrice A est annulée par le polynôme $X^2+1 = (X+i)(X-i)$ qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres possibles sont i et $-i$. Si A n'admet qu'une seule valeur propre $\pm i$ alors elle est semblable à la matrice $\pm iI_n$ donc elle est égale à $\pm iI_n$, ce qui est absurde car elle est à coefficients réels. Donc les valeurs propres de A sont i et $-i$.
Remarque : par contre, A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sinon elle admettrait au moins une valeur propre réelle λ qui est nécessairement racine de X^2+1, ce qui est impossible.
La matrice A étant diagonalisable sur $\mathbb{C}$, on a $\dim_{\mathbb{C}}(\ker(A+iI_n)) = \dim_{\mathbb{C}}(\ker(A-iI_n))$ (comme cela a été vu à la question 2) et

$$2p = n = \dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n = \dim_{\mathbb{C}}(\ker(A+iI_n)) + \dim_{\mathbb{C}}(\ker(A-iI_n)) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\ker(A-iI_n))$$

donc

$$\dim_{\mathbb{C}}(\ker(A+iI_n)) = \dim_{\mathbb{C}}(\ker(A-iI_n)) = p.$$

Soit $(e_1,..,e_p)$ une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\ker(A-iI_n)$ alors $f(e_1,..,e_p)) = (\overline{e_1},..,\overline{e_p})$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\ker(A-iI_n)$. Pour $k \in [\![1,p]\!]$, les vecteurs

$$f_k = \mathrm{Re}(e_k) = \frac{e_k+\overline{e_k}}{2} \text{ et } g_k = \mathrm{Im}(e_k) = \frac{e_k-\overline{e_k}}{2i}$$

sont à coordonnées réelles. Montrons qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^n$. Puisque nous disposons de $p+p = 2p = n$ vecteurs, il suffit de montrer qu'ils sont linéairement indépendants. Soient $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ des réels tels que

$$\sum_{k=1}^{p} a_k f_k + \sum_{k=1}^{p} b_k g_k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p} a_k \frac{e_k+\overline{e_k}}{2} + \sum_{k=1}^{p} b_k \frac{e_k-\overline{e_k}}{2i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p} (\frac{ia_k+b_k}{2i})e_k + \sum_{k=1}^{p} (\frac{ia_k-b_k}{2i})\overline{e_k} = 0$$

Nous disposons donc d'une combinaison linéaire des vecteurs $(e_1,..,e_p,\overline{e_1},..,\overline{e_p})$ qui forment une base de $\mathbb{C}^n$ donc

$$\forall k\in[\![1,p]\!],\quad \frac{ia_k+b_k}{2i}=\frac{ia_k-b_k}{2i}=0$$

et donc les a_k et les b_k sont des réels, on en déduit qu'ils sont tous nuls, ce qui nous fournit la liberté de la famille $\mathcal{B}=(f_1,..,f_p,g_1,..,,g_p)$. Evaluons l'image des éléments de cette base par A.

$$\begin{aligned}Af_k &= A\frac{e_k+\overline{e_k}}{2}=\frac{1}{2}(Ae_k+A\overline{e_k})=\frac{1}{2}(ie_k-i\overline{e_k})=i\frac{e_k-\overline{e_k}}{2}=-\frac{e_k-\overline{e_k}}{2i}=-g_k\\ Ag_k &= A\frac{e_k-\overline{e_k}}{2i}=\frac{1}{2i}(Ae_k-A\overline{e_k})=\frac{1}{2i}(ie_k+i\overline{e_k})=\frac{e_k+\overline{e_k}}{2}=f_k\end{aligned}$$

Soit u l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} & & -1 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & 1\\ 1 & & & & \\ & \ddots & & (0) & \\ & & 1 & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0_p & -I_p\\ I_p & 0_p\end{pmatrix}.$$

Si P désigne la matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dans la base $\mathcal{B}$, on a $A=P\begin{pmatrix}0_p & -I_p\\ I_p & 0_p\end{pmatrix}P^{-1}$. La réciproque est laissée au lecteur.

Correction de l'exercice 3.1.11 :

Réduction du problème L'égalité $f(AB)=f(A)f(B)$ implique que $f(I)=f(I^2)=f(I)^2$ et comme $f(I)>0$, on en déduit que $f(I)=1$. On en déduit que $1=f(I)=f(AA^{-1})=f(A)f(A^{-1})$ donc $f(A^{-1})=\dfrac{1}{f(A)}$.

Soient $x(a)=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ une dilatation et $y(b)=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ une transvection. On a la relation suivante

$$x(a)y(b)(x(a))^{-1}(y(b))^{-1}=\begin{pmatrix}1 & (a-1)b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=y((a-1)b).$$

qui montre que :

$$\forall b\in\mathbb{R},\quad f(y(b))=f([x(2))y(b)(x(2))^{-1}(y(b))^{-1}])=\frac{f(x(2))f(y(b))}{f(x(2))f(y(b))}=1.$$

Si l'on pose $z(b)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{pmatrix}$ et $w=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ alors $z(b)=wy(b)w^{-1}$ donc

$$f(z(b))=\frac{f(w)f(y(b))}{f(w)}=f(y(b))=1.$$

Nous venons de montrer que l'image par f de toute transvection est égale à 1. Soit $A\in GL_2(\mathbb{R})$ alors $A=A_1...A_m$ où A_i est soit une transvection, soit une dilatation. Puisque $f(A)=f(A_1)...f(A_m)$ et que $f(A_i)=1$ si A_i est une transvection, on en déduit que $f(A)$ est le produit uniquement des images des dilatations. L'identité $wx(a)w^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$ nous montre que $f(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix})=f(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ nous montre que nous montre que l'on peut supposer que toutes ces dilatations sont de la forme $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et leur produit est égal à $\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, où c est le produit des

éléments diagonaux des dilatation. Or le produit des éléments diagonaux des dilations intervenants dans la décomposition de A est égal à $\det A$ (puisque le déterminant de toute transvection est égal à 1). Ainsi, nous venons de montrer que

$$\forall A \in GL_2(\mathbb{R}), \quad f(A) = f(\begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

Détermination d'une fonction auxiliaire On introduit alors la fonction $g : \mathbb{R}_\times \to \mathbb{R}_+^\times, \quad g(a) = f(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$. L'équation fonctionnelle satisfaite par f nous fournit l'équation fonctionnelle satisfaite par g :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^\times, \quad g(ab) = g(a)g(b). \tag{30}$$

En outre, l'application $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est continue de $\mathbb{R}^\times$ dans $GL_2(\mathbb{R})$ et f est continue sur $GL_2(\mathbb{R})$ donc g est continue sur $\mathbb{R}^\times$. Si nous savons déterminer g sur $\mathbb{R}_+^\times$ ainsi que $g(-1)$ alors on connait g sur $\mathbb{R}_-^\times$ en remarquant que $g(-a) = g(-1)g(a)$. Remarquons pour commencer que l'on détermine g sur $\mathbb{R}_+^\times$ car $\mathbb{R}_+^\times$ est stable par produit, ce qui n'est pas le cas de $\mathbb{R}_-^\times$.
Pour commencer $g(1) = g(1 \times 1) = g(1)g(1)$ donc $g(1) = 1$ car $g(1) > 0$. Supposons que g soit dérivable en 1 et montrons que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$. Soit $x > 0$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \frac{g(x(1+\frac{h}{x})) - g(x)}{h} = \frac{g(x)g(1+\frac{h}{x}) - g(x)}{h} = g(x)\frac{g(1+\frac{h}{x}) - 1}{h} \\ &= g(x)\frac{g(1+\frac{h}{x}) - g(1)}{h} = \frac{g(x)}{x}.\frac{g(1+\frac{h}{x}) - g(1)}{\frac{h}{x}} \end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, $\dfrac{g(1+\frac{h}{x}) - g(1)}{\frac{h}{x}}$ tend vers $g'(1)$ (en effectuant le changement de variable $t = \dfrac{h}{x}$) donc la limite du taux d'accroissement $h \mapsto \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$ en 0 est un réel fini. On en déduit que g est dérivable en x et

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = g'(1)\frac{g(x)}{x}.$$

Notons $A = g'(1) \in \mathbb{R}$. La résolution directe de cette équation différentielle définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ nous montre que

$$\forall x > 0, \quad g(x) = Cx^A.$$

Puisque $g(1) = 1$, on en déduit que

$$\forall x > 0, \quad g(x) = x^A.$$

L'égalité

$$1 = g(1) = g(-1 \times (-1)) = g(-1)g(-1) = g(-1)^2$$

montre que $g(-1) = \pm 1$. Si $g(-1) = 1$ alors

$$\forall x > 0, \quad g(-x) = g(-1)g(x) = x^A \Leftrightarrow \forall x < 0, \quad g(x) = (-x)^A$$

et la fonction g est définie par $g(x) = \begin{cases} x^A \text{ si } x > 0 \\ (-x)^A \text{ si } x < 0 \end{cases}$, ce que l'on peut résumer par $g(x) = |x|^A$.
Si $g(-1) = -1$ alors

$$\forall x > 0, \quad g(-x) = g(-1)g(x) = -x^A \Leftrightarrow \forall x < 0, \quad g(x) = -(-x)^A$$

et la fonction g est définie par $g(x) = \begin{cases} x^A \text{ si } x > 0 \\ -(-x)^A \text{ si } x < 0 \end{cases}$, ce que l'on peut résumer par $g(x) = \text{sgn}(x)\,|x|^A$, où $\text{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$ et -1 si $x < 0$.
Au final, les fonctions g recherchées sont de la forme

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \exists \varepsilon \in \{0,1\} \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad g(x) = \text{sgn}(x)^\delta\,|x|^\alpha \tag{31}$$

Réciproquement, toute fonction de cette forme est C^∞ sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ donc sur $\mathbb{R}^\times$ et elle satisfait à l'équation fonctionnelle (30) (si $\varepsilon = 0$, c'est évident, et si $\delta = 1$ cela découle de la règle des signes).
Montrons que toute fonction g continue sur $\mathbb{R}^\times$ qui satisfait à (30) est continue en 1. Puisque l'on ne peut encore dériver, on va intégrer !

$$\forall x > 0, \quad \forall s > 0, \quad \int_1^s g(xy)dy = g(x)\int_1^s g(y)dy \underset{t=xy}{\Leftrightarrow} \int_x^{xs} g(t)dt = g(x)\int_1^s g(y)dy \Leftrightarrow \int_1^{xs} g(t)dt - \int_1^x g(t)dt = g(x)$$

La fonction g étant continue sur $\mathbb{R}_+^\times$, la fonction $G : x \mapsto \int_1^x g(t)dt$ est l'unique primitive de g s'annulant en 1. L'"aglité précédente s'écrit alors

$$\forall x > 0, \quad \forall s > 0, \quad G(xs) - G(x) = g(x)G(s). \tag{32}$$

Par définition de G, G est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$, $G(1) = 0$ et $G'(1) = g(1) = 1$ donc la fonction G est strictement croissante au voisinage de 1.Il existe un voisinage V de 1 contenu dans $]0,+\infty[$ tel que

$$\forall x \in V\backslash\{1\}, \quad G(x) \neq 0.$$

La continuité de g en 1 montre qu'il existe un voisinage W de 1 dans lequel g ne s'annule pas. En combinant ces deux derniers résultats, on en déduit l'existence d'un intervalle $]1-\varepsilon,1+\varepsilon[$ tel que

$$\forall x \in]1-\varepsilon,1+\varepsilon[\backslash\{1\}, \quad G(x) \neq 0 \text{ et } \forall x \in]1-\varepsilon,1+\varepsilon[, \quad g(x) \neq 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \forall x \quad \in \quad &]1-\varepsilon,1+\varepsilon[, \quad \forall s \in]1-\varepsilon,1+\varepsilon[\backslash\{1\}, \quad g(x) = \frac{G(xs)-G(x)}{G(s)} \\ \Rightarrow \quad & \forall x \in]1-\varepsilon,1+\varepsilon[, \quad g(x) = \frac{G(x(1+\frac{\varepsilon}{2}))-G(x)}{G(1+\frac{\varepsilon}{2})} \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{G(x(1+\frac{\varepsilon}{2}))-G(x)}{G(1+\frac{\varepsilon}{2})}$ est clairement C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc g est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$, ce qui est mieux que ce que l'on escomptait et achève la détermination complète de g.
Nous sommes en droit d'affirmer que toute application de la forme

$$\forall A \in GL_2(\mathbb{R}), \quad f(A) = \text{sgn}(\det A)^\delta\,|\det A|^\alpha, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in \{0,1\}$$

Réciproquement, la continuité des fonctions $A \mapsto \det A$, $x \mapsto \text{sgn}(x)^\delta$ et $x \mapsto |x|^\alpha$ nous permet d'affirme que la fonction $f(A) = \text{sgn}(\det A)^\delta\,|\det A|^\alpha$ est continue sur $GL_2(\mathbb{R})$ et elle satisfait clairement à l'équation fonctionnelle donnée par l'énoncé.

Correction de l'exercice 3.1.12 :

1. Puisque l'application $X_i \mapsto AX_i$ est linéaire et que le déterminant est une forme n-linéaire alternée, l'application $(X_1,..,X_n) \mapsto \det(X_1,..,X_{i-1},AX_i,X_{i+1},..,X_n)$ est forme n-linéaire alternée

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, ce qui induit que $(X_1,..,X_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \det(X_1,..,X_{i-1},AX_i,X_{i+1},..,X_n)$ est également une forme n-linéaire alternée. L'espace des n-linéaires alternées étant de dimension 1 et engendré par tout déterminant pris dans une certain base. Implicitement, le déterminant dans la somme est celui normalisé par la base canonique $\mathcal{B} = (e_1,...,e_n)$ de k^n. Alors, il existe une constante $C \in k$ telle que :

$$\forall (X_1,...,X_n) \in (k^n)^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(X_1,..,X_{i-1},AX_i,X_{i+1},..,X_n) = C\det_{\mathcal{B}}(X_1,...,X_n)$$

et, puisque $\det_{\mathcal{B}}(e_1,..,e_n) = 1$, on obtient :

$$C = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(e_1,..,e_{i-1},Ae_i,e_{i+1},..,e_n).$$

Si on note $A = (a_{i,j})_{i,j}$, on a $Ae_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}e_j$

$$C = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(e_1,..,e_{i-1},a_{i,i}e_i + \sum_{j\neq i} a_{i,j}e_j,e_{i+1},..,e_n).$$

La somme $\sum_{j\neq i} a_{i,j}e_j$ étant une combinaison des $(n-1)$ autres vecteurs $(e_j)_{j\neq i}$, la multilinéarité alternée du déterminant nous permet d'écrire

$$C = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(e_1,..,e_{i-1},a_{i,i}e_i,e_{i+1},..,e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\det_{\mathcal{B}}(e_1,..,e_{i-1},e_i,e_{i+1},..,e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \operatorname{tr} A.$$

On obtient donc

$$\forall (X_1,...,X_n) \in (k^n)^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(X_1,..,X_{i-1},AX_i,X_{i+1},..,X_n) = (\operatorname{tr} A)\det_{\mathcal{B}}(X_1,...,X_n).$$

2. Si $\forall i \in [\![1,n]\!], t \mapsto X_i(t)$ est une fonction dérivable d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ alors

$$(\det(X_1(t),...,X_n(t)))' = \sum_{i=1}^{n} \det(X_1(t),...X_{i-1}(t),X_i'(t),,X_{i+1}(t),...X_n(t)).$$

Preuve pour $n = 2$. fixons $t \in I$ et h un réel tendant vers 0. La dérivabilité étant équivalente à l'existence d'un $DL_1(t)$ (à valeurs vectorielles). Nous allons utiliser ces DL ainsi que la multilinéarité du déterminant.

$$\begin{aligned}
\det(X_1(t+h),X_2(t+h)) &= \det(X_1(t)+hX_1'(t)+o(h)),X_2(t)+hX_2'(t)+o(h))) \\
&= \det(X_1(t),X_2(t)) + h\det(X_1(t),X_2'(t)) + \det(X_1(t),o(h)) \\
&\quad + h\det(X_1'(t),X_2(t)) + h^2\det(X_1'(t),X_2'(t)) + h\det(X_1'(t),o(h)) \\
&\quad + \det(o(h),X_2(t)+hX_2'(t)+o(h)))
\end{aligned}$$

On remarque ensuite que le déterminant de deux vecteurs dont l'un, au moins, est un $o(h)$ alors ce déterminant est $o(h)$. On en déduit que

$$\det(X_1(t+h),X_2(t+h)) = \det(X_1(t),X_2(t)) + h\det(X_1(t),X_2'(t)) + h\det(X_1'(t),X_2(t)) + o(h),$$

ce qui démontre que $t \mapsto \det(X_1(t),X_2(t))$ est bien dérivable et on obtient la formule souhaitée. Le cas général sur n se traite de la même façon.

(a) Toute solution de l'équation différentielle (E) est nécessairement C^1 sur I (une solution est de la forme $t \mapsto \exp(\int_{t_0}^{t} A(s)ds)X(t_0)$) donc

$$\forall t \in I, \quad W'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(X_1(t), ...X_{i-1}(t), X_i'(t), , X_{i+1}(t), ...X_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \det(X_1(t), ...X_{i-1}(t), A(t)X_i($$

La question 1 nous montre que

$$\forall t \in I, \quad W'(t) = (\operatorname{tr} A(t))W(t).$$

On en déduit que

$$\forall t \in I, \quad \forall t_0 \in I, \quad W(t) = \exp(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds)W(t_0) \tag{33}$$

(b) $(iii) \Leftrightarrow (ii)$: S'il existe $t_0 \in I$ tel que les vecteurs $(X_i(t_0))_i$ sont linéairement indépendant donc

$$W(t_0) = \det(X_1(t_0), ..., X_n(t_0)) \neq 0.$$

La formule (33) combiné à la non annulation de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ montre que

$$\forall t \in I, \quad W(t) = 0 \Leftrightarrow \exists t_0 \in I \text{ tel que } W(t_0) \neq 0$$

donc les deux dernières propositions sont équivalentes.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Dire que les solutions (X_i) sont linéairement indépendantes signifie que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad a_i = 0,$$

la première égalité devant être entendu au sens des applications, c'est-à-dire $\forall t \in I, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i X_i(t) = 0$.
Si les (X_i) sont linéairements dépendantes alors il existe $\alpha \in [\![1, n]\!]$ et des constantes réelles $(a_i)_{i \neq \alpha}$ tels que

$$\forall t \in I, \quad X_\alpha(t) = \sum_{i \neq \alpha} a_i X_i(t).$$

En particulier,

$$\forall t \in I, \quad W(t) = \det(X_1(t), ..., X_n(t)) = 0$$

Par contraposition, en déduit que s'il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $(X_1(t_0), ..., X_n(t_0))$ est libre alors la famille $(X_1, .., X_n)$ est libre (au sens des applications).
$(i) \Rightarrow (ii) (\Leftrightarrow (iii))$ Supposons que la famille $(X_1, .., X_n)$ est libre (au sens des applications). S'il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $(X_1(t_0), .., X_n(t_0))$ soit liée. Alors il existe $\alpha \in [\![1, n]\!]$ et des constantes réelles $(a_i)_{i \neq \alpha}$ tels que

$$X_\alpha(t_0) = \sum_{i \neq \alpha} a_i X_i(t_0)$$

Puisque l'équation différentielle (E) est linéaire et que chaque $X_1, .., X_n$ est solution de (E), le principe de superposition montre que $Y = \sum_{i \neq \alpha} a_i X_i$ est solution de (E). La fonction X_α est aussi solution de (E). Puisque Y et X_α sont solution du problème de Cauchy

$$(E') : X'(t) = A(t)X(t) \text{ et } X(t_0) = X_\alpha(t_0),$$

le théorème de Cauchy montre qu'elles sont égales sur I donc $X_\alpha = \sum_{i \neq \alpha} a_i X_i$, ce qui contredit l'indépendance la famille $(X_1, ..., X_n)$ donc $\forall t \in I$, la famille $(X_1(t), ..., X_n(t))$ est libre, ou ce qui est équivalent, il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $(X_1(t_0), ..., X_n(t_0))$ est libre.

Correction de l'exercice 3.1.13 :

1. $\mathcal{C}(A)$ est inclu dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ donc il suffit de montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. $0_n \in \mathcal{C}(A)$ car $0_n.A = 0_n = A.0_n$. Soient $A, B \in \mathcal{C}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors
$$(A+\lambda B)M = AM + \lambda BM = MA + \lambda MB = M(A+\lambda B)$$
donc $A + \lambda B \in \mathcal{C}(A)$, ce qui démontre que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et $B \in \mathbb{C}(A)$. Notons u (resp. v) l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A (resp. B). La commutation des matrices A et B est équivalent à la commutation des endomorphismes u et v (cf. la partie du cours d'algèbre linéaire concernant les matrices d'endomorphismes). Les espaces propres $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \mathrm{Id})$ sont stables par v (résultat fondamental du cours). Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, la restriction $v_{|E_\lambda(u)}$ de v à $E_\lambda(u)$ est une application linéaire de $E_\lambda(u)$ dans $v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)$ donc $v_{|E_\lambda(u)}$ est un endomorphisme de $E_\lambda(u)$. Soit $\mathcal{B}_\lambda$ une base de $E_\lambda(u)$ et $n_\lambda = \dim E_\lambda(u)$, puisque u est diagonalisable, la somme des espaces $E_\lambda(u)$ est directe et égale à $\mathbb{C}^n$ donc $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}$ est une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_{\lambda_i}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_{n_{\lambda_r}} \end{pmatrix}$ et la matrice de v est de la forme $\begin{pmatrix} B_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & B_r \end{pmatrix}$ où B_i est une matrice carrée de taille n_{λ_i}. Si on note P la matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ dans la base $\mathcal{B}$, alors
$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_{\lambda_i}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_{n_{\lambda_r}} \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } B = P \begin{pmatrix} B_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & B_r \end{pmatrix} P^{-1}.$$
Réciproquement, en utilisant les produits par blocs, on constate que les matrices $\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_{\lambda_i}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_{n_{\lambda_r}} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & B_r \end{pmatrix}$ commutent quelles que soient les matrices carrées B_i de taille n_{λ_i} choisies, ce qui implique que les matrices
$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_{\lambda_i}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_{n_{\lambda_r}} \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } B = P \begin{pmatrix} B_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ \{(0) & & B_r \end{pmatrix} P^{-1}.$$
commutent. On en déduit que
$$\mathcal{C}(A) = \{P \begin{pmatrix} B_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ \{(0) & & B_r \end{pmatrix} P^{-1} \text{ telle que } \forall i \in [\![1, r]\!], \quad B_i \in \mathfrak{M}_{n_{\lambda_i}}(\mathbb{C})\}.$$
L'application $T : \begin{cases} \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{M}_{n_{\lambda_i}}(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{C}(A) \\ (B_1, ..., B_r) & \mapsto & P \begin{pmatrix} B_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ \{(0) & & B_r \end{pmatrix} P^{-1} \end{cases}$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire évidemment injective, surjective par l'étude précédente donc T est un isomorphisme. En particulier,
$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(A) = \sum_{i=1}^{r} \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{M}_{n_{\lambda_i}}(\mathbb{C})) = \sum_{i=1}^{r} n_{\lambda_i}^2.$$

Puisque les n_{λ_i} sont tous des entiers, on a $\forall i \in [\![1,r]\!], \quad n_{\lambda_i}^2 \geqslant n_{\lambda_i}$ donc $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(A) \geqslant \sum_{i=1}^{r} n_{\lambda_i} = n$ car A est diagonalisable.

3. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes deux à deux distinctes. Le théorème de trigonalisation montre qu'il existe une matrice P inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & & \cdots & \cdots & & & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & \ddots & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \lambda_2 & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & \lambda_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & & & \cdots & \cdots & & \cdots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} = A'$$

Soit $\delta = \inf\{|\lambda_i - \lambda_j|, \quad (i,j) \in [\![1,r]\!], \quad i \neq j\}$ la distance minimale entre les valeurs propres distinctes de A et considérons la matrice diagonale D_k dont le $i^{ième}$ coefficient diagonale est $\dfrac{\delta i}{k}$ ainsi que la matrice $A_k = P(A' + D_k)P^{-1}$. La matrice D_k converge vers la matrice nulle donc la matrice A_k converge vers la matrice A. Le $i^{ième}$ coefficient diagonal de A_k est égal à $\lambda_\alpha + \dfrac{i\delta}{k}$ où $\alpha \in [\![1,r]\!]$ et le $j^{ième}$ coefficient diagonal de A_k est égal à $\lambda_\beta + \dfrac{j\delta}{k}$. On suppose $i < j$. Montrons que ces deux éléments sont distincts pour k suffisamment grand.

– Si $\alpha = \beta$, alors

$$(\lambda_\beta + \frac{j\delta}{k}) - (\lambda_\alpha + \frac{i\delta}{k}) = (\lambda_\alpha + \frac{j\delta}{k}) - (\lambda_\alpha + \frac{i\delta}{k}) = \frac{(j-i)\delta}{k} > 0$$

– Si $\alpha \neq \beta$ alors $\lim\limits_{k\to+\infty} (\lambda_\beta + \dfrac{j\delta}{k}) - (\lambda_\alpha + \dfrac{i\delta}{k}) = \lambda_\beta - \lambda_\alpha \neq 0$ donc il existe un rang $k(\alpha,\beta)$ tel que

$$\forall k \geqslant k(\alpha,\beta), \quad (\lambda_\beta + \frac{j\delta}{k}) - (\lambda_\alpha + \frac{i\delta}{k}) \neq 0$$

Puisque nous disposons d'un nombre fini de α, β, il existe un entier $K = \max\limits_{\alpha,\beta} k(\alpha,\beta)$ tel que :

$$\forall k \geqslant K, \quad \lambda_\alpha + \frac{i\delta}{k} \neq \lambda_\beta + \frac{j\delta}{k} \text{ si } i \neq j.$$

En particulier, pour k assez grand la matrice A_k, de taille n, possède k valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et la suite $(A_k)_k$ converge vers A. Nous venons de démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

4. *Rappel du cours sur la caractérisation du rang d'une matrice à l'aide des déterminant : soit C est une matrice. On appelle sous-déterminant d'ordre k, tout déterminant d'une matrice carrée de taille k extraite de C (par exemple, un cofacteur $\Delta_{i,j}$ de C est un déterminant d'ordre $n-1$ issu de l'élimination de la $i^{ième}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne de C, i.e. de l'extraction d'une matrice d'ordre $n-1$). Le rang de C est inférieur ou égal à r si et seulement tous les sous-déterminants d'ordre $k > r$ sont nuls.*

Il y a clairement un argument de densité donc de continuité d'une certaine application. Si l'on pose Φ_A l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ définit par

$$\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \Phi_A(X) = AX - XA.$$

On remarque alors que $\mathcal{C}(A) = \ker \Phi_A$.
Soit C_A la matrice de Φ_A dans la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ (qui est de dimension n^2). Soit S l'ensemble fini des sous-ensembles de $[\![1, n^2]\!]^2$ de la forme $I \times J$ avec $\operatorname{card} I = \operatorname{card} J > n^2 - n$.
Pour $(I, J) \in S$, on note $C_A(I, J)$ la matrice extraite de A en conservant uniquement les lignes $i \in I$ et les colonnes $j \in J$. En particulier, $C_A(I, J)$ est une matrice extraite de C_A d'ordre $n^2 - n$ et, lorsque (I, J) décrit S, les matrices $C_A(I, J)$ décrivent toutes les matrices d'ordre inférieures ou égales à $n^2 - n$.
Lorsque A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ alors $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(A) \geqslant n$ donc $\operatorname{rg} C_A = n^2 - \dim \ker \Phi_A \leqslant n^2 - n$.
Cela a pour conséquence que, pour tout $(I, J) \in S$, $\det C_A(I, J) = 0$.
D'autre part, pour tout $(I, J) \in S$, l'application $A \mapsto \det C_A(I, J)$ est un polynôme en les coefficients de A donc c'est une fonction continue de A et, puisque l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ sont dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on en déduit que

$$\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \forall (I, J) \in S, \quad \det C_A(I, J) = 0.$$

Soit A une matrice quelconque de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Le résultat précédent montre que tous les sous-déterminants de C_A d'ordre strictement supérieur à $n^2 - n$ sont nuls donc

$$\operatorname{rg} C_A \leqslant n^2 - n \Leftrightarrow n^2 - \dim \ker \Phi_A \leqslant n^2 - n \Leftrightarrow \dim \ker \Phi_A \geqslant n \Leftrightarrow \dim \mathcal{C}(A) \geqslant n.$$

Correction de l'exercice 3.1.14 :

1. A_n est à coefficients réels et symétrique donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans une base orthonormale (théorème spectral).
2. Par définition, le coefficient i, j de $A_n B_n$ est $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$. Les seuls coefficients non nuls de B_n intervenant dans cette somme sont potentiellement $b_{j,j}$, $b_{j+1,j}$ et $b_{j-1,j}$ (il faut alors que $1 \leqslant j \leqslant n$, $2 \leqslant j+1 \leqslant n$, $1 \leqslant j-1 \leqslant n$ pour chacun)
   - Si $1 \leqslant i < j < n$ (donc $i \leqslant j-1$) : $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,j} b_{j,j} + a_{i,j-1} b_{j-1,j} + a_{i,j+1} b_{j+1,j} = i \times 2 + i \times (-1) + i \times (-1) = 0$.
   - Si $1 \leqslant i < j = n$ (donc $i \leqslant n-1$) : $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,n} = a_{i,j} b_{n,n} + a_{i,n-1} b_{n-1,n} = i \times 1 + i \times (-1) = 0$.
   - Si $2 \leqslant j < i \leqslant n$ (donc $j+1 \leqslant i$) : $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,j} b_{j,j} + a_{i,j-1} b_{j-1,j} + a_{i,j+1} b_{j+1,j} = j \times 2 + (j-1) \times (-1) + (j+1) \times (-1) = 0$
   - Si $1 = j < i \leqslant n$ (donc $2 \leqslant i$) : $\sum_{k=1}^{n} a_{1,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,1} + a_{i,2} b_{2,1} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0$
   - si $i = j \in [\![2, n-1]\!]$, : $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = a_{i,i} b_{i,i} + a_{i,i-1} b_{i-1,i} + a_{i,i+1} b_{i+1,i} = i \times 2 + (i-1) \times (-1) + i \times (-1) = 1$
   - Si $i = j = 1$: $\sum_{k=1}^{n} a_{1,k} b_{k,1} = a_{1,1} b_{1,1} + a_{1,2} b_{2,1} = 1 \times 2 + 1 \times (-1) = 1$
   - Si $i = j = n$: $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = a_{n,n} b_{n,n} + a_{n,n-1} b_{n-1,n} = n \times 1 + (n-1) \times (-1) = 1$

   Après ces neufs calculs, on a bien $(A_n B_n)_{i,j} = \delta_{i,j}$ donc A_n est inversible et son inverse est B_n
3. Notons Δ_n le déterminant de B_n En développant selon la première colonne, on obtient

$$\Delta_n = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2-X & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & 2-X & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix}_{n-1} = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

(le dernier déterminant est développé selon la première ligne). On obtient donc une suite récurrente du second ordre. L'équation caractéristique $r^2 = 2r - 1$ n'admet que $r = 1$ comme solution donc il existe deux réels a et b tels que $\Delta_n = an + b$. Puisque par calcul direct, on a $\Delta_2 = \Delta_3 = 1$, on en déduit que $a = b = 1$ donc $\Delta_n = 1$ quels que soient les entiers $n \geqslant 2$.

4. On introduit le polynôme caractéristique P_n de B_n.

$$P_n(X) = \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2-X & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2-X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2-X & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix}_n$$

En développant selon la première colonne, on obtient

$$P_n(X) = (2-X)\begin{vmatrix} 2-X & -1 & \ddots & & \vdots \\ -1 & 2-X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ & \ddots & -1 & 2-X & -1 \\ \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix}_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2-X & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & 2-X & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix}_{n-1}$$

et le dernier déterminant est de nouveau développé selon la première ligne

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2-X & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & 2-X & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix}_{n-1} = -1 \times \begin{vmatrix} 2-X & -1 & & (0) \\ -1 & 2-X & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 1-X \end{vmatrix}_{n-2}.$$

Par conséquent, nous avons la récurrence du second ordre

$$\forall n \geqslant 4, \quad P_n(X) = (2-X)P_{n-1}(X) - P_{n-2}(X) \tag{34}$$

Pour expliciter P_n, nous allons travailler à X fixé dans $\mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique de cette relation de récurrence est dont le discriminant est $\Delta = (2-X)^2 - 4 = X^2 - 4X = X(X-4)$. Pour que ce discriminant soit strictement positif, nous exigeons que $x \in]4, +\infty[$. Dans ce cas, les racines sont $r_\pm = \dfrac{2 - X \pm \sqrt{X(X-4)}}{2}$ et donc il existe deux constantes (par rapport à n) réelles $\alpha(X)$ et $\beta(X)$ tels que

$$\begin{aligned} \forall X \quad &\in \quad]4, +\infty[, \quad \forall n \geqslant 2, \\ P_n(X) \quad &= \quad \alpha(X)\left(\frac{2 - X + \sqrt{X(X-4)}}{2}\right)^n + \beta(X)\left(\frac{2 - X - \sqrt{X(X-4)}}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Explicitons $\alpha(X)$ et $\beta(X)$. Un calcul direct montre que $P_2(X) = \begin{vmatrix} 2-X & -1 \\ -1 & 1-X \end{vmatrix} = X^2 - 3X + 1$ et $P_3(X) = \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 0 \\ -1 & 2-X & -1 \\ 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = -X^3 + 5X^2 - 6X + 1$. Résoudre un tel système étant un peu laborieux, nous allons effectuer une première réduction et considérons une suite $(u_n(X))_{n \geqslant 0}$ satisfaisant à la relation (34) quel que soit $n \in \mathbb{N}$ avec $u_n(X) = P_n(X)$ pour $n \geqslant 2$. En particulier,

$$u_3(X) = (2-X)u_2(X) - u_1(X) \Leftrightarrow u_1(X) = (2-X)P_2(X) - P_3(X) = 1 - X$$

et

$$u_2(X) = (2-X)u_1(X) - u_0(X) \Leftrightarrow u_0(X) = (2-X)P_1(X) - P_2(X) = 1$$

Par construction, $(u_n(X))_{n\geqslant 0}$ vérifie $u_n(X) = P_n(X)$ pour $n = 2$ et 3 et vu que $(u_n(X))$ et $(P_n(X))$ satisfont à la même relation de récurrence, on est assuré que $\forall n \geqslant 3, \quad u_n(X) = P_n(X)$. En outre, la relation (35) est valable pour $(u_n(X))$. En la particularisant pour $n = 0$ et 1, on obtient

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha(X) + \beta(X) = 1 \\ \alpha(X)\dfrac{2-X+\sqrt{X(X-4)}}{2} + \beta(X)\dfrac{2-X-\sqrt{X(X-4)}}{2} = 1-X \end{array}\right.$$

$(2-X)^2 + X(X-4) = X\,(X-4) + (2-X)^2 = 2X^2 - 8X + 4$et une résolution directe par substitution nous montre que

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha(X) = \dfrac{-X+\sqrt{X(X-4)}}{2\sqrt{X(X-4)}} \\ \beta(X) = \dfrac{X+\sqrt{X(X-4)}}{2\sqrt{X(X-4)}} \end{array}\right.$$

ce qui nous donne au final

$$\begin{array}{rcl} \forall X & \in &]4,+\infty[, \quad \forall n \geqslant 2 : \\ P_n(X) & = & u_n(X) = \dfrac{-X+\sqrt{X(X-4)}}{2\sqrt{X(X-4)}}\left(\dfrac{2-X+\sqrt{X(X-4)}}{2}\right)^n + \dfrac{X+\sqrt{X(X-4)}}{2\sqrt{X(X-4)}}\left(\dfrac{2-X-\sqrt{X(X}}{2}\right. \end{array}$$

Remarque : Cette formule semble être un peu barbare mais si, par analogue avec les complexes et $i = \sqrt{-1}$, on admet que le conjugué de $P + \sqrt{Q}$ est $P - \sqrt{Q}$ alors $P_n(X)$ n'est que la partie imaginaire de $\dfrac{(-X+\sqrt{X(X-4)})(2-X+\sqrt{X(X-4)})^n}{2^n}$.

Contre toute attente, l'expression

$$\frac{-X+\sqrt{X(X-4)}}{2\sqrt{X(X-4)}}\left(\frac{2-X+\sqrt{X(X-4)}}{2}\right)^n + \frac{X+\sqrt{X(X-4)}}{2\sqrt{X(X-4)}}\left(\frac{2-X-\sqrt{X(X-4)}}{2}\right)^n$$

est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ (il suffit d'appliquer la formule du binôme de Newton à $\left(2-X+\sqrt{X(X-4)}\right)^n$ et $\left(2-X-\sqrt{X(X-4)}\right)^{n+1}$ pour s'apercevoir que tous les exposants pairs de $\sqrt{X(X-4)}$ intervenant dans $P_n(X)$ disparaissent, donc il ne reste que les exposants impairs et l'égalité

$$\sqrt{X(X-4)}^{2k+1} = \sqrt{X(X-4)}(X(X-4))^k$$

montrer que $P_n(X)$ s'identifie sur $]4,+\infty[$ à un polynôme en $X(X-4)$. Deux polynômes étant égaux sur $]4,+\infty[$ sont nécessairement identiques.

La recherche des racines est très compliqué en raison de l'existence des racines carrés. Lors de la discussion précédente, nous avions fait l'analogie avec les conjugués complexe. L'objectif est de l'appliquer : $\Delta = (2-X)^2 - 4 = 4((1-\dfrac{X}{2})^2 - 1)$. On choisit $1 - \dfrac{X}{2} = \cos\varphi \Leftrightarrow X = 2 - 2\cos\varphi$ et dans ce cas :

$$X(X-4) = -(2-2\cos\varphi)(2\cos\varphi+2) = -4(1-\cos^2\varphi) = -4\sin^2\varphi = (2i\sin\varphi)^2$$

et si l'on suppose $\varphi \neq 0 \bmod \pi$, on a

$$\begin{array}{rcl} P_n(2-2\cos\varphi) & = & \dfrac{-2+2\cos\varphi+2i\sin\varphi}{4i\sin\varphi}(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n + \dfrac{2-2\cos\varphi+2i\sin\varphi}{4i\sin\varphi}(\cos\varphi-i\sin\varphi)^n \\ & = & \dfrac{1}{2i\sin\varphi}[(-1+e^{i\varphi})e^{in\varphi} - (1+e^{-i\varphi})e^{-in\varphi}] = \dfrac{\mathrm{Im}[(-1+e^{i\varphi})e^{in\varphi}]}{\sin\varphi} \\ & = & \dfrac{\mathrm{Im}(\sin\dfrac{\varphi}{2}e^{i(n+1/2)\varphi})}{\sin\varphi} = 2\cos\dfrac{\varphi}{2}\sin(n+\dfrac{1}{2})\varphi) \end{array}$$

Ainsi, $P_n(2-2\cos\varphi)=0$ si et seulement $\frac{2n+1}{2}\varphi = 0 \bmod \pi$ et $\varphi \neq 0 \bmod \pi$ ce qui signifie $\varphi = \frac{2k\pi}{2n+1}$ pour $k \in [\![1,n]\!]$. La fonction $x \mapsto \sin x$ étant injective et positive sur l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}]\{\frac{k\pi}{2n+1}\}_{k\in[\![1,n]\!]}$, on en déduit que les réels $2-2\cos\frac{2k\pi}{2n+1} = (2\sin\frac{k\pi}{2n+1})^2$ sont deux à deux distincts. Le polynôme P_n, de degré n, admettant au plus n racines, on en déduit qu'il est scindé sur $\mathbb{R}$ et que ses racines sont les $((2\sin\frac{k\pi}{2n+1})^2)_{k\in[\![1,n]\!]}$ qui sont bien entendu les valeurs propres de B_n. En particulier, on retrouve que la matrice B_n est inversible et qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.. La matrice A_n admet donc comme spectre $\{\frac{1}{(2\sin\frac{k\pi}{2n+1})^2},\ k\in[\![1,n]\!]\}$.

5. Toutes les valeurs propres de A_n étant strictement positives, on en déduit que A_n est définie positive et $\det A_n = (\det B_n)^{-1} = 1$

Correction de l'exercice 3.1.15 :

1. $A^{n-1} \neq 0$ donc il existe $X_0 \in k^n$ tel que $A^{n-1}X_0 \neq 0$. Soit $(a_0,..,a_{n-1})$ une famille de scalaires tels que
$$a_0X_0 + a_1AX_0 + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}X_0 = 0. \tag{36}$$
En composant par A^{n-1} et en remarquant que $A^r = 0$ si $r \geqslant n$, on obtient
$$a_0\underbrace{A^{n-1}X_0}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow a_0 = 0.$$
Procédons par itération. Supposons que $a_0 = \cdots = a_k = 0$ avec $k < n-1$, la relation (36) s'écrit
$$a_{k+1}A^{k+1}X_0 + a_{k+2}A^{k+2}X_0 + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}X_0 = 0.$$
En composant par $A^{n-1-(k+1)} = A^{n-k-2}$ $(k \leqslant n-2)$, on en déduit que
$$a_{k+1}\underbrace{A^{n-1}X_0}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow a_{k+1} = 0.$$
On en déduit que tous les coefficients (a_i) sont nuls et que la famille $(X_0, AX_0, ..., A^{n-1}X_0)$ est une famille libre de n vecteurs de k^n qui est de dimension n donc il s'agit d'une base de k^n.
2. On remarque que si B commute avec A alors B commute avec tous les A^k. En particulier,
$$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \quad BA^kX_0 = A^kBX_0. \tag{37}$$
Cette formule nous dit que la connaissance de l'image par B de la base $\mathcal{B} = (X_0, AX_0, .., A^{n-1}X_0)$ est donnée par la connaissance de BX_0. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de k^n, il existe des scalaires $a_0,..,a_{n-1}$ appartenant à k tels que
$$BX_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_iA^iX_0. \tag{38}$$
La combinaison des deux égalités (37) et (38) ainsi que la commutation des différentes puissances de A, nous montre que
$$B[A^kX_0] = A^k\sum_{i=0}^{n-1} a_iA^iX_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_iA^kA^iX_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_iA^i(A^kX_0).$$
Par consèquent, les deux applications linéaires $X \mapsto BX$ et $X \mapsto (\sum_{i=0}^{n-1} a_iA^i)X$ sont égales sur la base $\mathcal{B}$ donc elles sont égales, ce qui implique que $B = \sum_{i=0}^{n-1} a_iA^i$. Nous venons de montrer que B est bien un polynôme en A.

3. $C(A)$ est un k-espace vectoriel qui contient $\{P(A), \quad P \in k[X]\}$. Réciproquement, tout polynôme en A commute avec A donc $C(A) = \{P(A), \quad P \in k[X]\}$. Puisque $A^r = 0$ si $r \geqslant n$, on en déduit que

$$C(A) = \{P(A), \quad P \in k_{n-1}[X]\} = \{a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}, \quad a_0, ..., a_{n-1} \in k\} = \text{Vect}(I, A, ..., A^{n-1})$$

En particulier, $\dim_k C(A) \leqslant n$. Montrons que la famille $(I, A, ..., A^{n-1})$ est libre. Soient $a_0, .., a_{n-1}$ des scalaires appartenant à k tels que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k = 0$. Alors, en évaluant en X_0, on obtient que

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k X_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 X_0 + a_1 A X_0 + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}X_0 = 0$$

et, la famille $(X_0, AX_0, ..., A^{n-1}X_0)$, on en déduit que $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$ donc la famille $(I, A, ..., A^{n-1})$ est libre, ce qui implique que $\dim_k C(A) \geqslant n$. Par conséquent, $C(A)$ est de dimension n et $(I, A, ..., A^{n-1})$ est une base de $C(A)$.

4. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est une matrice nilpotente d'ordre 3, i.e. $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. La solution éventuelle de l'équation $X^2 = A$ commute avec A car $XA = XX^2 = X^2X = AX$ donc $X \in C(A)$. La question précédente montre qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$X = aI + bA + cA^2 = \begin{pmatrix} a & b & 2b+4c \\ 0 & a & 4b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

La matrice X admet donc comme unique valeur propre a. Or $X^2 = (A^2)^2 = A^4 = 0$ donc X est nilpotente et sa seule valeur propre est 0. Ainsi, $a = 0$ et $X = bA + cA^2$. Nous allons réinjecter cette dernière expression dans l'équation satisfaite par A et, les matrices A et A^2 commutant, nous utiliserons le binôme de Newton :

$$X^2 = A \Leftrightarrow (bA + cA^2)^2 = A \Leftrightarrow b^2A^2 + 2bcA^3 + c^2A^4 = A \Leftrightarrow b^2A^2 = A.$$

On en déduit que A est colinéaire à A^2 ce qui est impossible donc l'équation $X^2 = A$ est impossible.

Correction de l'exercice 3.1.16 :

1. Si $X \in k^n$, $\lambda \in k$ et $X \in \ker(A - \lambda I) \Leftrightarrow AX = \lambda X$ alors $A(BX) = BAX = B(\lambda X) = \lambda BX$ donc $BX \in \ker(A - \lambda I)$.
2. La matrice A possédant n valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable sur k et $k^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker(A - \lambda_i I)$. Les valeurs propres étant deux à deux distincts, les polynômes $(X - \lambda_i)$ sont deux à deux premiers entre eux sur $k[X]$ donc premier dans leur ensemble. Le théorème des noyaux (lu de droite à gauche) montre que

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \ker(A - \lambda_i I) = \ker\left(\prod_{i=1}^{n}(A - \lambda_i I)\right) \Rightarrow k^n = \ker\left(\prod_{i=1}^{n}(A - \lambda_i I)\right).$$

Ainsi la matrice $\prod_{i=1}^{n}(A - \lambda_i I)$ est nulle et $\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i I) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)}(X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de A.
Si A ne possède pas n valeurs propres distinctes, le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)}(X - \lambda)$ n'est pas nécessairement annulateur. L'exemple le plus simple $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dont la seule valeur propre

est 1 et $\prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)}(X-\lambda)=X-1$ qui n'annule clairement pas A.

En fait, tout découle du théorème des noyaux. Si $\prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)}(X-\lambda)$ *annule* A *alors* A *est annulé par un polynôme scindé sur* k *à racines simples donc* A *est diagonalisable sur . Si* A *est diagonalisable, le théorème des noyaux assure que* $\prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)}(X-\lambda)$ *annule* A*. Ainsi,* A *est diagonalisable sur* k *si et seulement si* $\prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)}(X-\lambda)$ *annule* A*.*

3. Pour chaque $i\in[\![1,n]\!]$, $\dim_k\ker(A-\lambda_i I)\geqslant 1$ et la matrice A étant diagonalisable,

$$n\leqslant\sum_{i=1}^{n}1\leqslant\sum_{i=1}^{n}\dim_k(\ker(A-\lambda_i I))=n$$

donc $\forall i\in[\![1,n]\!],\quad \dim_k\ker(A-\lambda_i I)=1$. Pour $i\in[\![1,n]\!]$, soit e_i un vecteur propre engendrant $\ker(A-\lambda_i I)$ (en particulier, $e_i\neq 0$). La famille $(e_1,..,e_n)$ est une base de k^n (puisque A est diagonalisable). La question 1 montre que $Be_i\in\ker(A-\lambda_i I)$ donc il existe $\mu_i\in k$ tel que $Be_i=\mu_i e_i$ donc e_i est un vecteur propre de B. Ainsi la famille $(e_1,..,e_n)$, qui est une base de k^n est également une famille de vecteurs propres de B donc B est diagonalisable, et ce, dans une base de vecteurs propres de A. Les matrices A et B sont codiagonalisables.

4. La question précédente montre que si $(e_1,..,e_n)$ est une base de vecteurs propres de A alors c'est également une base de vecteurs propres pour B. Soit P la matrice de changement de base de la base canonique de k^n à la base $(e_1,..,e_n)$. Alors $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales. On remarque que P ne dépend que de A et non de B. Ainsi,

$$C(A)\subset\{PDP^{-1},\quad D\text{ matrice diagonale de }\mathfrak{M}_n(k)\}$$

Réciproquement si $B=PDP^{-1}$ alors $P^{-1}BP$ est diagonale donc elle commute avec la matrice diagonale $P^{-1}AP$. On en déduit que

$$P^{-1}APP^{-1}BP=P^{-1}BPP^{-1}AP\Leftrightarrow P^{-1}ABP=P^{-1}BAP\Leftrightarrow AB=BA$$

donc $\{PDP^{-1},\quad D\text{ matrice diagonale de }\mathfrak{M}_n(k)\}\subset C(A)$. Nous venons de démontrer que

$$C(A)=\{PDP^{-1},\quad D\text{ matrice diagonale de }\mathfrak{M}_n(k)\}.$$

L'espace des matrices diagonales est de dimension n et une base est donnée par les matrices élémentaires $(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ donc $C(A)$ est de dimension n et admet comme base la famille $(PE_{i,i}P^{-1})_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Remarque : Nous supposons que k *est un corps de caractéristique non nulle (*$k=Q$*,* R *ou* C *par exemple). Soit* $B\in C(A)$ *et* $(\mu_1,..,\mu_n)$ *les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de* B *tels que* $P^{-1}BP=$ *Les scalaires* $\lambda_1,..,\lambda_n$ *étant distincts, il existe un polynôme* R *(en utilisant les polynômes de Lagrange associé aux* (λ_i) *et* (μ_i)*)* P *tel que*

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad R(\lambda_i)=\mu_i.$$

Ainsi, on a l'identité :

$$P^{-1}BP=\mathrm{diag}(\mu_1,..,\mu_n)=\mathrm{diag}(R(\lambda_1),..,R(\lambda_n))=R\left(\mathrm{diag}(\lambda_1,..,\lambda_n)\right)=R(P^{-1}AP)=P^{-1}R(A)P$$

qui nous démontre que $B=R(A)$ *pour un certain polynôme* A *donc* $C(A)\subset\{R(A),\quad R\in k[X]\}$*. Il est évdent que* $\{R(A),\quad R\in k[X]\}\subset C(A)$ *(cf. son cours sur les polynômes d'endomorphismes), ce qui nous donne*

$$C(A)=\{R(A),\quad R\in k[X]\}.$$

En effectuant la division euclidienne de $R(X)$ *par* $\prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)}(X-\lambda)$ *qui est de degré* n *puis en évaluant en* A*, on en déduit l'existence d'un polynôme* $Q\in k_{n-1}[X]$ *tel que* $R(A)=Q(A)$ *donc*

$$C(A)=\{R(A),\quad R\in k_{n-1}[X]\}=\mathrm{Vect}(I,A,...,A^{n-1}).$$

L'espace $C(A)$ *étant de dimension* n*, il est évident que* $(I,A,..,A^{n-1})$ *est une base de* $C(A)$*.*

5. Notons $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ \frac{4}{3} & 2 & 0\\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$ et (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Cette matrice est de taille 3 et elle admet trois valeurs propres distinctes qui sont $-2,2,\frac{5}{2}$ donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Il est immédiat que e_2 est un vecteur propre associé à 2 et e_3 un vecteur propre associé à $\frac{5}{2}$. Il nous reste à déterminer un vecteur propre associé à -2.

$$AX=-2X\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{3}x+4y=0\\ \frac{3}{2}x+\frac{9}{2}z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=z\\ x=-3z\end{cases}\Leftrightarrow E_{-2}(A)=\text{Vect}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$$

Soit $P=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ alors $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}=D$.

Soit X une solution éventuelle de $X+X^{-1}=A$. Cette solution est nécessairement inversible et elle commute avec A car

$$XA=X(X+X^{-1})=X^2+I=(X+X^{-1})X=AX.$$

Puisque A est de taille 3 admettant trois valeurs propres distinctes, la question 4 nous montre que X est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans la même base de diagonalisation choisie pour A. Ainsi, il existe trois réels a,b,c non nuls tels que $P^{-1}XP=\text{diag}(a,b,c)=\Delta$.

$$\begin{aligned}X+X^{-1}&=A\Leftrightarrow P\Delta P^{-1}+P\Delta^{-1}P=PDP^{-1}\Leftrightarrow P(\Delta+\Delta^{-1})P^{-1}=PDP^{-1}\Leftrightarrow\Delta+\Delta^{-1}=D\\ &\Leftrightarrow \text{diag}(a+\frac{1}{a},b+\frac{1}{b},c+\frac{1}{c})=\text{diag}(-2,2,\frac{5}{2})\Leftrightarrow\begin{cases}a+\frac{1}{a}=-2\\ b+\frac{1}{b}=2\\ c+\frac{1}{c}=\frac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+2a+1=0\\ b^2-2b+1=0\\ c^2-\frac{5}{2}c+1=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}(a+1)^2=0\\ (b-1)^2=0\\ \frac{1}{2}(2c-1)(c-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=1\\ c=\frac{1}{2}\text{ ou }c=2\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont

$$X=P\,\text{diag}(-1,1,\frac{1}{2})P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\text{ et }X=P\,\text{diag}(-1,1,2)P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3.1.17 : Posons $J=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ la base

canonique de $\mathbb{R}^n$. La matrice J^k est

$$J^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & & & 1 \\ 1 & & & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J^n = I_n$$

et $M = a_1 I_n + a_2 J + \cdots + a_n J^{n-1}$. La matrice J admet comme polynôme annulateur $X^n - 1$ dont les zéros sont les racines $n^{ième}$ de l'unité. Ainsi J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Diagonalisons J. Soit $\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{n})$, $j \in [\![0, n-1]\!]$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à ζ^j.

$$JX = \zeta^j X \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \zeta^j x_1 \\ x_3 = \zeta^j x_2 \\ \vdots \\ x_n = \zeta^j x_{n-1} \\ x_1 = \zeta^j x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \zeta^j x_1 \\ x_3 = \zeta^{2j} x_1 \\ \vdots \\ x_n = \zeta^{(n-1)j} x_1 \\ x_1 = \zeta^{nj} x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \zeta^j x_1 \\ x_3 = \zeta^{2j} x_1 \\ \vdots \\ x_n = \zeta^{(n-1)j} x_1 \\ x_1 = x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \zeta^j x_1 \\ x_3 = \zeta^{2j} x_1 \\ \vdots \\ x_n = \zeta^{(n-1)j} x_1 \end{cases} \Leftrightarrow X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^j \\ \vdots \\ \zeta^{(n-1)j} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $E_{\zeta^j}(J) = \text{Vect}(\varepsilon_j = (\zeta^{(i-1)j})_{1 \leqslant i \leqslant n})$. Soit P la matrice constitué des vecteurs propres $(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_{n-1})$, autrement dit $P = (P_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ avec $P_{i,j} = \zeta^{(i-1)(j-1)}$ (le vecteur ε_0 correspond à la première colonne).
On a la formule de réduction

$$J = P \operatorname{diag}(1, \zeta, .., \zeta^{n-1}) P^{-1}$$

qui implique que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad J^k = P \operatorname{diag}(1, \zeta^k, \zeta^{2k}, .., \zeta^{(n-1)k}) P^{-1}$$

On en déduit immédiatement, en se rappelant que $(PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$), que M est diagonalisable dans la base $(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_{n-1})$ et

$$M = P(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \operatorname{diag}(1, \zeta^k, \zeta^{2k}, .., \zeta^{(n-1)k}))P^{-1} = P\left(\operatorname{diag}(\sum_{k=0}^{n-1} a_k, \sum_{k=0}^{n-1} a_k\zeta^k, \sum_{k=0}^{n-1} a_k\zeta^{2k}, .., \sum_{k=0}^{n-1} a_k\zeta^{(n-1)k})\right) P^{-1}$$

donc la valeur propre associé au vecteur ε_j est

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!] \quad \lambda_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \zeta^{jk}.$$

Si $a_q = q + 1$, le déterminant de M est le produit des valeurs propres i.e.

$$\det M = \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_j = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \zeta^{jk}\right) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\zeta^{jk}\right) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(\zeta^j)^k\right).$$

Introduisons le polynôme $R(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k$ qui visiblement fait penser à une dérivée. Plus précisément,

$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, \quad R(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k \underset{k \leftarrow k+1}{=} \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)' = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(x-1)^2}.$$

En particulier, en remarquant que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad (\zeta^k)^n = (\zeta^n)^k = (1)^k = 1 \text{ et } (\zeta^k)^{n+1} = (\zeta^n)^k \zeta^k = \zeta^k,$$

on obtient

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad R(\zeta^k) = \frac{1-(n+1)+n\zeta^k}{(\zeta^k-1)^2} = n\frac{\zeta^k-1}{(\zeta^k-1)^2} = \frac{n}{\zeta^k-1}.$$

Le produit $\prod_{k=1}^{n-1} R(\zeta^k)$ est égal $\dfrac{n^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1}(\zeta^k-1)}$. La factorisation $X^n-1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X-\zeta^k)$ montre que

$$\forall x \neq 1, \quad \prod_{k=1}^{n-1}(x-\zeta^k) = \frac{x^n-1}{x-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

En faisant tendre x vers 1, on en déduit que

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-\zeta^k) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n \Rightarrow \prod_{k=1}^{n-1}\Big[(-1)(1-\zeta^k)\Big] = (-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(\zeta^k-1) = n \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n-1}(\zeta^k-1) = (-1)^{n-1}n.$$

donc

$$\prod_{k=1}^{n-1} R(\zeta^k) = \frac{n^{n-1}}{(-1)^n n}.$$

D'autre part, on a :

$$R(\zeta^0) = R(1) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1) \underset{k\leftarrow k+1}{=} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La combinaison de ces deux dernières égalités, nous obtenons la valeur du déterminant de M

$$\det M = \prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k(\zeta^j)^k\right) = \prod_{k=0}^{n-1} R(\zeta^k) = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1}\frac{n^{n-1}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{2}n^{n-1}.$$

Correction de l'exercice 3.1.18 :

1. Une telle matrice est annulé par le polynôme $X^3+X^2+X = X(X^2+X+1)$ qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Elle est semblable sur $\mathbb{C}$ à une matrice diagonale dont les éléments diagonaux appartiennent à $\{0, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\}$.
2. Montrons que A n'est pas inversible. La question précédente montre que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres appartiennent à $\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\}$. Comme A est à coefficients réels, si λ est valeur propre de A alors son conjugué l'est aussi (cela découle que $\overline{\det(A-\lambda I)} = \det(A-\lambda I)$). Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\}$. La matrice A étant diagonalisable sur $\mathbb{C}$, l'une de ses valeurs propres est de multiplicité 2 et l'autre 1. En particulier, son déterminant vaut

   $$\det A = (-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i) = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ou } \det A = (-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

   Ces deux possibilités ne peuvent se réaliser car, A étant à coefficients réels, son déterminant est réel. Donc A n'est pas inversible et la multiplicité de 0 est au moins égale à 1. Si A ne possède que 0 comme valeur propre dans $\mathbb{C}$, A étant diagonalisable, elle est équivalente à la matrice nulle donc elle est nulle, ce qui n'est pas le cas. Donc A possède au moins une valeur propre complexe. Le raisonnement précédent montre que $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ sont des valeurs propres de A

dans $\mathbb{C}$ et chacune ayant une multiplicité supérieure ou égale à 1. La somme des multiplicité des racines étant égale à 3, on en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$, chaque racine étant de multiplicité 1.
Soit $e_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\ker A = \mathrm{Vect}(e_1)$. Pour obtenir que A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, il faut trouver deux vecteurs e_2 et e_3 tel que

$$\left\{ \begin{array}{r} Ae_2 = -\frac{1}{2}e_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_3 \\ Ae_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3 \end{array} \right. . \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} (A + \frac{1}{2}I)e_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}e_3 \\ (A + \frac{1}{2}I)e_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} e_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}(A + \frac{1}{2}I)e_2 \\ e_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}(A + \frac{1}{2}I)e_3 = -\frac{4}{3}(A + \frac{1}{2}I)^2 e_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} e_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}(A + \frac{1}{2}I)e_2 \\ ((A + \frac{1}{2}I)^2 + \frac{3}{4})e_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} e_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}(A + \frac{1}{2}I)e_2 \\ (A^2 + A + I)e_2 = 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, le vecteur e_2 appartient à $\ker(A^2 + A + I)$. On dispose de $\ker A$ et de $\ker(A^2 + A + I)$. Une idée géniale germe à notre esprit : le théorème des noyaux. La matrice A est annulée par le polynôme $X^3 + X^2 + X$, dont la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ est

$$X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1).$$

Puisque les facteurs sont premiers entre eux, le théorème des noyaux montre que

$$\mathbb{R}^3 = \ker A \oplus \ker(A^2 + A + I).$$

La dimension de $\ker A$ étant égale à 1, la dimension de $\ker(A^2 + A + I)$ est égal à 2. Il nous faut un vecteur non nul e_2 de $\ker(A^2 + A + I)$ tel que la famille $(e_2, e_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}(A + \frac{1}{2}I)e_2)$ soit une famille libre, ce qui équivaut à dire que la famille (e_2, Ae_2) est libre. Soit e_2 un vecteur non nul de $\ker(A^2 + A + I)$. Si la famille (e_2, Ae_2) n'est pas libre, le vecteur e_2 étant non nul, le vecteur Ae_2 est nécessairement colinéaire à e_2 donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Ax = \lambda x$, ce qui implique que

$$A^3e_2 + A^2e_2 + Ae_2 = 0 \Rightarrow (\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda)e_2 \underset{e_2 \neq 0}{\Rightarrow} \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

donc $Ae_2 = 0$ et $e_2 \in \ker A$. Or $e_2 \in \ker(A^2+A+I)$ donc $e_2 \in \ker(A^2+A+I) \cap \ker A = \{0\}$, ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi, la famille (e_2, Ae_2) est libre et appartient à $\ker(A^2+A+I)$ (car $(A^2+A+I)Ae_2 = A(A^2+A+I)e_2 = 0$). On en déduit que la famille $(e_2, e_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}(A + \frac{1}{2}I)e_2)$ est libre et elle appartient à $\ker(A^2 + A + I)$ qui est de dimension 2. Par conséquent, la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A. Sa matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est B, ce qui démontre que A est semblable à B.

3. Le théorème des noyaux montre que

$$\mathbb{R}^n = \ker A \oplus \ker(A^2 + A + I).$$

La matrice A laisse stable les espaces $\ker A$ et $F = \ker(A^2 + A + I)$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A. La restriction $v = u_{|F}$ de u à F est un endomorphisme de F tel que

$$v^2 + v + \mathrm{Id}_F = 0 \Leftrightarrow (v + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_F)^2 + \frac{3}{4}\mathrm{Id}_F = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{2}{\sqrt{3}}(v + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_F)\right]^2 = -\mathrm{Id}_F .$$

La correction de la question 3 de l'exercice 3.1.10 montre que F est de dimension pair $2p$ et qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de F telle que

$$\mathrm{mat}(v,\mathcal{B}')=\begin{pmatrix}0_p & I_p\\ -I_p & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow \mathrm{mat}(u,\mathcal{B}')=\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}0_p & I_p\\ -I_p & 0_p\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I_p & 0_p\\ 0_p & I_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}I_p & \frac{\sqrt{3}}{2}I_p\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}I_p & -\frac{1}{2}I_p\end{pmatrix}$$

Si l'on fixe une base $\mathcal{B}$" de $\ker A$, la concaténation $(\mathcal{B}",\mathcal{B}')$ des bases $\mathcal{B}$" et $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^n$ (d'après le théorème des noyaux) et la matrice de u dans cette base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix}0_{n-2p} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}I_p & \frac{\sqrt{3}}{2}I_p\\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}I_p & \frac{1}{2}I_p\end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3.1.19 :

Etude du cas $A=\begin{pmatrix}16 & -8 & -16\\ 16 & -8 & -16\\ 8 & -8 & -8\end{pmatrix}$ Déterminons pour commencer le polynôme caractéristique de A.

$$\begin{aligned}P_A(X) &= \det(A-XI_3)=\begin{vmatrix}16-X & -8 & -16\\ 16 & -8-X & -16\\ 8 & -8 & -8-X\end{vmatrix}\underset{C_i\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=}\begin{vmatrix}-8-X & -8 & -16\\ -8-X & -8-X & -16\\ -8-X & -8 & -8-X\end{vmatrix}\\ &= -(X+8)\begin{vmatrix}1 & -8 & -16\\ 1 & -8-X & -16\\ 1 & -8 & -8-X\end{vmatrix}=-(X+8)\begin{vmatrix}1 & -8 & -16\\ 0 & -X & 0\\ 0 & 0 & 8-X\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1\end{matrix}\\ &= X(X+8)(8-X)\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(A)=\{-8,0,8\}$, la matrice étant de taille 3 et admettant 3 valeurs propres réelles distinctes, elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Chaque espace propre est de dimension 1. Notons e_1 (resp. e_2, resp. e_3) un vecteur propre de A associé à la valeur propre -8 (resp. 0, resp. 8). Soit $X\in\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $X^3=A$. La matrice X commute avec A car $AX=AA^3=A^3A=XA$ donc elle laisse stable chaque espace propre de A. En particulier, $\forall i\in[\![1,3]\!],\quad Xe_i\in\mathrm{Vect}(e_i)$ donc il existe des réels μ_1,μ_2,μ_3 tels que

$$\forall i\in[\![1,3]\!],\quad Xe_i=\mu_i e_i.$$

Ainsi, chaque vecteur e_i est un vecteur propre de X. La famille (e_1,e_2,e_3) étant une base de $\mathbb{R}^3$, nous venons de montrer que X est diagonalisable. Explicitons les différents réels μ_i.

$$-8e_1=Ae_1=X^3e_1=XXXe_1=XX\mu_1e_1=\mu_1XXe_1=\cdots=\mu_1^3e_1\Leftrightarrow\mu_1^3=-8.$$

La fonction $x\mapsto x^3$ étant une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\mu_1=-2$. Par la même méthode, $\mu_2=0$ et $\mu_3=2$. Soit P la matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la base (e_1,e_2,e_3). On a les égalités

$$A=P\,\mathrm{diag}(-8,0,8)P^{-1}\text{ et }X=P\,\mathrm{diag}(-2,0,2)P^{-1},$$

ce qui démontre que l'équation $X^3=A$ admet au plus une solution et le calcul suivant

$$X^3=(P\,\mathrm{diag}(-2,0,2)P^{-1})^3=X=P(\mathrm{diag}(-2,0,2))^3P^{-1}=X=P\,\mathrm{diag}(-8,0,8)P^{-1}=A$$

montre qu'il s'agit bien d'une solution.
Je laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on peut choisir comme matrice de changement de base

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\text{ donc }X=\begin{pmatrix}4 & -2 & -4\\ 4 & -2 & -4\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

Etude du cas $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-8\end{pmatrix}$ La matrice A est évidemment diagonalisable puisqu'elle est .....diagonale ! Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. C'est également une base de vecteurs propres de A. Si $X^3=A$ alors X laisse stable chaque espace propre. La valeur propre -8 étant de multiplicité 1, le vecteur $Xe_3\in E_{-8}(A)=\text{Vect}(e_3)$ donc il existe un réel μ_3 tel que $Xe_3=\mu_3 e_3$. Comme précédemment, l'égalité $X^3=A$ montre que $\mu_3=-2$ Les vecteurs Xe_1 et Xe_2 appartiennent à $\text{Vect}(e_1,e_2)$ donc X est de la forme $\begin{pmatrix}*&*&0*&*&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$. Notons B la matrice $\begin{pmatrix}*&**&*\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. L'équation $X^3=A$ est équivalente à l'équation $B^3=I$. La matrice B admet X^3-1 comme polynôme annulateur. Ce polynôme est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ (qui sont $1,j$ et j^2 avec $j=\exp(\frac{2\pi i}{3})$).

– Si B admet une valeur propre réelle, c'est nécessairement 1 et son polynôme caractéristique est divisible, dans $\mathbb{R}[X]$, par $(X-1)$. Ce polynôme caractéristique étant de degré 2, on en déduit qu'il est de la forme $(X-1)(X-a)$ avec $a\in\mathbb{R}$. Par conséquent, $a=1$ et $(X-1)^2$ est le polynôme caractéristique de B. La matrice B est annulée par le polynôme $(X-1)^2$ qui est scindé sur $\mathbb{R}$ donc B est trigonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible Q telle que $B=Q\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}Q^{-1}$. Or, on a :

$$B^2=I_2\Leftrightarrow (Q\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}Q^{-1})^2=I_2\Leftrightarrow Q\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}^2Q^{-1}=I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2x\\0&1\end{pmatrix}=Q^{-1}Q=I_2\Leftrightarrow x=0$$

donc $B=I_2$ et $X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ est diagonale.

Si B n'admet aucune valeur propre réelle alors $(B-I)$ est nécessairement inversible. Or

$$B^3=I\Leftrightarrow B^3-I=0\Leftrightarrow(B-I)(B^2+B+I)=0\Leftrightarrow B^2+B+I=0.$$

Montrons que la famille (f_1,Bf_1) est libre (où (f_1,f_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$). Sinon, f_1 étant non nul, cela signifie que $Bf_1=kf_1$ pour un certain réel k donc

$$0=B^2f_1+Bf_1+If_1=(k^2+k+1)f_1$$

ce qui implique que le réel k est solution de l'équation k^2+k+1 qui n'a aucune racine réelle ! donc (f_1,fe_1) est une famile libre. Si $Q=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ désigne la matrice de changement de base de la base (f_1,f_2) dans la base (f_1,Bf_1), en remarquant que $B(f_1)=Bf_1$ et $B(Bf_1)=B^2f_1=-Bf_1-f_1$, on a l'égalité

$$B=Q\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}Q^{-1}.$$

Le calcul par bloc des matrices nous montre que

$$X=\begin{pmatrix}a&b&0\\c&d&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&0\\c&d&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1},$$

ce qui signifie que X est semblable à la matrice $\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Puisque $\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^3=A$, on en déduit que toute matrice X semblable à la matrice

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est solution de $X^3 = A$.

Conclusion : l'équation $X^3 = A$ admet une infinité de solutions, une étant diagonale et toutes les autres étant non diagonales et non diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3.1.20 : Son polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -4-X & 3 & 3 \\ -3 & 2-X & 3 \\ -3 & 3 & 2-X \end{vmatrix} \underset{C_i \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 2-X & 3 & 3 \\ 2-X & 2-X & 3 \\ 2-X & 3 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2-X & 3 \\ 1 & 3 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1-X & 0 \\ 1 & 0 & -1-X \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\ &= (2-X)(X+1)^2 \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}$. Déterminons les espaces propres de A

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A)$ si et seulement si $(A+I)X = 0 \Leftrightarrow -3x + 3y + 3z = 0 \Leftrightarrow x = y + z$ donc

$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$

Donc $\dim E_{-1}(A) = 2$. D'autre part, la multiplicité de 2 étant 1 dans le polynôme caractéristique, la dimension de $E_2(A)$ ne peut excéder 1 et, puisque 2 est une valeur propre, sa dimension est au moins 1 donc $\dim E_2(A) = 1$. La matrice A est par conséquent diagonalisable. Calculons l'espace propre $E_2(A)$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow (A-2I) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 3y + 3z &= 0 \\ -3x + 3z &= 0 \\ -3x + 3y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x = y = z$ donc $E_2(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Une autre méthode : ***Synthèse****. les valeurs propres de A sont -1 et 2. Si A est diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont des -1 et des 2. Cette dernière matrice est donc annulée par le polynôme $(X+1)(X-2)$ donc A aussi $(P(QMQ^{-1}) = QP(M)Q^{--1})$.* ***Analyse****. Un calcul direct montre que $(A+I)(A-2I) = 0$ donc A est bien annulé par le polynôme $(X+1)(X-2)$ qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.Par contre, si A n'était pas annulé par $(X+1)(X-2)$, on en déduirait pas A n'est pas diagonalisable.*

Résolution dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ Soit $X \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ une solution de l'équation $X^2 + X = A$. La matrice X commute avec A car A est un polynôme en X. Puisque $(A+I)(A-2I) = 0$, on en déduit que

$$(X^2 + X + I)(X^2 + X - 2I) = 0.$$

Le polynôme $P(t) = (t^2 + t + 1)(t^2 + t - 2)$ annule donc la matrice X et ce polynôme est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ car

$$P(t) = (t - (-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}))(t - (-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}))(t+2)(t-1).$$

Par conséquent, la matrice X est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Soit u (resp. v) l'endomorphisme associé à A (resp. X) dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$. La commutation des matrices A et X implique la commutation des endomorphismes u et v. Les espaces propres de u sont donc stables par v. On en déduit que la restriction $v_{|E_\lambda(u)}$ de v à chaque espace propre $E_\lambda(u)$ est un endomorphisme de $E_\lambda(u)$ et, l'endomorphisme v étant diagonalisable, l'endomorphisme $v_{|E_\lambda(u)}$ est

également diagonalisable. Pour chaque valeur propre λ de u, il existe donc une base $\mathcal{B}_\lambda$ de $E_\lambda(u)$ formée de vecteurs propres de $v_{|E_\lambda(u)}$ donc de v (par définition d'une restriction). Par définition, tout élément non nul de $E_\lambda(u)$ étant un vecteur propre de u, on peut affirmer que chaque base $\mathcal{B}_\lambda$ est formée de vecteurs propres de u. La concaténation des bases $\mathcal{B}_{-1}, \mathcal{B}_2$ est une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{-1}, \mathcal{B}_2)$ de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres pour v et pour u. Les matrices de u et v dans cette base sont respectivement $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$. Les endomorphismes u et v vérifient l'égalité $v^2 + v = u$ donc $\Delta^2 + \Delta = D$, ce qui signifie que $\begin{cases} \mu_1^2 + \mu_1 = -1 \\ \mu_2^2 + \mu_2 = -1 \\ \mu_3^2 + \mu_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 \in \{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\} \\ \mu_2 \in \{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\} \\ \mu_3 \in \{-2, 1\} \end{cases}$. Si l'on note Q la matrice de changement de la base canonique de $\mathbb{C}^3$ à la base $\mathcal{B}$, nous avons $A = QDQ^{-1}$ et $X = Q\Delta Q^{-1}$ avec $\begin{cases} \mu_1 \in \{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\} \\ \mu_2 \in \{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\} \\ \mu_3 \in \{-2, 1\} \end{cases}$. Réciproquement, si Q désigne une matrice inversible de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $A = QDQ^{-1}$, la matrice $X = Q\Delta Q^{-1}$ avec $\begin{cases} \mu_1 \in \{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\} \\ \mu_2 \in \{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\} \\ \mu_3 \in \{-2, 1\} \end{cases}$ est bien solution de l'équation $X^2 + X = A$ car

$$X^2 + X = Q\Delta^2 Q^{-1} + Q\Delta Q^{-1} = Q(\Delta^2 + \Delta)Q^{-1} = QDQ^{-1} = A.$$

Résolution dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ L'étude de la diagonalisabilité de A a montré que l'on a l'égalité $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Soit u, v les endomorphismes de $\mathbb{C}^3$ dont les matrices respectives dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ sont A et X. Ces deux endomorphismes commutent donc $v_{|E_{-1}(A)}$ est un endomorphisme de $E_{-1}(A)$ et $v_{|E_2(A)}$ est un endomorphisme de $E_2(A)$. Ce dernier espace étant une droite, on en déduit que $v_{|E_2(A)}$ est une homothétie (sa matrice dans une base quelconque est une matrice 1×1 qui est donc une homothétie !). Puisque $v^2 + v = -\operatorname{Id}$, cette homothétie $v_{|E_2(A)} = \alpha \operatorname{Id}_{E_{-1}(A)}$ vérife $\alpha^2 + \alpha = -1$ donc $v_{|E_2(A)} = \alpha \operatorname{Id}_{E_2(A)}$ avec $\alpha \in \{-2, 1\}$. Etudions le cas de l'endomorphisme $w = v_{|E_{-1}(A)}$. Il vérifie $w^2 + w = -\operatorname{Id}_{E_{-1}(A)}$ (par définition d'une restriction). Soit $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(x, w(x))$ est une famille libre de $E_{-1}(A)$. Pour commencer $w(x) = v(x) \in E_{-1}(A)$. Puisque x est non nul, la liberté de la famille $(x, w(x))$ est équivalent à ce que $w(x)$ ne soit pas colinéaire à x. Procédons par l'absurde. Si $w(x)$ est colinéaire à x alors il existe un réel a tel que $w(x) = ax$ donc $w^2(x) = a^2 x$. L'égalité $w^2 + w = -\operatorname{Id}_{E_{-1}(A)}$ implique que

$$a^2 x + ax = -x \Leftrightarrow (a^2 + a + 1)x = 0.$$

Or x est non nul, donc $a^2 + a + 1 = 0$ et cette équation n'admet aucune solution réel donc la famille $(x, w(x))$ est libre dans $E_{-1}(A)$ qui est de dimension 2 donc $(x, w(x))$ est une base de $E_{-1}(A)$. Les espaces $E_{-1}(A)$ et $E_2(A)$ étant en somme directe, la famille $(x, w(x), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Puisque x et $w(x)$ appartiennent à $E_{-1}(A)$ et $w(w(x)) = w^2(x) = -x - w(x)$, les

matrices de u et v dans cette base sont respectivement

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}0&-1&0\\1&-1&0\\0&0&\alpha\end{pmatrix} \text{ avec } \alpha\in\{-2,1\}.$$

Soit Q la matrice de changement de la base canonique dans la base $(x, w(x), \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$, on a

$$A=Q\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}Q^{-1} \text{ et } X=Q\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&-1&0\\0&0&\alpha\end{pmatrix}Q^{-1} \text{ avec } \alpha\in\{-2,1\}.$$

Réciproquement, si Q est une matrice telle que $A=Q\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}Q^{-1}$ alors $X=Q\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&-1&0\\0&0&\alpha\end{pmatrix}Q^{-1}$ avec $\alpha\in\{-2,1\}$ est bien solution de l'équation $X^2+X=A$.

Correction de l'exercice 3.1.21 :

1. Déterminons la matrice A de f dans la base canonique $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ de $\mathbb{R}^3$ (qui est orthonormée) et écrivons $a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$. Alors, en se rappelant les bonnes vielles formules du prof de physique, $\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y}=-\overrightarrow{y}\wedge\overrightarrow{x}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{i}) &= a\wedge\overrightarrow{i}=(a_1\overrightarrow{i}+a_2\overrightarrow{j}+a_3\overrightarrow{k})\wedge\overrightarrow{i}=-a_2\overrightarrow{k}+a_3\overrightarrow{j}=a_3\overrightarrow{j}-a_2\overrightarrow{k}\\ f(\overrightarrow{j}) &= -a_3\overrightarrow{i}+a_1\overrightarrow{k} \text{ et } f(\overrightarrow{k})=a_2\overrightarrow{i}-a_1\overrightarrow{j} \text{ donc}\end{aligned}$$

$$A=\begin{pmatrix}0&-a_3&a_2\\a_3&0&-a_1\\-a_2&a_1&0\end{pmatrix}$$

qui est une belle matrice antisymétrique.
Si le vecteur a est nul, la matrice A aussi (donc elle diagonalisable !).
Si $a\neq 0$, le polynôme caractéristique de A est

$$X^3+\|a\|^2X=X(X-i\|a\|)(X+i\|a\|),$$

où $\|a\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, dont la seule racine réelle est 0.
Par conséquent, si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, A est semblable à la matrice nulle donc $A=0$, ce qui n'est pas le cas et A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Elle n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$, sinon $A-0I_3=A$ serait nilpotente donc le polynôme caractéristique de A serait X^3, ce qui n'est pas le cas.
Par contre A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ car son polynôme caractéristique est scindé à racines silmples sur $\mathbb{C}$ $(0, i\|a\|, -i\|a\|)$.
Remarque : Nous pouvons faire un peu mieux. Cela résulte du fait suivant :si H est une sous-espace stable par A alors son orthognal $H^\perp$ dans $\mathbb{R}^3$ euclidien (avec le produit scalaire usuel) est stable par A. En effet, pour tout $x\in H$, $Ax\in H$ donc

$$\begin{aligned}&\forall x\in H,\quad \forall y\in H^\perp,\quad (Ax,y)=0\Leftrightarrow\forall x\in H,\quad \forall y\in H^\perp,\quad (x,{}^tAy)\\ &\Leftrightarrow\forall x\in H,\quad \forall y\in H^\perp,\quad -(x,Ay)=0\Leftrightarrow\forall x\in H,\quad \forall y\in H^\perp,\quad (x,Ay),\end{aligned}$$

ce qui implique que, si $y\in H^\perp$, Ay est orthogonal à H donc $Ay\in H^\perp$. C'est ce résultat fondamental qui permet la réduction des matrices symétriques en base orthonormale. Si on l'applique

aux matrices antisymétriques, on obtient également un théorème de réduction en base orthonormale. Une étude est faite dans l'exercice 3.1.24. Traitons ici à la main la réduction en BON de A. Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt montre l'existence d'une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) *de* $\mathbb{R}^3$ *telle que* $e_1 = \dfrac{a}{\|a\|}$ *(on forme une base de* $\mathbb{R}^3$ *dont le premier vecteur est a puis on orthormalise). En particulier, en utilisant les propriétés usuelles du produit vectoriel, on a*

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1, \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

donc

$$f(e_1) = a \wedge e_1 = \|a\| e_1 \wedge e_1 = 0, \quad f(e_2) = \|a\| e_1 \wedge e_2 = \|a\| e_3, \quad f(e_3) = \|a\| e_1 \wedge e_3 = -\|a\| e_2$$

et la matrice de f *dans la base* (e_1, e_2, e_3) *est*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\|a\| \\ 0 & \|a\| & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit P *la matrice de changement de base de la base orthonormée* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *dans la base orthonormée* (e_1, e_2, e_3)*. La matrice* P *est donc orthogonale (cf. le cours sur la caractérisation des matrices orthogonales) et*

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\|a\| \\ 0 & \|a\| & 0 \end{pmatrix}^2 P^{-1},$$

ce qui nous fournit une réduction en base orthonormale de A.

2.

(a) Nous savons que $\forall n \geqslant 0, \quad \|a \wedge x_n\| \leqslant \|a\| \|x_n\|$ donc $\|x_{n+1}\| \leqslant \|a\| \|x_n\|$. Une récurrence classique montre que $\forall n \geqslant 0, \quad \|x_n\| \leqslant \|a\|^n \|x\|$ donc $\forall n \geqslant 0, \quad \dfrac{\|x_n\|}{n!} \leqslant \dfrac{\|a\|^n}{n!} \|x\|$ La série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{\|a\|^n}{n!}$ étant convergente, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ est absolument convergente dans $\mathbb{R}^3$.
On remarque pour commencer que $x_n = f^n(x)$, où $f^n = f \circ \cdots \circ f$. Alors, on obtient $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} f^n(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} f^n\right)(x) = [\exp(f)](x)$ et l'application g est simplement l'exponentielle de l'endomorphisme f. En dimension 3, une rotation est simplement un endomorphisme orthogonal de déterminant 1 (cf. son cours sur les rotations de $\mathbb{R}^3$). En utilisant que ${}^t(f^n) = ({}^t f)^n$, on en déduit que ${}^t \exp(f) = \exp({}^t f)$ donc

$${}^t g g = {}^t \exp(f) \exp(f) = \exp({}^t f) \exp(f) = \exp(-f) \exp(f) = \exp(-f + f) = \exp(0) = \mathrm{Id}$$

et g est bien un endomorphisme orthogonal. La formule $(PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1}$ montre que pour toute matrice B, on a $P \exp(B) P^{-1} = \exp(PBP^{-1})$. En particulier, puisque A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, il existe une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $A = P \mathrm{diag}(0, i\|a\|, -i\|a\|) P^{-1}$ donc

$$\exp A = P \exp \mathrm{diag}(0, i\|a\|, -i\|a\| P^{-1} = P \,\mathrm{diag}(1, e^{i\|a\|}, e^{-i\|a\|}) P^{-1}.$$

En particulier,

$$\det g = \det A = \det \mathrm{diag}(1, e^{i\|a\|}, e^{-i\|a\|}) = 1,$$

ce qui démontre que g est bien une rotation. Le vecteur a est un point fixe de g car

$$g(a) = a + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^n(a)}{n!} = a + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{0}{n!} = a.$$

Pour caractériser son angle θ, il suffit de passer à la trace

$$1+2\cos\theta=\mathrm{tr}(g)=\mathrm{tr}(\exp(A))=1+2\cos\|a\|\Rightarrow\theta=\pm\|a\|\bmod 2\pi.$$

Malheureusement, si nous ne pouvons déterminer exactement l'angle. En utilisant la remarque de la question 1, nous avons $f(e_2)=\|a\|e_3$ et $f(e_3)=-\|a\|e_2$ donc $f^2(e_2)=-\|a\|^2e_2$ et

$$\begin{array}{rcl}\forall n&\geqslant&0,\quad f^{2n}(e_2)=(-1)^n\|a\|^{2n}e_2,\\ f^{2n+1}(e_2)&=&f(f^{2n}(e_2))=f((-1)^n\|a\|^{2n}e_2)=(-1)^n\|a\|^{2n}f(e_2)=(-1)^n\|a\|^{2n+1}e_3.\end{array}$$

On en déduit que

$$\begin{array}{rcl}g(e_2)&=&\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{2n}(e_2)}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{2n+1}(e_2)}{(2n+1)!}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\|a\|^{2n}}{(2n)!}\right)e_2+\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\|a\|^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)e_3\\&=&\cos(\|a\|)e_2+\sin(\|a\|)e_3..\end{array}$$

De même $f(e_3)=-\|a\|e_2$ et $f^2(e_3)=--\|a\|^2e_3$ donc

$$\begin{array}{rcl}\forall n&\geqslant&0,\quad f^{2n}(e_3)=(-1)^n\|a\|^{2n}e_3,\\ f^{2n+1}(e_3)&=&f(f^{2n}(e_3))=f((-1)^n\|a\|^{2n}e_3)=(-1)^n\|a\|^{2n}f(e_3)=-(-1)^n\|a\|^{2n+1}e_2\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}g(e_3)&=&\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{2n}(e_3)}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{2n+1}(e_3)}{(2n+1)!}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\|a\|^{2n}}{(2n)!}\right)e_3-\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\|a\|^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)e_3\\&=&\cos(\|a\|)e_2-\sin(\|a\|)e_3.\end{array}$$

La matrice de g dans la base (e_1,e_2,e_3) est donc

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(\|a\|)&-\sin(\|a\|)\\0&\sin(\|a\|)&\cos(\|a\|)\end{pmatrix},$$

qui est une rotation d'angle $\|a\|$. Par conséquent, g est la rotation d'axe la droite engendrée par a et d'angle $\|a\|$.

Correction de l'exercice 3.1.22 :

1. Les vecteurs colones sont deux à deux orthogonaux et ils sont unitaires donc A est une matrice orthogonale. Son déterminant est égale à -1 donc A est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$.
Déterminons $\ker(A+I)$.

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker(A+I)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rl}x-2y+2z&=0\\4x+y-z&=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rl}x-2y+2z=0&=0\\9(y-z)=0&=\\&\underset{L_2\leftarrow L_2-4L_1}{}0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=z\\x=0\end{array}\right.$$

donc $\ker(A+I)=\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix})$.
Ainsi, la matrice A est la composée de la symétrie orthogonale par rapport à la droite D : $\left\{\begin{array}{l}y=z\\x=0\end{array}\right.$ et de la rotation d'axe la droite D et d'angle $\pm\theta_0$.

Pour déterminer précisément θ, nous devons déterminer son signe. La trace de A étant égal à $-\frac{23}{9}$, on a donc

$$-1+2\cos\theta=-\frac{23}{9}\Leftrightarrow\cos\theta=-\frac{7}{9}\Rightarrow\theta=\pm\arccos(-\frac{7}{9}).$$

Le plan orthogonal à D, que l'on note P, est le plan $y+z=0$ dont une base orthonormale est $(e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Le vecteur $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. La famille (e_1,e_2,e_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. Si l'on pose $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}$, la matrice P est orthogonale et

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-\frac{7}{9}&\frac{4}{9}\sqrt{2}\\0&-\frac{4}{9}\sqrt{2}&-\frac{7}{9}\end{pmatrix}$$

donc $\sin\theta=-\frac{4}{9}\sqrt{2}$ ce qui implique que $\theta\in]-\pi,0[$ et on en déduit que $\theta=\arccos(-\frac{7}{9})$.

2. Soit $X\in O(\mathbb{R}^3)$ telle que $X^3=A$. La matrice X commute avec A car A est un polynôme en X donc elle laisse stable l'axe de symétrie D de A ainsi que le plan $P=D^\perp$. Soit u (resp. v) l'endomorphisme associé à A (resp. X) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ euclidien. La matrice $P^{-1}XP$ est la matrice de v dans la base (e_1,e_2,e_3) donc

$$P^{-1}XP=\begin{pmatrix}\pm1&0&0\\0&*&*\\0&*&*\end{pmatrix}$$

et, comme P est une matrice orthogonale et X est une matrice orthogonale, la matrice $P^{-1}XP$ est encore orthogonale. Ainsi, on a

$$P^{-1}XP=\begin{pmatrix}\pm1&0&0\\0&\cos\varphi&-\sin\varphi\\0&\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}\text{ ou }P^{-1}XP=\begin{pmatrix}\pm1&0&0\\0&-\cos\varphi&\sin\varphi\\0&-\sin\varphi&-\cos\varphi\end{pmatrix}.$$

et l'égalité satisfaite par X implique que

$$\begin{pmatrix}\pm1&0&0\\0&\cos\varphi&-\sin\varphi\\0&\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\text{ ou }\begin{pmatrix}\pm1&0&0\\0&-\cos\varphi&\sin\varphi\\0&-\sin\varphi&-\cos\varphi\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\pm1&0&0\\0&\cos3\varphi&-\sin3\varphi\\0&\sin3\varphi&\cos3\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\text{ ou }\begin{pmatrix}\pm1&0&0\\0&-\cos3\varphi&\sin3\varphi\\0&-\sin3\varphi&-\cos3\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\\0&\sin\theta&\cos\end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}P^{-1}XP&=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\varphi&-\sin\varphi\\0&\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}\text{ avec }\cos3\varphi=\cos\theta\\\text{ou }P^{-1}XP&=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-\cos\varphi&\sin\varphi\\0&-\sin\varphi&-\cos\varphi\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi&-\sin\varphi\\0&\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}\\\text{avec }-\cos3\varphi&=\cos\theta\Leftrightarrow\cos(3\varphi+\pi)=\cos\theta.\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi = \dfrac{\theta}{3} \bmod \dfrac{2\pi}{3}$ dans le premier cas, ou $\varphi = \dfrac{\theta-\pi}{3} \bmod \dfrac{2\pi}{3}$ donc

$$P^{-1}XP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\theta}{3}+k\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\frac{\theta}{3}+k\frac{2\pi}{3}) \\ 0 & \sin(\frac{\theta}{3}+k\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{\theta}{3}+k\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} \text{ avec } k=0,1,2$$

$$\text{ou } P^{-1}XP = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\theta-\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\frac{\theta-\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}) \\ 0 & \sin(\frac{\theta-\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{\theta-\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}. \text{ avec } k=0,1,2.$$

Réciproquement, toute matrice de la forme précédente satisfait à l'équation $X^3 = A$. Cette équation a donc 9 solutions.

Correction de l'exercice 3.1.23 :

1. La matrice A^2 est diagonalisable donc il existe un polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)$ scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ qui annule A et on a :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(A^2-\lambda_i I) \tag{39}$$

La matrice A est donc annulé par le polynôme $Q(X) = \prod_{i=1}^{r}(X^2-\lambda_i)$.

– Si A est inversible alors A^2 aussi et on peut suposer qu'aucun des λ_i est nul. Soit $\delta_i \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_i = \delta_i^2$. Le polynôme Q, qui est annulateur de A, est scindé $\mathbb{C}$ et ses racines sont distinctes (si $\varepsilon\delta_i = \varepsilon'\delta_j$ avec $\varepsilon,\varepsilon' \in \{\pm 1\}$ alors $(\varepsilon\delta_i)^2 = (\varepsilon'\delta_j)^2 \Leftrightarrow \delta_i^2 = \delta_j^2 \Leftrightarrow \lambda_i = \lambda_j$ donc $i=j$. Puisque les δ_i sont tous non nuls, l'égalité $\varepsilon\delta_i = \varepsilon'\delta_i$ implique que $\varepsilon = \varepsilon'$) donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

– Si A est non inversible.
Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice $S \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $S^{-1}AS = \text{diag}(0,..,0,\mu_1,..,\mu_t)$ où les μ_j sont tous non nuls. Par conséquent, $S^{-1}A^2S = \text{diag}(0,..,0,\mu_1^2,..,\mu_t^2)$ où les μ_j^2 sont tous non nuls. On en déduit que

$$S^{-1}(\ker A) = \ker(S^{-1}AS) = \ker(S^{-1}A^2S) = S^{-1}(\ker A^2) \Rightarrow \ker A = \ker A^2.$$

Si $\ker A = \ker A^2$. On peut supposer que $\lambda_1 = 0$ et que $\lambda_i \neq 0$ pour $i > 1$. Par conséquent, lorsque $i > 1$, le polynôme $(X^2-\lambda_i)$ est à scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ (de racines δ_i et $-\delta_i$) et le lemme des noyaux montre que

$$\ker(A^2-\lambda_i I) = \ker(A-\delta_i I) \oplus \ker(A+\delta_i I).$$

Cette égalité combinée à l'égalité (39) et à l'hypothèse $\ker A = \ker A^2$ nous montre que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(A^2-\delta_i^2 I) = \ker A^2 \oplus \left(\bigoplus_{i>1} \ker(A^2-\delta_i^2 I)\right) = \ker A \oplus \left(\bigoplus_{i>1} \ker(A-\delta_i I) \oplus \ker(A+\delta_i I)\right)$$

donc $\mathbb{C}^n$ est la somme des espaces propres de A, ce qui implique que A est diagonalisable.

2. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui est la matrice de rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ de $\mathbb{R}^2$, est non diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais son carré, qui est l'homothétie $-I_2$, est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ donc le résultat ne s'étend pas sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3.1.24 :

1. Soient $x, y \in E$.

$$\begin{aligned} & < u(x+y), x+y >= 0 \Leftrightarrow \underbrace{< u(x), x >}_{=0} + \underbrace{< u(y), y >}_{=0} + < u(x), y > + < u(y), x >= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & < u(x), y >= - < u(y), x > \Leftrightarrow < u(x), y >= - < x, u(y) > . \end{aligned}$$

Cette dernière égalité étant valable pour tous $x, y \in E$, on en déduit que ${}^t u = -u$ donc u est antisymétrique.
La réciproque est évidente car

$$\forall x \in E, \quad < u(x), x >=< x, {}^t u(x) >=< x, -u(x) >= - < x, u(x) >= - < u(x), x > \Rightarrow < u(x), x >= 0.$$

2. Si $x \in H$ alors $u(x) \in H$. Par conséquent, $\forall y \in H^\perp, \quad < u(x), y >= 0$. Soit $y \in H^\perp$, alors on a

$$\forall x \in H, < u(y), x >= - < \underbrace{y}_{\in H^\perp}, \underbrace{u(x)}_{\in H} >= 0$$

donc $u(y) \in H^\perp$ ce qui implique que $H^\perp$ est stable par u.

3. L'endomorphisme ${}^t uu$ est un endomorphisme symétrique positf de l'espace euclidien E car

$${}^t({}^t uu) = {}^t u({}^t({}^t u)) = {}^t uu \text{ et } \forall x \in E, \quad < {}^t uu(x), x >=< u(x), u(x) >= \|u(x)\|^2 \geqslant 0.$$

L'endomorphisme ${}^t uu$ est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles positives. Or ${}^t uu = -u^2$ donc u^2 est diagonalisable et ses valeurs propres sont réels négatives.

4. Montrons que les vecteurs z et $u(z)$ sont forment une famille libre. Sinon, puisque z est non nul, le vecteur $u(z)$ est colinéaire à z donc il existe un réel a tel que $u(z) = az$ donc $u^2(z) = a^2 z$. Or $u(z) = \lambda z$ donc $a^2 = \lambda < 0$, ce qui est absurde donc H est bien un plan. Il est stable par u car $u(z) \in H$ et $u(u(z)) = u^2(z) = \lambda z \in H$.

5. Le noyau $\ker u$ de u est stable par u donc son orthogonal $(\ker u)^\perp$ est aussi stable par u. On note encore $<,>$ la restriction du produit scalaire $<,>$ de E au sous-espace $H = (\ker u)^\perp$. La restriction $v = u_{|H}$ de u à H est un endomorphisme de $(\ker u)^\perp$ et v est antisymétrique.car

$$\forall x \in H, \quad < v(x), x >=< u(x), x >= 0.$$

L'endomorphisme v est inversible car, si $x \in H = (\ker u)^\perp, \quad v(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker u$ donc $x \in (\ker u)^\perp \cap \ker u = \{0\}$ donc $\ker v = \{0\}$. Ainsi, l'endomorphisme v est antisymétrique et inversible donc toutes les valeurs propres de v^2 sont strictement négatives. En particulier, son déterminant est le produit de $\dim H$ nombres strictement négatifs donc son signe est celui de $(-1)^{\dim H}$. D'autre part, son déterminant est strictement positif car $\det v^2 = (\det v)^2 > 0$. Ainsi, $\dim H$ est nécessairement pair. Notons $\dim H = 2r$.
Soit $\lambda_1 = -a_1^2$, $a_1 \in \mathbb{R}_+^\times$, une valeur propre de v^2 et e_1 un vecteur propre associé. Le plan $H_1 = \text{Vect}(e_1, v(e_1))$ est stable par v. Les vecteurs $e_1, v(e_1)$ sont orthogonaux (car $\forall x \in E, \quad < u(x), x >= 0$) donc la famille $(f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}, f_2 = \dfrac{v(e_1)}{\|v(e_1)\|})$ est une base orthonormale de H_1. Les égalités

$$v(f_1) = \frac{1}{\|e_1\|} v(e_1) = \frac{\|v(e_1)\|}{\|e_1\|} f_2 \text{ et } v(f_2) = \frac{v^2(e_1)}{\|v(e_1)\|} = -\frac{a_1^2}{\|v(e_1)\|} e_1 = -a_1^2 \frac{\|e_1\|}{\|v(e_1)\|} f_1$$

montrent que la matrice de $v_{|H_1}$ dans la base orthonormale est $\begin{pmatrix} 0 & -a_1^2 \dfrac{\|e_1\|}{\|v(e_1)\|} \\ \dfrac{\|v(e_1)\|}{\|e_1\|} & 0 \end{pmatrix}$.
Puisque v est antisymétrique, l'endomorphisme $v_{|H_1}$ est aussi antisymétrique ainsi que sa matrice dans toute base orthonormale donc

$$\frac{\|v(e_1)\|}{\|e_1\|} = a_1^2 \frac{\|e_1\|}{\|v(e_1)\|} \Leftrightarrow a_1^2 = \left(\frac{\|v(e_1)\|}{\|e_1\|}\right)^2 \Rightarrow a_1 = \frac{\|v(e_1)\|}{\|e_1\|}$$

(car $a_1>0$ et $\dfrac{\|v(e_1)\|}{\|e_1\|}>0$). La matrice de v_1 dans la base (f_1,f_2) est $\begin{pmatrix}0&-a_1\\a_1&0\end{pmatrix}$, c'est-à-dire, $u(f_1)=af_1$ et $u(f_2)=-a_1f_2$.
Le plan H_1 est stable par v donc son orthogonal est stable par v. Si $H_1^\perp\neq\{0\}$, alors $v_{|H_1^\perp}$ est un endomorphisme antisymétrique inversible. Soit $\lambda_2=-a_2^2$, $a_2\in\mathbb{R}_+^\times$, une valeur propre de $v_{|H_1^\perp}$ et e_2 un vecteur propre associé. Le raisonnement précédent montre l'existence d'une base orthonormale (f_3,f_4) du plan $H_2=\text{Vect}(e_2,v(e_2))$ dans laquelle la matrice de $v_2=v_{|H_2}$ est $\begin{pmatrix}0&-a_2\\a_2&0\end{pmatrix}$, c'est-à-dire, $u(f_3)=a_2f_3$ et $u(f_4)=-a_2f_4$. En itérant ce procédé et étant donné que H est de dimension pair $2r$, on en déduit que H est la somme directe orthogonale de p plans, chacun disposant d'une base orthonormale (f_{2i+1},f_{2i+2}) telle que $u(f_{2i+1})=a_if_{2i+2}$ et $u(f_{2i+2})=-a_if_{2i+1}$. Si l'on fixe une base orthonormale $(e_1,..,e_p)$ de $\ker u$, l'espace E étant la somme directe orthogonale de $\ker u$ et H, la famille $(e_1,..,e_r,f_1,f_2,...,f_{2p-1},f_{2p})$ est une base orthormale de E et la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix}0_p&&&(0)\\&D_1&&\\&&\ddots&\\(0)&&&D_r\end{pmatrix}\text{ où }D_i=\begin{pmatrix}0&-a_i\\a_i&0\end{pmatrix}\text{ avec }a_i\in\mathbb{R}_+^\times,\ -a_i^2\in\text{Sp}(A)\text{ et }p=\dim\ker u\in[\![0,\dim E]\!].$$

Du point de vue matricielle, nous venons de montrer que pour toute matrice antisymétrique $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice $P\in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A=P\begin{pmatrix}0_p&&&(0)\\&D_1&&\\&&\ddots&\\(0)&&&D_r\end{pmatrix}P^{-1}\text{ où }D_i=\begin{pmatrix}0&-a_i\\a_i&0\end{pmatrix}\text{ avec }a_i\in\mathbb{R}_+^\times\text{ et }-a_i^2\in\text{Sp}(A)$$

6. Puisque $(\det A)^2=\det A^2=\det(-I_n)=(-1)^n$ et que $\det A$ est à coefficients réels, on en déduit que n est pair et la matrice est inversible ($A^2=-I_n$ est inversible)En outre, la seule valeur propre de $A^2=-I_n$ est -1 donc le théorème précédent montre que A est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix}D_1&&(0)\\&\ddots&\\(0)&&D_{n/2}\end{pmatrix}$ avec $D_i=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. Réciproquement, si $A=P\begin{pmatrix}D_1&&(0)\\&\ddots&\\(0)&&D_{n/2}\end{pmatrix}P^{-1}$ avec $D_i=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ et P une matrice orthogonale, la matrice A est antisymétrique et $A^2=-I_n$.
Si A n'est plus antisymétrique, la méthode preuve de la question 3 de l'exercice 3.1.18 montre qu'il s'agit des matrices de la forme $A=P\begin{pmatrix}D_1&&(0)\\&\ddots&\\(0)&&D_{n/2}\end{pmatrix}P^{-1}$ avec $D_i=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ et P une matrice inversible quelconque.

Correction de l'exercice 3.1.25 :

1. Soit $\mathcal{B}=(e_1,..,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(,)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. La matrice A est symétrique définie positive donc l'application $<,>$: $(x,y)\mapsto(Ax,y)$ définit un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ et la base $\mathcal{B}$ n'est pas nécessairement orthonormale pour $<,>$. Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt montre l'existence d'une base $\mathcal{B}'=(f_1,..,f_n)$ orthonormale pour le produit scalaire $<,>$ telle que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\text{Vect}(f_1,..,f_i)=\text{Vect}(e_1,..,e_n)$. Soit P la matrice de changement de base de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$ définie par $Pe_i=f_i$. Soit $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker défini par $\delta_{i,j}=\begin{cases}1\text{ si }i=j\\0\text{ sinon}\end{cases}$. L'orthonormalité de la base $(f_i)_i$ montre que

$$\forall i,j\in[\![1,n]\!],\quad <f_i,f_j>=\delta_{i,j}\Leftrightarrow(Af_i,f_j)=\delta_{i,j}\Leftrightarrow(APe_i,Pe_j)=\delta_{i,j}\Leftrightarrow({}^tPAPe_i,e_j)=\delta_{i,j}$$

La famille $(e_1,..,e_n)$ étant une base orthonormale pour le produit scalaire $(,)$, on en déduit que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, ${}^tPAPe_i = e_i$ donc ${}^tPAP = I_n$, ce qui implique que $A = ({}^tP)^{-1}I_nP^{-1} = {}^t(P^{-1})(P^{-1})$.
Remarque : la matrice P est triangulaire supérieure car $f_i \in \text{Vect}(e_1,..,e_i)$ donc P^{-1} aussi.

2.

(a) Supposons que A soit inversible. La question précédente montre qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$. La matrice ${}^tP^{-1}BP^{-1}$ est symétrique et positive ($\forall x \in \mathbb{R}^n$, $({}^tPBPx, x) = (BPx, Px) \geqslant 0$ car $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $(By, y) \geqslant 0$). Elle est donc diagonalisable en base orthonormale, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$ {}^tP^{-1}BP^{-1} = {}^tQ\,\text{diag}(b_1,..,b_n)Q \Leftrightarrow B = {}^tP^tQ\,\text{diag}(b_1,..,b_n)QP$$

où tous les nombres b_i sont des réels positifs. Les propriétés usuelles du déterminant montre que pour toute matrice X, on a $\det({}^tX) = \det X$. En particulier, si Q est orthogonale, i.e. ${}^tQQ = Q{}^tQ = I_n$, on en déduit que $1 = \det Q \det({}^tQ) = (\det Q)^2$ donc $\det Q = \pm 1$, et $\det A = \det({}^tPP) = (\det P)^2$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\det(A+B) &= \det({}^tPP + {}^tP^tQ\,\text{diag}(b_1,..,b_n)QP) = \det({}^tP^tQ({}^tQ^{-1}Q^{-1} + \text{diag}(b_1,..,b_n))QP)\\ &= \det({}^tP^tQ((Q^tQ)^{-1} + \text{diag}(b_1,..,b_n))QP) = \det({}^tP^tQ)\det(I_n + \text{diag}(b_1,..,b_n))\det(QP\\ &= (\det P)^2\prod_{i=1}^n(1+b_i) \geqslant (\det P)^2 = \det A.\end{aligned}$$

Fixons B une matrice symétrique positive. L'application $A \mapsto \det(A+B) - \det A$ est continue sur l'ensemble des matrices symétriques positives $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (elle dépend polynômialement des coefficients de A) et elle est strictement positive sur l'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ des matrices symétriques définies positives qui est dense dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (Si $A \in \mathcal{S}_n^+$, la matrice $A + aI_n$ est définie positive si $a > 0$ et $A + aI_n \underset{a\to 0^+}{\to} A$) donc l'application $A \mapsto \det(A+B) - \det A$ est positive sur $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, i.e.

$$\forall A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \quad \det(A+B) \geqslant \det A.$$

(b) En conservant les notations de la question précédente, lorsque $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ nous avons

$$\det(tA+(1-t)B) = \det(t^tPP + (1-t)^tP^tQ\,\text{diag}(b_1,..,b_n)QP) = \cdots = (\det P)^2\prod_{i=1}^n(t+(1-t)b_i).$$

Puisque $b_i \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto \ln x$ est concave donc

$$\forall t \in [0,1], \quad \ln(t\times 1 + (1-t)b_i) \geqslant t\ln 1 + (1-t)\ln b_i = (1-t)\ln b_i \Rightarrow t + (1-t)b_i \geqslant b_i^{1-t}$$

donc

$$\det(tA + (1-t)B) \geqslant (\det P)^2\prod_{i=1}^n b_i^{1-t} = (\det P)^2\left(\prod_{i=1}^n b_i\right)^{1-t}.$$

Or les égalités $A = \det({}^tPP)$ et $B = {}^t\,P^tQ\,\text{diag}(b_1,..,b_n)QP$ implique que

$$\det A = (\det P)^2 \text{ et } \det B = (\det P)^2\left(\prod_{i=1}^n b_i\right)$$

donc

$$\det(tA+(1-t)B) \geqslant (\det P)^2\left(\frac{\det B}{(\det P^2)}\right)^{1-t} = \left((\det P)^2\right)^t(\det B)^{1-t} = (\det A)^t(\det B)^{1-t}.$$

Pour $t \in [0,1]$ fixé et pour $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, la fonction $A \mapsto \det(tA+(1-t)B) - (\det A)^t(\det B)^{1-t}$

est continue sur $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, positive sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est dense dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc elle est positive sur $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$\forall t \in [0,1], \quad \forall A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \quad \det(tA + (1-t)B) \geqslant (\det A)^t (\det B)^{1-t}.$$

Remarque : l'application $A \mapsto \ln(\det A)$ est donc concave sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

9.2 Analyse

Correction de l'exercice 3.2.1 : Rappelons pour commencer l'équation vérifiée par f

$$2f(x+1) = f(x) + f(2x). \tag{40}$$

La fonction f satisfait au théorème de Dirichlet donc la fonction f est développable en série de Fourier (et la convergence est normale). Si on désigne par c_n son $n^{ème}$ coefficient de Fourier complexe, nous avons l'égalité suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \tag{41}$$

En réinjectant l'égalité (41) dans l'égalité (40), nous obtenons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2inx} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in} e^{inx} \tag{42}$$

Pour utiliser l'unicité du développement en série de Fourier, décomposons la dernière somme selon les nombres pairs et les nombres impairs

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in} e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{2n} e^{i2n} e^{i2nx} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{2n+1} e^{i(2n+1)} e^{i(2n+1)x} \tag{43}$$

En combinant les égalités (43) et (42), nous obtenons les relations suivantes valable pour tout entier relatif n

$$2c_{2n} = c_n + c_n e^{i2n} \Leftrightarrow c_{2n} = \frac{1+e^{2in}}{2} c_n = c_n e^{in} \cos n \tag{44}$$

et

$$c_{2n+1} = c_{2n+1} e^{i(2n+1)} \tag{45}$$

La dernière égalité (45) combinée au fait que $e^{i(2n+1)} \neq 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ montre que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_{2n+1} = 0$$

Il nous reste à traiter la relation (44). Considérons un entier n pair non nul et désignons par k l'exposant de 2 dans la décomposition de n en facteurs premiers. L'entier n sécrit donc

$$n = 2^k m$$

où m est un entier impair. La relation (44) montrer que c_n est le produit d'un certain complexe par c_m qui est nul donc $c_n = 0$ si n est pair et non nul.
Par conséquent, tous les coefficients de Fourier de f sont nuls à l'exception éventuelle de c_0 donc f est constante. Réciproquement toute fonction f constante est solution de (40)

Correction de l'exercice 3.2.2 : Remarquons pour commencer que la suite de fonctions (f_n) est définie par récurrence par $f_{n+1} = f \circ f_n$.

1. **Etude de la fonction f**
   Une étude rapide de fonction montre que

(a) $f([0,1]) = [0, \frac{1}{2}]$,

(b) l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ est stable par f

(c) la fonction f est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$

(d) $f(x) - x = -x\,(2x-1) \geqslant 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$

(e) $\frac{1}{2}$ est le seul point fixe de f sur l'intervalle $]0,1[$

Soit $[a,b]$ un compact de $]0,1[$, son image $f([a,b])$ est un segment $[c,d]$ inclu dans $]0, \frac{1}{2}]$ (cela découle immédiatement du tableau de variation de f).

On peut supposer que $f([a,b])$ est inclu dans un intervalle $[\alpha, \frac{1}{2}]$ avec $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ et cet intervalle $[\alpha, \frac{1}{2}]$ est stable par f (cf. 4 et 2)

2. **Etude de la convergence**

L'étude de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur l'intervalle $[a,b] \subset]0,1[$ est équivalente à l'étude de la suite $(f_n)_{n\geqslant 2}$ que l'on étudie sur l'intervalle $[\alpha, \frac{1}{2}]$ qui, rappelons-le, est stable par f.

Une récurrence montre que $\forall n \geqslant 2,\ f_n([\alpha, \frac{1}{2}]) \subset [\alpha, \frac{1}{2}]$. La fonction f étant croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ (donc sur $[\alpha, \frac{1}{2}]$), la fonction f_n est croissante sur $[\alpha, \frac{1}{2}]$ (comme composée de fonctions croissantes, cf. 3). Ainsi

$$\forall n \geqslant 2, \forall x \in [\alpha, \frac{1}{2}] \quad f_n(\alpha) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \text{ (cf. 5 pour la dernière inégalité)} \qquad (46)$$

La suite $(f_n(\alpha))_{n\geqslant 2}$ est croissante (cf. 4) et majorée par $\frac{1}{2}$. Cette suite converge vers un point fixe l de f ($f_{n+1}(\alpha) = f(f_n(\alpha))$) appartenant à $[\alpha, \frac{1}{2}] \subset]0,1[$ qui ne peut être que $\frac{1}{2}$ (cf. 5).

En appliquant ce résultat à l'inégaliré (46) montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge uniformément vers $\frac{1}{2}$ sur $[\alpha, \frac{1}{2}]$ donc la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers $\frac{1}{2}$ sur $[a,b] \subset]0,1[$

3. **Généralisation de Stone-Weierstraß**

On commence par remarquer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f_n est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Soit a un nombre réel appartenant à $[0,1]$ et $\varepsilon > 0$, il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ et un entier $k \in \mathbb{N}$ tels que $\left|a - \frac{m}{2^k}\right| < \varepsilon$ (il existe k tel que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$ et on choisit $m = E(2^k a)$).

Soit $P = p_k X^k$ un monôme de $\mathbb{R}[X]$, le coefficient p_k est la somme de $[p_k]$ (la partie entière de p_k) et de $a_k = p_k - [p_k]$ (qui un nombre réel appartenant à $[0,1]$). Fixons $\varepsilon > 0$, il existe $m_k \in \mathbb{Z}$ et $l(k) \in \mathbb{N}$ tel que $\left|a_k - \frac{m_k}{2^{l(k)}}\right| < \varepsilon$.

La suite $(f_n(x))_n$ converge uniformément vers $\frac{1}{2}$ sur $[a,b]$ donc pour tout entier k, la suite $((f_n(x)^k))_n$ converge vers $(\frac{1}{2})^k$ sur $[a,b]$. Il existe donc un entier $n(\varepsilon, P)$ tel que

$$\forall x \in [a,b], \quad \left|(f_{n(\varepsilon)}(x))^{l(k)} - (\frac{1}{2})^{l(k)}\right| < \varepsilon$$

Considérons le polynôme $Q(X) = [p_k]X^k + m_k(f_n(X))^{l(k)}X^k$ qui est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et qui vérifie

$$\begin{aligned} \forall x \in [a,b] \subset]0,1[, \quad |P(x) - Q(x)| &= \left|a_k - (f_{n(\varepsilon)}(x))^{l(k)}\right| \\ &\leqslant \left|a_k - \frac{m_k}{2^{l(k)}}\right| + \left|\frac{m_k}{2^{l(k)}} - (f_{n(\varepsilon)}(x))^{l(k)}\right| \\ &\leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

Tout monôme est donc la limite uniforme d'une suite de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$. Par linéarité, le résultat est reste vrai pour tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in [a,b], \quad |f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

Pour ce P et cet $\varepsilon > 0$, il existe $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$\forall x \in [a,b], \quad |P(x) - Q(x)| < \varepsilon$$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists Q_\varepsilon \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$\forall x \in [a,b], \quad |f(x) - Q(x)| < \varepsilon$$

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} : x \mapsto 2x(1-x)$. Soit K un compact de $]0,1[$.
On pose $f_n = f \circ f \circ .. \circ f$ (n fois). Etudier la convergence de la suite (f_n) sur K.
On admet le théorème de Stone-Weierstrass : toute application continue d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme, sur $[a,b]$, d'une suite de fonctions polynômes.
Montrer que toute application continue définie sur $[a,b] \subset]0,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme, sur $[a,b]$, d'une suite de fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 3.2.3 :

1. Munissons $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire

$$(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Considérons le sous-espace H de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$H = \text{Vect}(X, X^2, .., X^n)$$

ainsi que le polynôme P_0 constant $-1 \notin H$
Avec ces notations, on a

$$\int_0^1 (1 + x_1 t + ..x_n t^n)^2 dt = \|P_0 - h\|^2 \quad \text{et} \quad \Delta = \inf_{h \in H} \|P_0 - h\|^2$$

ce qui n'est rien d'autre qu'un problème des moindres carrés.
L'espace E_n est de dimension finie donc il existe un et un seul vecteur $h_0 = a_1 X + .. + a_n X^n \in H$ tel que

$$\|P_0 - h_0\|^2 = \inf_{h \in H} \|P_0 - h\|^2$$

i.e.

$$\Delta = \int_0^1 (1 + a_1 t + ..a_n t^n)^2 dt$$

2. On sait que ce vecteur $h_0 = a_1 X + .. + a_n X^n$ est le projeté orthogonal de P_0 sur H donc $P_0 - h_0$ est orthogonal à la base "canonique" $(X, X^2, .., X^n)$ de H ce que l'on peut écrire

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \int_0^1 (1 + a_1 t + ..a_n t^n) t^k dt = 0$$

En développant cette dernière égalité et en calculant explicitement les intégrales, on obtient

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \frac{1}{k+1} + \frac{a_1}{k+2} + .. + \frac{a_n}{k+n+1} = 0 \Leftrightarrow F(k) = 0$$

3. On sait que
$$(P_0 - h_0, P_0) = \|P_0 - h_0\|^2 = \Delta$$
ce que l'on peut écrire
$$1 + \frac{a_1}{2} + .. + \frac{a_n}{n+1} = \Delta \Leftrightarrow F(0) = \Delta$$

4. La fraction rationnelle
$$F(X) = \frac{1}{X+1} + \frac{a_1}{X+2} + .. + \frac{a_n}{X+n+1} \tag{47}$$
peut s'écrire sous la forme
$$F(x) = \frac{Q(X)}{(X+1)..(X+n+1)}$$
où Q est un certain polynôme. La fraction F étant de degré -1, et le polynôme $(X+1)..(X+n+1)$ étant de degré $n+1$, on en déduit que Q est de degré n.
Nous savons que $F(k) = 0\ \forall k \in [\![1, n]\!]$ donc $Q(k) = 0\ \forall k \in [\![1, n]\!]$. Le polynôme Q possède ainsi n racines distinctes et il est de degré n donc il est de la forme $a(X-1)..(X-n)$. Pour déterminer a, il suffit de remarquer que $F(0) = \Delta$ ce qui implique
$$\Delta = \frac{a(-1)^n n!}{(n+1)!} \Rightarrow a = (-1)^n(n+1)\Delta$$
En résumé, notre fraction F peut s'écrire
$$F(X) = (-1)^n(n+1)\Delta\frac{(X-1)..(X-n)}{(X+1)..(X+n+1)}$$
Décomposons maintenant explicitement la fraction rationnelle
$$G(X) = \frac{(X-1)..(X-n)}{(X+1)..(X+n+1)}.$$
Nous savons que sa décomposition est de la forme
$$G(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{b_i}{X+i+1}$$
avec
$$\begin{aligned} b_i &= \lim_{x\to-(i+1)}(X+i+1)G(x) = \lim_{x\to-(i+1)} \frac{(X-1)..(X-n)}{(X+1)..\widehat{(X+i+1)}..(X+n+1)} \\ &= \frac{(-(i+1)-1)..(-(i+1)-n)}{(-(i+1)+1)..(-(i+1)+i)(-(i+1)+i+2)..(-(i+1)+n+1)} \\ &= \frac{(-1)^n(i+2)..(i+n+1)}{(-1)^i \times i! \times (n-i)!} = (-1)^{n-i}\frac{(i+2)..(i+n+1)}{i!(n-i)!} \end{aligned}$$
La décomposition de F est donc
$$F(X) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{(i+2)..(i+n+1)}{i!(n-i)!}(n+1)\Delta\frac{1}{X+i+1}. \tag{48}$$
La décomposition en éléments simples est donnée par les formules (47) et (48). Or la décomposition en éléments simples est unique ce qui donne
$$\begin{aligned} (i=0) \quad &: \quad 1 = \frac{(n+1)!}{n!}(n+1)\Delta \Leftrightarrow \Delta = \frac{1}{(n+1)^2} \\ (\forall i \in [\![1,n]\!]) \quad &: \quad a_i = (-1)^i\frac{(i+2)..(i+n+1)}{i!(n-i)!}(n+1)\Delta \\ &\Leftrightarrow \quad a_i = (-1)^i\frac{(i+2)..(i+n+1)}{i!(n-i)!} \times \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3.2.4 :

1. M_Q est positive (resp. définie positive) ssi toutes ses valeurs propres sont positives (resp. définie positive). Un calcul direct montre que son polynôme caractéristique est $P(X) = (X-c)^2 - (a^2 + b^2)$ donc les valeurs propres sont
$$\lambda_{\pm} = \frac{c \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}$$
M_Q est positivite (resp. définie positive) ssi $c \geqslant \sqrt{a^2+b^2}$ (resp. $c > \sqrt{a^2+b^2}$)
L'ensemble : $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3;\ Q \text{ positive}\}$ est homéomorphe au sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad c \geqslant \sqrt{a^2+b^2}\}$$
qui est clairement en ensemble fermé (par les suites ou par image réciproque de $\mathbb{R}_+$ par $f(a,b,c) = c - \sqrt{a^2+b^2}$) et non borné (c'est la région "au-dessus" de la nappe supérieure du cône $c^2 - a^2 - b^2 = 0\}$

2. La condition $K \subset \{x \in \mathbb{R}^2;\ Q(x) \leqslant 1\}$ et $B(0,r) \subset K$ implique que $B(0,r) \subset \{x \in \mathbb{R}^2;\ Q(x) \leqslant 1\}$. Ainsi
$$1 \geqslant Q((\sqrt{r},0)) = (c+a)r$$
et
$$1 \geqslant Q((0,\sqrt{r})) = (c-a)r$$
donc
$$c + a \leqslant \frac{1}{r} \text{ et } c - a \leqslant \frac{1}{r}.$$
En additionnant ces deux inégalités et en remarquant que $c \geqslant \sqrt{a^2+b^2} \geqslant 0$, on obtient que
$$0 \leqslant c \leqslant \frac{2}{r}.$$
Puisque Q est positive on a également
$$\max(|a|,|b|) \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \leqslant c \leqslant \frac{2}{r}$$
Ainsi les coefficients de Q forment une partie bornée et fermée de $\mathbb{R}^3$ donc ils forment une partie compact de $\mathbb{R}^3$

3. Un disque elliptique $\mathcal{E}$ centré en 0 est la donnée d'une forme quadratique Q définie positive telle que $\mathcal{E} = E_Q$. L'aire de l'ellipse est donnée par l'intégrale
$$I_Q = \iint\limits_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\\ Q((x,y))\leqslant 1}} dxdy$$
La matrice M_Q est diagonalisable en base orthonormale donc il existe une matrice P orthogonale telle que
$$M_Q = PD^2\ {}^tP$$
où D est la matrice diagonale formée des racines carrés des valeurs propres de D (qui sont positives).
Cette matrice D est inversible sinon la matrice M_Q est non inversible. Dans ce cas la forme quadratique Q est équivalente (à une isométrie près) à la forme quadratique $(x,y) \mapsto \alpha x^2$, l'aire de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha x^2 \leqslant 1$ est infinie donc l'aire de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad Q((x,y)) \leqslant 1\}$ est infinie, ce qui est absurde car notre compact K est inclus dans une certaine boule fermée centrée en O de rayon R' dont l'aire est finie.
On effectue le changement de variable $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D^tP \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ dans l'intégrale I_Q. Le déterminant

jacobien de ce changement de variable est $\det D \det P = \det D$ (puisque P est orthogonale) $= \dfrac{1}{\sqrt{\det M_Q}}$ ce qui nous donne

$$I_Q = \sqrt{\det M_Q} \iint\limits_{\substack{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\\ u^2+v^2\leqslant 1}} dudv = \frac{2\pi}{\sqrt{\det M_Q}}$$

L'application $Q \mapsto I_Q$ est donc continue sur C ($\det M_Q$ est une fonction continue de a, b, c) qui est compact donc elle possède un minimum I_{Q_0} et ce minimum est atteint sur l'ensemble des formes quadratiques définies positives
Pour déterminer cet extremum M_{Q_0} on est tenté d'apliquer la méthode des extrémas à la fonction $(a, b, c) \mapsto \dfrac{2\pi}{\sqrt{c^2-(a^2+b^2)}}$ (cf. les valeurs propres de M_Q). Hélas, c'est impossible car il s'agit d'une fonction qui possède un minimum définie sur un compac de $\mathbb{R}^3$ et non un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
Nous allons montrer que l'application

$$Q \overset{g}{\mapsto} \frac{1}{2\pi} \ln I_Q$$

est strictement convexe sur l'ensemble des formes quadratiques définies positives (qui est bien entendu un convexe)
Soient Q et Q' deux formes quadratiques strictements positives. Nous munissons $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire

$$(X, Y)_Q = (M_Q X, Y)$$

La forme quadratique Q' se réduit dans une certaine base orthonormale $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ pour $(.,.)_Q$ en une forme quadratique de la forme

$$x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} \mapsto \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2$$

et dans cette base la forme quadratique.
Soit P la matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (orthonormale pour le produit scalaire usuel mais pas pour le produit scalaire $(.,.)_Q$) dans cette base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ (orthonormale pour $(.,.)_Q$ mais pas pour le produit scalaire usuel) : cette matrice n'est pas orthogonale et on les égalités

$$M_Q = P^t P \text{ et } M_{Q'} = P \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} {}^t P$$

L'utilisation de ces égalités nous donne

$$\begin{aligned} \det(tM_Q + (1-t)M_{Q'}) &= \det(tP^t P + (1-t)P \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} {}^t P) \\ &= \det(P)^2 \det(tI_2 + (1-t) \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}) \\ &= \det(P)^2 (t + (1-t)\mu_1)(t + (1-t)\mu_2) \end{aligned}$$

donc

$$g(tQ + (1-t)Q') = -\ln|\det P| - \frac{1}{2}[\ln(t + (1-t)\mu_1) + \ln(t + (1-t)\mu_2)]$$

La stricte concavité du logarithme montre que $\forall t \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}[\ln(t + (1-t)\mu_1) + \ln(t + (1-t)\mu_2)] &< -\frac{1}{2}[t\ln(1) + (1-t)\ln\mu_1) + t\ln(1) + (1-t)\ln\mu_2] \\ &< -\frac{1}{2}[(1-t)\ln\mu_1 + (1-t)\ln\mu_2] = (1-t)[-\frac{1}{2}\ln\mu_1\mu_2] \end{aligned}$$

donc $\forall t \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} g(tQ+(1-t)Q') &< -\ln|\det P| + (1-t)[-\frac{1}{2}\ln\mu_1\mu_2 \\ &= t[-\ln|\det P|] + (1-t)[-\ln|\det P| - \frac{1}{2}\ln\mu_1\mu_2] = tg(Q) + (1-t)g(Q') \end{aligned}$$

La fonction g est strictement convexe sur l'ensemble convexe C donc elle possède un unique minimum.
Le disque elliptique cherchée est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } Q_0(x,y) \leqslant 1\}$

Correction de l'exercice 3.2.5 :

1. Inégalité indispensable pour la suite

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $H_\alpha = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\times} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^\times} / \sum_{n\geqslant 1} n^{2\alpha}a_n^2 < +\infty\}$. On a bien envie de définir le produit scalaire en posant

$$< (u_n)_n, (v_n)_n >_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{2\alpha}u_nv_n.$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'un produit scalaire. Si $u=(u_n)_n$ et $v=(v_n)_n$ appartiennent à H_α, la majoration

$$\left|n^{2\alpha}u_nv_n\right| = |n^\alpha u_n|\,|n^\alpha v_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(n^{2\alpha}u_n^2 + n^{2\alpha}v_n\right)$$

montre que la série de terme général $n^{2\alpha}u_nv_n$ est absolument convergente donc convergente et le produit scalaire $<,>_\alpha$ est bien défini.
La bilinéarité est évidente ainsi que la positiivité.
Si $< (u_n)_n, (u_n)_n >_\alpha = 0$ alors $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2\alpha}u_n^2 = 0$ donc

$$\forall p \in \mathbb{N}^\times, \quad 0 \leqslant p^{2\alpha}u_p^2 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} n^{2\alpha}u_n^2 = 0$$

donc $\forall p \in \mathbb{N}^\times, \quad p^{2\alpha}u_p^2 = 0$ et la non nullité de $p^{2\alpha}$ implique que $\forall p \in \mathbb{N}^\times, \quad u_p = 0$.
La norme associé à $<,>_\alpha$ est $\|x\|_\alpha = \sqrt{< x, x >_\alpha} = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2\alpha}x_n^2}$.
Soit $(a^{(N)})_N$ une suite de Cauchy de H_α, c'est-à-dire,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0(\varepsilon)\ \forall N \geqslant N_0(\varepsilon),\ \forall M \geqslant N_0(\varepsilon), \quad \left\|a^{(N)} - a^{(M)}\right\|_\alpha \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n^a(a_n^{(N)} - a_n^{(M)})^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

En particulier, si p est un entier quelconque,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0(\varepsilon)\ \forall N \geqslant N_0(\varepsilon),\ \forall M \geqslant N_0(\varepsilon), \quad p^a(a_p^{(N)} - a_p^{(M)})^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

ce qui signifie que la suite $(a_p^{(N)})_N$ est de Cauchy. Or il s'agit d'une suite de réels donc elle converge vers une limite $l_p \in \mathbb{R}$ donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\lim_N a_p^{(N)} = l_p$. Fixons provisoirement $\varepsilon > 0$. Nous disposons d'un entier $N_0(\varepsilon)$ tel que pour tout entier $N \geqslant N_0(\varepsilon)$ et tout entier S, de l'inégalité

$$\forall M \geqslant N_0(\varepsilon), \quad \sum_{n=1}^{S} n^a(a_n^{(N)} - a_n^{(M)})^2 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} n^a(a_n^{(N)} - a_n^{(M)})^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Pour S fixé, les suites $(a_1^{(M)})_M, ..(a_S^{(M)})_M$ convergent respectivement vers $l_1, .., l_S$. La somme étant finie, on peut faire tendre M vers $+\infty$ donc

$$\sum_{n=1}^{S} n^a (a_n^{(N)} - l_n)^2 \leqslant \varepsilon^2, \tag{49}$$

cette égalité étant valable quel que soit S donc la suite $(\sum_{n=1}^{S} n^a (a_n^{(N)} - l_n)^2)_S$ est croissante et majorée par ε^2. La série $\sum_{n\geqslant 1} n^a (a_n^{(N)} - l_n)^2$ est donc convergente donc, quel que $\varepsilon > 0$, quel que soit $N \geqslant N_0(\varepsilon)$, $a^{(N)} - l \in H_\alpha$, où l'on a posé $l = (l_n)_n$. Puisque $a^{(N)} \in H_\alpha$ et que H_α est un espace vectoriel, on en déduit que

$$l = a^{(N))} - (a^{(N)} - l) \in H_\alpha.$$

En faisant tendre S vers $+\infty$ dans la majoration (49), on en déduit la majoration

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^a (a_n^{(N)} - l_n)^2 \leqslant \varepsilon^2 \Leftrightarrow \left\| a^{(N)} - l \right\|_\alpha \leqslant \varepsilon^2,$$

qui est valable pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $N \geqslant N_0(\varepsilon)$, i.e. la suite $(a^{(N)})_N$ converge vers l. La suite $l \in H_\alpha$ et $\lim_N a^{(N)} = l$ donc H_α est complet.

2. Si $b \in H_{-1}$ et $a \in H_1$, la majoration

$$|a_n b_n| = |n a_n| \left| \frac{b_n}{n} \right| \leqslant \frac{1}{2}(n^2 a_n^2 + \frac{b_n}{n^2})$$

montre que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$ est absolument convergente donc convergente et $\Lambda_b(a)$ est bien définie. L'application Λ_b est clairement linéaire de H_1 dans $\mathbb{R}$ donc c'est une forme linéaire sur H_1. En outre, l'inégalité de Cauchy-Schwartz montre que

$$\forall N \geqslant 1, \quad \left| \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \right| = \left| \sum_{n=1}^{N} (n a_n)(\frac{b_n}{n}) \right| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} n^2 a_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{b_n^2}{n^2} \right)^{1/2}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \right| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n^2}{n^2} \right)^{1/2} = \|a\|_1 \|b\|_{-1}$$

donc

$$\forall a \in H_1, \quad \forall b \in H_{-1}, \quad |\Lambda_b(a)| \leqslant \|a\|_1 \|b\|_{-1}.$$

Cette majoration montre que Λ_b est continue et que sa norme subordonnée $|||\Lambda_b|||$est moindre que $\|b\|_{-1}$.
Si $b = 0$ alors $\Lambda_b = 0$ et $|||\Lambda_b||| = 0 = \|b\|_{-1}$
Si $b \neq 0$ alors $\|b\|_{-1} > 0$. La suite $a = (\frac{b_n}{n^2}) \in H_1$ et nous avons

$$\Lambda_b(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^2} = \|b\|_{-1}^2 \text{ ainsi que } \|a\|_1 = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (\frac{b_n}{n^2})^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n^2}{n^2}} = \|b\|_{-1}$$

donc, par définition de la norme subordonnée

$$\|b\|_{-1}^2 = |\Lambda_b(a)| \leqslant |||\Lambda_b||| \, \|b\|_{-1} \Rightarrow \|b\|_{-1} \leqslant |||\Lambda_b|||.$$

Nous venons donc de démontrer que $\forall b \in H_{-1}, \quad |||\Lambda_b||| = \|b\|_{-1}$.
Etudions la réciproque, c'est-à-dire, si Λ est une forme linéaire continue sur H_1, existe-t-il $b \in H_{-1}$ tel que $\Lambda = \Lambda_b$? Soit Λ une forme linéaire continue, alors, si l'on pose $C = |||\Lambda|||$, nous avons : $\forall a \in |\Lambda(a)| \leqslant C \|a\|_1$. Soit $N \in \mathbb{N}^\times$. La suite $e^{(N)}$ dont tous les termes sont nuls sauf le $N^{ième}$ qui est égal à 1 appartient clairement à H_1 et $\left\|e^{(N)}\right\|_1 = N^2$. Soit $a \in H_1$, alors

$$\forall N \geqslant 0, \quad \left\|a - \sum_{k=1}^{N} a_k e^{(k)}\right\|_1 = \|(0,..,0,a_{N+1},...)\|_1 = \sqrt{\sum_{n=N+1}^{+\infty} n^2 a_n^2} \underset{k\to+\infty}{\to} 0,$$

ce qui démontre que la suite $(\sum_{k=1}^{N} a_k e^{(k)})_{N\geqslant 0}$ de H_1 converge vers a pour la norme $\|.\|_1$, c'est-à-dire que

$$\forall a \in H_1, \quad a = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{(k)}.$$

La continuité de Λ montre que

$$\Lambda(\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k e^{(k)}) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k \Lambda(e^{(k)}) \Leftrightarrow \Lambda(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{(k)}) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \Lambda(e^{(k)}).$$

Définissons la suite $b = (b_n)$ par $b_n = \Lambda(e^{(n)}) \in \mathbb{R}$. Par construction,

$$\forall a \in H_1, \quad \Lambda(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n.$$

Il nous reste à montrer que $b \in H_{-1}$. Pour tout entier N, on a

$$\forall a \in \mathbb{R}^N, \quad \left|\sum_{k=1}^{N} a_k b_k\right| = \left|\Lambda(\sum_{k=1}^{N} a_k e^{(k)})\right| \leqslant C \left\|\sum_{k=1}^{N} a_k e^{(k)}\right\|_1 = C \|(a_1,..,a_N,0,..)\|_1 = C\sqrt{\sum_{k=1}^{N} k^2 a_k^2}$$

et en choisissant $\forall k \in [\![1,N]\!], \quad a_k = \dfrac{b_k}{k^2}$, on obtient

$$\forall N \in \mathbb{N}^\times, \quad \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k^2}{k^2} = \left|\sum_{k=1}^{N} \frac{b_k^2}{k^2}\right| \leqslant C\sqrt{\sum_{k=1}^{N} k^2 \left(\frac{b_k}{k^2}\right)^2} = C\sqrt{\sum_{k=1}^{N} \frac{b_k^2}{k^2}} \Rightarrow$$

$$\forall N \in \mathbb{N}^\times, \quad \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{b_k^2}{k^2}\right) \Big/ \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \frac{b_k^2}{k^2}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \frac{b_k^2}{k^2}} \leqslant C \Rightarrow \forall N \in \mathbb{N}^\times, \quad \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k^2}{k^2} \leqslant C^2$$

La suite $\left(\sum_{k=1}^{N} \dfrac{b_k^2}{k^2}\right)_{N\geqslant 1}$ est croissante et majorée par C^2 donc elle est convergente. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{b_n^2}{n^2}$ est convergente donc $b \in H_{-1}$ et $\Lambda = \Lambda_b$.

3. L'inégalité $\forall n \geqslant 0, \quad a_n^2 \leqslant n^2 a_n^2$ montre que si $a = (a_n)$ appartient) H_1 alors $a \in H_0$, i.e. $H_1 \subset H_0$. Nous devons montrer que la boule unité $\overline{B}$ de H_1, qui est l'ensemble des éléments $a = (a_n)$ de H_1 tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n \leqslant 1$, est un compact pour la norme $\|.\|_0$. Soit $(a^{(N)})$ une suite de $\overline{B}$, c'est-à-dire que que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(a_n^{(N)}\right)^2 \leqslant 1. \tag{50}$$

En particulier,

$$\forall N\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N}^\times,\quad n^2\left(a_n^{(N)}\right)^2\leqslant 1\Leftrightarrow \forall N\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N}^\times,\quad \left|a_n^{(N)}\right|\leqslant\frac{1}{n}\leqslant 1.$$

Pour n fixe, la suite $(a_n^{(N)})_{N\geqslant 1}$ est une suite de $[-1,1]$ donc on peut en extraire une suite convergente $(a_n^{\varphi_N(N))})_{N\geqslant 1}$. Des k suites $(a_1^{(N)})_N$, $(a_2^{(N)})_n$, ..., $(a_k^{(N)})_N$ on peut, par extraction successive, obtenir une application φ strictement croissante telle que les k suites $(a_1^{\varphi(N)})_N$, $(a_2^{\varphi(N)})_N$, ..., $(a_k^{\varphi(N)})_N$ soient simultanément convergentes. Malheureusement, nous devons effectuer un nombre fini d'extraction (la majoration de la distance de $(a_1^{\varphi(N)},a_2^{\varphi(N)},...,a_k^{\varphi(N)})_N$ à une valeur d'adhérence $(l_1,..,_k)$ en norme euclidienne possède comme facteur k qui va tendre vers $+\infty$) mais une infinité et rien ne nous garantit que cela soit possible. Nous allons utiliser une idée géniale inventée par Georg Cantor : le principe d'extraction diagonale. Cette méthode va nous permettre de trouver une extraction commune à toutes les suites et de majorer la distance du "vecteur à une infinité de coordonnées" à son vecteur adhérent par une majoration uniforme par rapport à "k").

On peut extraire de la suite bornée $(a_1^{(N)})_N$, une sous-suite $(a_1^{\varphi_1(N)})_N$ convergente vers une limite l_1. Quitte à réeffectuer une extraction supplémentaire, on peut supposer que

$$\forall N\geqslant 0,\quad \left|a_1^{\varphi_1(N)}-l_1\right|\leqslant\frac{1}{2^N}.$$

cela découle de la définition de la convergence avec les ε. Pour $\varepsilon=1$, il existe N_0 tel que $\left|a_1^{\varphi_1(N_0)}-l_1\right|\leqslant 1$. La suite $(a_1^{\varphi_1(N)})_{N>N_0}$ converge aussi vers l_1. En choisissant $\varepsilon=\frac{1}{2}$, il existe $N_1>N_0$ tel que $\left|a_1^{\varphi_1(N_1)}-l_1\right|\leqslant\frac{1}{2}$. Supposons avoir construit des entiers $N_0<N_1<\cdots<N_{k-1}$ tels que $\forall j\in[\![1,k]\!]$, $\left|a_1^{\varphi_1(N_j)}-l_1\right|\leqslant\frac{1}{2^j}$. La suite $(a_1^{\varphi_1(N)})_{N>N_{k-1}}$ converge vers l_1 donc, en choisissant $\varepsilon=\frac{1}{2^k}$, il existe $N_k>N_{k-1}$ tel que $\left|a_1^{\varphi_1(N_k)}-l_1\right|\leqslant\frac{1}{2^k}$. La suite $(a_1^{\varphi_1(N_k)})_{k\geqslant 0}$ est extraite de la suite $(a_1^{\varphi_1(N)})_N$ et elle vérifie $\forall k\geqslant 0$, $\left|a_1^{\varphi_1(N_k)}-l_1\right|\leqslant\frac{1}{2^k}$. On pose alors $\forall k\in N$, $\varphi_1(k):=\varphi_1(N_k)$.

De la suite bornée $(a_2^{\varphi_1(N)})_N$, on peut extraire une sous-suite $(a_2^{\varphi_1\circ\varphi_2(N)})_N$ convergente vers une limite l_2 et quitte à effectuer une extraction, on peut supposer que

$$\forall N\geqslant 0,\quad \left|a_2^{\varphi_1\circ\varphi_2(N)}-l_2\right|\leqslant\frac{1}{2\times 2^N}.$$

(reprendre la méthode précédente avec $\varepsilon=\frac{1}{2\times 2^k}$)

Supposons avoir construit, pour tout $j\in[\![1,M]\!]$, une sous-suite $(a_j^{\varphi_1\circ\cdots\varphi_j(N)})_N$ convergente vers l_j et

$$\forall N\geqslant 0,\quad \left|a_j^{\varphi_1\circ\cdots\varphi_j(N)}-l_j\right|\leqslant\frac{1}{j\times 2^N}.$$

La suite $(a_{M+1}^{\varphi_1\circ\cdots\varphi_M(N)})_N$ est bornée donc on peut en extraire une sous-suite $(a_{M+1}^{\varphi_1\circ\cdots\varphi_M\circ\varphi_{M+1}(N)})_N$ convergente vers une limite l_{M+1}. Quitte à effectué une réextraction, on peut supposer que

$$\forall N\geqslant 0,\quad \left|a_{M+1}^{\varphi_1\circ\cdots\varphi_{M+1}(N)}-l_j\right|\leqslant\frac{1}{(M+1)\times 2^N}.$$

(reprendre la méthode précédente avec $\varepsilon=\frac{1}{(M+1)\times 2^k}$).

Ainsi, pour chaque entier $N\geqslant 0$, nous disposons d'une application φ_N strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall j\in\mathbb{N}^\times,\quad \forall N\in\mathbb{N},\quad \left|a_j^{\varphi_1\circ\cdots\varphi_j(N)}-l_j\right|\leqslant\frac{1}{j\times 2^N}. \tag{51}$$

Le point fondamental est que l'application $N \mapsto \psi(N) = \varphi_1 \circ \cdots \varphi_N(N)$ est strictement croissante. En effet, puisque pour toute application φ strictement croissante $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) > n$, nous en déduisons que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \psi(N+1) = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_N \circ \varphi_{N+1}(N+1) > \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_N(N+1) > \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_N(N) = \psi(N).$$

Soit p un entier naturel, la suite $(a_p^{\psi(N)})_{N>p}$ est extraite de la suite $(a_p^{(\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_p(N))})_N$ car

$$\forall N > p, \quad \psi(N) = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_N(N) = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_p(\varphi_{p+1} \circ \cdots \circ \varphi_N(N)) \geqslant \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_p(N).$$

Puisque la suite $(a_p^{(\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_p(N))})_N$ converge vers l_p, on en déduit que la suite $(a_p^{\psi(N)})_{N \geqslant p}$ converge vers l_p. Soit M un entier, la majoration (50) montre que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{M} n^2 \left(a_n^{(N)}\right)^2 \leqslant 1 \Rightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{M} n^2 \left(a_n^{\psi(N)}\right)^2 \leqslant 1.$$

Pour chaque entier $n \in [\![1, M]\!]$, la suite $(a_n^{\psi(N)})_N$ converge vers l_n. La majoration précédente ne faisant intervenir qu'un nombre fini de suite $(a_n^{\psi(N)})_N$, nous pouvons faire tendre N vers $+\infty$ donc $\sum\limits_{n=1}^{M} n^2 l_n^2 \leqslant 1$. Cette majoration est valable quel que soit l'entier M donc la suite $\left(\sum\limits_{n=1}^{M} n^2 l_n^2\right)_M$ est croissante et majorer donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n^2 l_n^2$ est convergente, c'est-à-dire que la suite $l = (l_n)_n$ appartient à H_1 et $\|l\|_1^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 l_n^2 \leqslant 1$ donc $l \in \overline{B}$. Il nous reste à vérifier que l est bien une valeur d'adhérence de la suite $(a^{(N)})_N$ pour la topologie de H_0 et c'est maintenant que nous allons utiliser la majoration (51) (dont c'était le seul but). Puisque a suite $(a_j^{\psi(N)})_{N \geqslant j}$ étant extraite de la suite $(a_j^{\varphi_1 \circ \cdots \varphi_j(N)})_N$, on en déduit que

$$\forall j \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \left|a_j^{\psi(N)} - l_j\right| \leqslant \frac{1}{j \times 2^N}$$

donc

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left\|a^{\psi(N)} - l\right\|_0^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^{\psi(N)} - l_n)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2 \times 2^{2N}} = \frac{1}{2^{2N}} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \underset{N \to +\infty}{\to} 0$$

ce qui démontre que la suite $(a^{\psi(N)})_N$ converge vers $l \in \overline{B}$ donc l est bien une suite extraite de la suite $(a^{(N)})$ et $\overline{B}$ est bien compact.
Par cette méthode, on démontre que la boule unité de H_α est compact dans H_β si $\alpha > \beta$ (le lecteur peut s'y atteler s'il le souhaite). *C'est un cas particulier du théorème d'injection compact de H_α dans H_β qui permet de justifier l'existence de solutions à des équations aux dérivées partielles et de construire des approximations numériques de ces solutions.*

Correction de l'exercice 3.2.6 :

1. La formule trigonométrique $\dfrac{\cos 2\theta + 1}{2} = \cos^2 \theta$ donc

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \cos \frac{\pi}{4}, \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{8}} = \cos \frac{\pi}{8} \ (\text{car } \cos \frac{\pi}{8} > 0)$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \frac{\pi}{8}} = \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{16}} \ (\text{car } \cos \frac{\pi}{16} > 0)$$

On constate que si u_n désigne le $n^{ième}$ facteur, on a $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}u_n}$. Si $u_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$ alors

$$u_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}=\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2^{n+3}}}=\cos\frac{\pi}{2^{n+3}}\ (\text{car }\cos\frac{\pi}{2^{n+3}}>0)$$

donc l'hérédité est prouvée. L'initialisation découle de l'égalite $u_0=\cos\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{2^{0+2}}$, on en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

donc $\forall n\in\mathbb{N},\quad \prod_{k=0}^{n}u_k=\prod_{k=0}^{n}\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$. L'itération de la formule de duplication du sinus double montre que

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2\sin x\cos x=2(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})\cos x=2^2\sin\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}\\ &= 2^2(2\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2})\cos x\cos\frac{x}{2}=2^3\sin\frac{x}{2^2}\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\\ &= \cdots=2^n\sin\frac{x}{2^{n-1}}\prod_{k=0}^{n-1}\cos\frac{x}{2^k}\end{aligned}$$

donc, en fixant $x=\frac{\pi}{2^2}$ et en remplaçant n par $n-1$, on obtient que

$$\prod_{k=0}^{n}\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2^{n+2}}=0$ et que $\sin x\underset{x\to0}{\sim}x$, on en déduit que

$$\prod_{k=0}^{n}u_k\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2^{n+1}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}=\frac{2}{\pi},$$

ce qui démontre que

$$\prod_{k=0}^{+\infty}u_k=\frac{2}{\pi}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\times\ldots=\frac{2}{\pi}.$$

2. Puisque la fonction tan est décroissante et impair, on en déduit, en distinguant les cas où θ est positif ou négatif, que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad\left|\tan\frac{\theta}{2^n}\right|\leqslant|\tan\theta|\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N},\quad\left|\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}|\tan\theta|$$

Ainsi, si $a\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on a la majoration

$$\forall\theta\in[-a,a],\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad\left|\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}|\tan\theta|\leqslant\frac{1}{2^n}|\tan a|$$

et, comme la série $\sum\limits_{n\geqslant0}\frac{1}{2^n}|\tan a|$ est convergente, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant0}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}$ est normalement convergente sur $[-a,a]$. Chaque terme $\theta\mapsto\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}$ étant continue, la fonction

$$\theta\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}$$

est continue sur $[-a,a]$ quel que soit $a\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donc elle est continue sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
Les conditions du théorème de permutation série-intégrale des séries normalement convergentes de fonctions continues sont assurées sur le segment $[-a,a]\subset]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, nous avons

$$\forall a\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\quad \int_0^a\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}\right)d\theta=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^a\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}d\theta=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^a\frac{1}{2^n}\frac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\cos\frac{\theta}{2^n}}d\theta=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[-\ln(\cos\frac{\theta}{2^n})\right]_{\theta=0}^{\theta=a}=$$

En particulier, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\ln(\cos\frac{a}{2^n})$ est convergente. Nous avons vu dans la question 1. que

$$\prod_{k=0}^{n}\cos\frac{a}{2^k}=\frac{\sin 2a}{2^{n+1}\sin\frac{a}{2^n}}\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{\sin 2a}{2a}.$$

Si $a\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\backslash\{0\}$, le quotient $\frac{\sin 2a}{2a}$ est positif. En passant au logarithme, nous avons

$$\forall a\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\backslash\{0\},\quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\ln(\cos\frac{a}{2^k})=\ln(\frac{\sin a}{2a})\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\ln(\cos\frac{a}{2^n})=\ln(\frac{\sin a}{2a})$$

donc

$$\forall a\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\backslash\{0\},\quad \int_0^a\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}\right)d\theta=\ln(\frac{\sin a}{2a}).\tag{52}$$

La fonction $\theta\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}$ étant continue sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, la fonction $a\mapsto\int_0^a\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}\right)d\theta$ est également l'unique primitive de $\theta\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}$ s'annulant en 0. En particulier, elle est C^1 sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et sa dérivée est $a\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}$. L'égalité (52) montre que

$$\forall a\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\backslash\{0\},\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}=\left(\ln(\frac{\sin a}{2a})\right)'=\operatorname{cotan}a-\frac{1}{a}.\tag{53}$$

Si $a=0$, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}=0$ et $\lim\limits_{a\to0}(\operatorname{cotan}a-\frac{1}{a})=0$. Si on prolonge par continuité cette dernière fonction en 0, l'égalité (53) reste valide.

Correction de l'exercice 3.2.7 :

1. Notons $\|.\|$ la norme euclidienne sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $|||.|||$ la norme subordonnée. Par définition des normes subordonnées, $\forall A,B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\quad |||AB|||\leqslant|||A|||\,|||B|||$.
Le groupe G étant inclu dans la boule $B'(I_n,\alpha)$, c'est un groupe borné donc il existe une constante C telle que
$$\forall g\in G,\quad |||g|||\leqslant C.\tag{54}$$
Soient g un élément de G et λ une valeur propre complexe de G. Il existe donc un vecteur x non nul tel que $g.x=\lambda x$, ce qui implique
$$|\lambda|\,\|x\|=\|\lambda x\|=\|g.x\|\leqslant|||g|||\,\|x\|\leqslant C\,\|x\|\underset{\|x\|\neq0}{\Rightarrow}|\lambda|\leqslant C$$
donc toutes les valeurs propres de tous les éléments de G sont de module moindre que C. Or, si λ est une valeur propre de g (nécéssairement non nul car $g\in GL_n(\mathbb{C})$), alors pour tout entier naturel k, λ^k est une valeur propre de g^k donc
$$\forall k\in\mathbb{N},\quad |\lambda|^k\leqslant C\Rightarrow|\lambda|\leqslant C^{1/nk}\Rightarrow|\lambda|\leqslant\lim_{k\to+\infty}C^{1/k}=1.\tag{55}$$

En outre, puisque λ est une valeur propre de g, λ^{-1} est une valeur propre de g^{-1} donc

$$\left|\lambda^{-1}\right| \leqslant 1 \Rightarrow |\lambda| \geqslant 1. \tag{56}$$

Les inégalités (55) et (56) montre que

$$\forall g \in G, \quad \forall \lambda \in \operatorname{Sp} g, \quad |\lambda| = 1. \tag{57}$$

D'autre part, le groupe G est inclu dans la boule $B'(I_n, \alpha)$ donc

$$\forall g \in G, \quad |||g - I_n||| \leqslant \alpha.$$

Par conséquent, si $\lambda \in \operatorname{Sp} g$ et $x \in E_\lambda(g)$, on a

$$|\lambda - 1| \, \|x\| = \|\lambda x - x\| = \|g.x - x\| = \|(g - I_n).x\| \leqslant |||g - I_n||| \, \|x\| \leqslant \alpha \, \|x\| \underset{\|x\| \neq 0}{\Rightarrow} |\lambda - 1| \leqslant \alpha. \tag{58}$$

L'égalité (57) et l'inégalité (58) montre que toutes les valeurs propres de tous les éléments de G sont situés dans l'intersection du disque unité $|z| = 1$ et dans la boule $B(1, \alpha)$ de $\mathbb{C}$. Soit λ une valeur propre d'un élément de G. Cette valeur propre peut s'écrire $\lambda = e^{i\varphi}$ (elle est sur le disque unité). Pour tout entier naturel k, λ^k est aussi une valeur propre d'un élément de G et elle s'écrit $\lambda^n = e^{in\varphi}$. Cet angle φ doit donc vérifier

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha \geqslant \left|\lambda^k - 1\right| = \left|e^{ik\varphi} - 1\right| = \sqrt{2(1 - \cos k\varphi)} = 2\left|\sin \frac{k\varphi}{2}\right| \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \quad \left|\sin \frac{k\varphi}{2}\right| \leqslant \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}. \tag{59}$$

La suite $(\sin k\frac{\varphi}{2})_k$ appartient donc à l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ qui est inclu strictement dans $[-1, 1]$. Si φ n'est pas un multiple rationnel de π, c'est-à-dire, $\varphi \notin \mathbb{Q}\pi$, un résultat classique découlant de l'étude des sous-groupes de $\mathbb{R}$ (un sous-groupe de $\mathbb{R}$ est soit discret, soit dense) montre que la suite $(\sin k\frac{\varphi}{2})_k$ est dense dans $[-1, 1]$, ce qui est visiblement absurde. Ainsi, φ s'écrit $\varphi = \frac{p}{q}2\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\times$ et $(p, q) = 1$. Dans ce cas, $\lambda = e^{i\varphi}$ est une racine primitive $q^{ième}$ de l'unité. Si $q > 1$, les complexes $(\lambda^l)_{0 \leqslant l \leqslant q-1}$ engendre le groupe $\mathbb{U}_q$ et leurs angles sont uniformément répartis sur le cercle unité et un dessin montre que l'un de ses angles est hors de la zone $\sin^{-1}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Plus précisément, si q est pair, alors -1 est une racine $q^{ième}$ de l'unité donc il existe un entier $l \in [\![1, q-1]\!]$ tel que $-1 = \lambda^l$ donc $\left|\lambda^l - 1\right| = 2 > \alpha$ ce qui est impossible. Si q est impair, $q = 2q_0 + 1$ avec $q_0 \geqslant 1$ ($q > 1$). La classe de l'entier p est inversible dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +, \times)$ donc il existe un entier k_0 tel que $k_0 p = q_0 \bmod q$, c'est-à-dire qu'il existe un entier s tel que $k_0 p = q_0 + sq$ (on veut se rapprocher de l'angle π, c'est-à-dire du point complexe -1) Par conséquent, $\frac{k_0 p}{q}2\pi = \frac{q_0}{2q_0+1}2\pi + 2s\pi$ donc $\sin k_0\varphi = \sin(\frac{q_0}{2q_0+1}2\pi)$ et, comme $\alpha < 1$, nous obtenons les encadrements suivants :

$$\begin{aligned} \frac{q_0}{2q_0+1} - \frac{1}{2} &= \frac{-1}{2(2q_0+1)} \Rightarrow -\frac{1}{6} \leqslant \frac{q_0}{2q_0+1} - \frac{1}{2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{q_0}{2q_0+1}\pi \leqslant \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \leqslant \sin\frac{k_0\varphi}{2} \leqslant 1 \Rightarrow \left|\sin\frac{k_0\varphi}{2}\right| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \tag{60}$$

ce qui est absurde donc q ne peut-être impair.

Ainsi, q est l'entier 1 et $\varphi = p2\pi$ donc $\lambda = 1$. Nous venons de montrer que tous les éléments de g admet uniquement 1 comme valeur propre complexe. Chacun d'entre eux admettant au moins une valeur propre complexe, on en déduit que

$$\forall g \in G, \quad \operatorname{Sp}(g) = \{1\}.$$

2. Si g est un élément de G, puisque 1 est son unique valeur propre, son polynôme caractéristique est $(X-1)^n$ donc $g-I_n$ est nilpotent. Notons N la matrice nilpotente telle que $g=I_n+N$. Les matrices I_n et N commutant, la formule du binôme montre que

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad g^k=\sum_{s=0}^{n-1}\binom{k}{s}N^s$$

Notons $N_{i,j}^{(s)}$ le coefficient (i,j) de N^s et $g_{i,j}^{(k)}$ le coefficient (i,j) de g^k. Alors on a

$$\forall i,j\in[\![1,n]\!],\quad g_{i,j}^{(k)}=\sum_{s=0}^{n-1}\binom{k}{s}N_{i,j}^{(s)}.$$

Supposons que N ne soit pas nulle. Soit p le plus grand entier appartenant à $[\![1,n-1]\!]$ telle que N^p ne soit pas nulle ($p+1$ est l'indice de nilpotence de N donc $p\leqslant n-1$). La matrice N^p n'est pas nulle et $N^s=0$ si $s>p$. Il existe un coefficient $N_{\alpha,\beta}^{(p)}$ qui n'est pas nul. Pour cet indice, on a $g_{\alpha,\beta}^{(k)}=\sum\limits_{s=0}^{p}\binom{k}{s}N_{\alpha,\beta}^{(s)}$. En remarquant que $\forall s\in[\![1,p]\!],\quad \binom{k}{s}\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{k^s}{s!}$, on en déduit que le terme dominant, lorsque k tend vers $+\infty$, dans la somme $\sum\limits_{s=0}^{p}\binom{k}{s}N_{\alpha,\beta}^{(s)}$ est le terme correspondant à l'indice $s=p$ (car son coefficient $N_{\alpha,\beta}^{(p)}$ est non nul par hypothèse) donc $g_{\alpha,\beta}^{(k)}\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{k^p}{p!}N_{\alpha,\beta}^{(p)}\underset{k\to+\infty}{\to}\pm\infty$ selon le signe de $N_{\alpha,\beta}^{(p)}$. Puisque la norme subordonnée $|||.|||$ est définie par $|||g|||=\sqrt{\sum\limits_{i,j}g_{i,j}^2}$, on en déduit que $|||g^k|||\geqslant\left|g_{\alpha,\beta}^{(k)}\right|\underset{k\to+\infty}{\to}+\infty$, ce qui contredit la majoration (54). Ainsi, $N=0$ et $g=1$ donc $G=\{I_n\}$.
Remarque : on vient de montrer qu'un groupe situé "trop" près de l'identité est réduit au groupe trivial. On dit que $GL_n(\mathbb{C})$ n'admet pas de petits sous-groupes.

3. Le point important dans la preuve est de montrer que $\mathrm{Sp}(g)=\{1\}$ pour tous les éléments g. Cet fait est basé sur la majoration (59). On peut donc supposer seulement que $\dfrac{\alpha}{2}<1$, i.e. $\alpha<2$. On remarque néanmoins que dans la suite, on est amené à considérer, si l'on considère une valeur propre $\lambda=e^{i\varphi}$, le cas où $\varphi=\dfrac{p}{q}2\pi$ avec q est impair. Dans ce cas, pour aboutir à l'égalité $\lambda=1$, on utilise la minoration $\left|\sin\dfrac{k_0\varphi}{2}\right|\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{\alpha}{2}$ ce qui est valable si $\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{\alpha}{2}\Leftrightarrow\alpha<\sqrt{3}$. Si l'on suppose désormais que $\alpha<\sqrt{3}$, on constate que toute la preuve reste valable. Donc tout sous-groupe G inclu dans $B'(I_n,\alpha)$ avec $\alpha<\sqrt{3}$ est réduit à $\{1\}$. C'est la meilleure constante possible. En effet, le cas limite résulte du cas $q=3$, c'est-à-dire de l'existence d'un élément g d'ordre 3 qui engendre alors un sous-groupe d'ordre 3 inclu dans $B'(I_n,\alpha)$. Un élément d'ordre 3 est donné par exemple lorsque $n=1$, $GL_n(\mathbb{C})=\mathbb{C}^\times$, par $g=j=\exp(\dfrac{2\pi i}{3})$. Dans ce cas $G=<g>=\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_3$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$. Calculons la distance (qui est simplement le module) de tous ces éléments à $I_1=1$.

$$|1-1|=0,\quad |j-1|=2\left|\sin\frac{\pi}{3}\right|=\sqrt{3},\quad \left|j^2-1\right|=2\left|\sin\frac{2\pi}{3}\right|=\sqrt{3}$$

Le groupe $\mathbb{U}_3$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^\times=GL_1(\mathbb{C})$ contenu dans la boule de centre $I_1=1$ et de rayon $\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 3.2.8 :

1. La suite est clairement positive (par récurrence double) et croissante car $u_{n+2}-u_{n+1}=r^nu_n\geqslant 0$. Montrons que la suite est majorée. Puisque $u_n\leqslant u_{n+1}$, nous avons la majoration

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}\leqslant u_{n+1}(1+r^n)$$

et une récurrence montre que

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n \leqslant u_1 \prod_{k=0}^{n-2}(1+r^k)$$

(où faire un principe des dominos multiplicatifs avec $\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}}$). En utilisant la majoration classique $\forall x \in [0,1], \quad \ln(1+x) \leqslant x$ ainsi que la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} r^n$, on obtient la majoration

$$\begin{aligned} \forall n \quad &\geqslant \quad 2, \quad \ln u_n \leqslant \ln u_1 + \sum_{k=0}^{n-2} \ln(1+r^k) \leqslant \ln u_1 + \sum_{k=0}^{n-2} r^k \leqslant \ln u_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \ln u_1 + \frac{1}{1-r} \\ &\Rightarrow \quad \forall n \geqslant 2, \quad u_n \leqslant u_1 \exp(\frac{1}{1-r}) \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_n$ est donc majorée, croissante donc elle converge vers une limite $l(r) \geqslant u_1 > 0$.

2. Pour obtenir un équivalent de $u_n - l(r)$, il est classique d'étudier la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$. La relation satisfaite par u montre que

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} - u_{n+1} = r^n u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l(r) r^n$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} r^n$ étant convergente, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+2}-u_{n+1})$ est convergente. Le théorème de sommation sur les restes partielles de séries convergentes montre que

$$\forall n \geqslant 0, \quad \sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+2}-u_{k+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} l(r) r^k = \frac{l(r) r^n}{1-r}.$$

Calculons la somme classique $\sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+2}-u_{k+1})$

$$\sum_{k=n}^{N}(u_{k+2}-u_{k+1}) = u_{N+2} - u_{n+1} \underset{N\to+\infty}{\to} l(r) - u_{n+1} \Rightarrow \sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+2}-u_{k+1}) = l(r) - u_{n+1}.$$

On en déduit que

$$l(r) - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{l(r) r^n}{1-r} \Leftrightarrow l(r) - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{l(r) r^{n-1}}{1-r}$$

Correction de l'exercice 3.2.9 : Sur l'intervalle $]0,+\infty[$, l'équation différentielle

$$(E) : xy' + |y| = 2(x^2-4) \text{ et } y(1) = 1 \tag{61}$$

est équivalente au problème de Cauchy suivant :

$$(E') : y' = \frac{-|y| + 2(x^2-4)}{x} \text{ et } y(1) = 1.$$

La fonction $f(y,x) = \frac{-|y| + 2(x^2-4)}{x}$ est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et $(1,1) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre l'existence et l'unicité de la solution maximale φ du problème (E'). Cette solution maximale est définie et de classe C^1 sur un intervalle ouvert $]a,b[$. La fonction φ est continue en 1 et l'égalité $\varphi(1) = 1$ montre qu'il existe un voisinage ouvert $]c,d[\subset]a,b[$ tel que

$$\forall x \in]c,d[, \quad y(x) > 0.$$

Ainsi, la fonction φ satisfait à l'équation différentielle

$$(E^+) : \forall x \in]c,d[, \quad y'(x) = \frac{-y(x) + 2(x^2-4)}{x} \text{ et } y(1) = 1.$$

Résolvons cette dernière équation différentielle affine. L'équation différentielle homogène associée est : $y' = -\frac{y}{x}$dont les solutions sont de la forme $x \mapsto \frac{C}{x}$. Pour expliciter une solution particulière de (E^+), on adopte la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire, on recherche une solution sous la forme $z(x) = \frac{C(x)}{x}$. Cette solution vérifie

$$\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = \frac{-\frac{C(x)}{x} + 2(x^2-4)}{x} = -\frac{C(x)}{x^2} + 2x - \frac{8}{x} \Leftrightarrow C'(x) = 2x^2 - 8.$$

On peut choisir $C(x) = \frac{2}{3}x^3 - 8x$ et donc la solution générale de (E^+) s'écrit

$$y(x) = \frac{C}{x} + \frac{\frac{2}{3}x^3 - 8x}{x} = \frac{C}{x} + \frac{2}{3}x^2 - 8.$$

Puisque $y(1) = 1$, on a $C = \frac{25}{3}$ donc

$$\forall x \in]c,d[, \quad \varphi(x) = \frac{25}{3x} + \frac{2}{3}x^2 - 8.$$

Par construction, $\varphi(x) > 0$ sur $]c,d[$ donc $\frac{25}{3x} + \frac{2}{3}x^2 - 8 > 0$ sur $]c,d[$. Etudions les variations de cette dernière fonction.

$$\varphi'(x) = \frac{4}{3}x - \frac{25}{3x^2} = \frac{4x^3 - 25}{3x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[3]{\frac{25}{2}}$$

Le tableau de variations de $x \mapsto \frac{25}{3x} + \frac{2}{3}x^2 - 8$ nous montre qu'il deux réels $1 < \alpha < \beta < \sqrt[3]{\frac{25}{2}}$ tels que

$$\forall x \in]0,\alpha[\cup]\beta,+\infty[, \quad \frac{25}{3x} + \frac{2}{3}x^2 - 8 > 0 \text{ et } \forall x \in]\alpha,\beta[, \quad \frac{25}{3x} + \frac{2}{3}x^2 - 8 < 0.$$

La fonction $x \mapsto \frac{25}{3x} + \frac{2}{3}x^2 - 8$ est donc aussi solution de l'équation différentielle (E') sur l'intervalle $]0,\alpha[$. Par définition de la solution maximale, $]0,\alpha[\subset]a,b[$, c'est-à-dire que $a \leqslant 0$ et $b \geqslant \alpha$. Si $a < 0$, alors la fonction φ est continue en 0 donc elle admet une limite finie en 0^+. Or

$$\lim_{x \mapsto 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \to 0^+} (\frac{25}{3x} + \frac{2}{3}x^2 - 8) = +\infty,$$

ce qui est absurde donc $a \geqslant 0$ et on en déduit alors que

$$a = 0. \tag{62}$$

Supposons que $b > \alpha$. Alors φ est continue en α et

$$\varphi(\alpha) = \lim_{x \to \alpha^-} \varphi(x) = \lim_{x \to \alpha^-} (\frac{25}{3x} + \frac{2}{3}x^2 - 8) = 0. \tag{63}$$

D'autre part, puisque $\sqrt[3]{\frac{25}{2}} > 2$, on en déduit que

$$\varphi'(\alpha) = \frac{-|\varphi(\alpha)| + 2(\alpha^2-4)}{\alpha} = \frac{2(\alpha^2-4)}{\alpha} < 0.$$

La fonction φ est strictement décroissante dans un voisinage de α donc $\varphi(x) < 0$ dans un intervalle du type $[\alpha, e[$. Dans cet intervalle, la fonction φ satisfait à l'équation différentielle

$$(E^-) : \forall x \in]\alpha, e[, \quad y'(x) = \frac{y(x) + 2(x^2-4)}{x}.$$

La solution de l'équation homogène (E^-) est $y(x) = C(x)x$ et on cherche une solution particulière sous la forme $z(x) = C(x)x$. La fonction C satisfait à l'équation différentielle

$$C'(x)x + C(x) = \frac{C(x)x + 2(x^2-4)}{x} \Leftrightarrow C'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}.$$

La fonction $C(x) = 2x + \dfrac{8}{x}$ convient et la solution générale de (E^-) est de la forme

$$y(x) = Cx + 2x^2 + 8.$$

On en déduit que :

$$\forall x \in]\alpha, e[, \quad \varphi(x) = Cx + 2x^2 + 8,$$

ce qui nous fournit l'expression de φ sur $]0, e[\backslash\{\alpha\}$ donnée par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{25}{3x} + \dfrac{2}{3}x^2 - 8 & \text{si } x \in]0, \alpha[\\ Cx + 2x^2 + 8 & \text{si } x \in]\alpha, e[. \end{cases}.$$

Or la fonction φ est C^1 sur $]0, b[\supset]0, e[$ donc elle est continue en α, c'est-à-dire

$$\lim_{x\to\alpha^-} \varphi(x) = \lim_{x\to\alpha^+} \varphi(x) \underset{\text{cf (63)}}{\Leftrightarrow} 0 = C\alpha + 2\alpha^2 + 8 \Leftrightarrow C = -\frac{\alpha^2+4}{2\alpha}. \tag{64}$$

La fonction φ doit également être C^1 en α donc

$$\lim_{x\to\alpha^-} \varphi'(x) = \lim_{x\to\alpha^+} \varphi'(x) \Leftrightarrow \frac{4\alpha^3 - 25}{3\alpha^2} = C + 4\alpha \Leftrightarrow C = -\frac{8\alpha^3+25}{3\alpha^2}. \tag{65}$$

Les égalités (64) et (65) montre que l'on a l'égalité

$$\frac{\alpha^2+4}{2\alpha} = \frac{8\alpha^3+25}{3\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{3\alpha^3+8}{6\alpha^2} = \frac{16\alpha^3+50}{6\alpha^2} \underset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha^3 = -\frac{42}{13} \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[3]{-\frac{42}{13}} < 0$$

ce qui est absurde donc $b \leqslant \alpha$ ce qui implique que

$$b = \alpha. \tag{66}$$

Des égalités (62) et (66), on en déduit que

$$\mathcal{D}_\varphi =]0, \alpha[\text{ et } \forall x \in]0, \alpha[, \quad \varphi(x) = \frac{25}{3x} + \frac{2}{3}x^2 - 8.$$

Pour la résolution de l'équation différentielle (61), on recherche naturellement, une solution définie sur un intervalle contenant 1. Cet intervalle ne peut contenir 0. En effet, soit y une solution de (61) C^1 dans un voisinage de 0, alors $y = \varphi$ dans un intervalle du type $]0, \varepsilon[$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty$, ce qui est absurdre. Par conséquent, la résolution de l'équation différentielle (61) est équivalente à la résolution de l'équation différentielle (E') dont la solution maximale est φ. Par conséquent, φ est la solution maximale de l'équation différentielle (61).

Correction de l'exercice 3.2.10 :

1. Les applications $f \mapsto \|f\|_2$ et $f \mapsto \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ sont des normes sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$ (cf. le cours) et comme H étant de dimension fini, toutes les normes sont équivalentes, on en déduit l'existence d'une constante C telle que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leqslant C\,\|f\|_2 \Rightarrow \forall x\in[0,1],\quad |f(x)| \leqslant C\,\|f\|_2\,.$$

2. Soit $f_1,...,f_n$ une famille orthonormale de H pour le produit scalaire $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Pour $(a_1,..,a_n)\in\mathbb{R}^n$, la fonction $\sum_{k=1}^n a_k f_k \in H$ donc

$$\forall (a_1,..,a_n)\in\mathbb{R}^n,\quad \forall x\in[0,1],\quad \left|\sum_{k=1}^n a_k f_k(x)\right| \leqslant C\left\|\sum_{k=1}^n a_k f_k\right\|_2$$
$$\Leftrightarrow \forall (a_1,..,a_n)\in\mathbb{R}^n,\quad \forall x\in[0,1],\quad \left|\sum_{k=1}^n a_k f_k(x)\right|^2 \leqslant C^2\left\|\sum_{k=1}^n a_k f_k\right\|_2^2$$

Le théorème de Pythagore montre que

$$\left\|\sum_{k=1}^n a_k f_k\right\|_2^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2\,\|f_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2$$

donc

$$\forall (a_1,..,a_n)\in\mathbb{R}^n,\quad \forall x\in[0,1],\quad \left|\sum_{k=1}^n a_k f_k(x)\right|^2 \leqslant C^2\sum_{k=1}^n a_k^2.$$

Fixons provisoirement $x\in[0,1]$. Notons $A=(a_1,..,a_n)$ et $B=(f_1(x),..,f_n(x))$ et soit $<,>$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$\forall A\in\mathbb{R}^n,\quad |<A,B>|^2 \leqslant C^2 <A,A>\,.$$

Si on choisit $A = \dfrac{B}{\sqrt{<B,B>}}$, on obtient

$$\left|<\frac{B}{\sqrt{<B,B>}},B>\right|^2 \leqslant C^2.<\frac{B}{\sqrt{<B,B>}},\frac{B}{\sqrt{<B,B>}}> \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{<B,B>}}<B,B>\right|^2 \leqslant C^2.\frac{1}{<B,B>}$$
$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{<B,B>}\right|^2 \leqslant C^2 \Leftrightarrow |<B,B>| \leqslant C^2,$$

ce qui démontre que $\sum_{k=1}^n f_k(x)^2 \leqslant C^2$ et ce quel que soit $x\in[0,1]$. Intégrons cette inégaité sur $[0,1]$

$$C^2 \geqslant \int_0^1 \sum_{k=1}^n f_k(x)^2dx = \sum_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x)^2dx = \sum_{k=1}^n \|f_k\|_2^2 = n.$$

Nous venons de montrer qu'il ne peut y avoir plus de C^2 vecteurs orthonormés libres. Puisque toute famille libre peut-être transformer en une famille libre orthonormée de même cardinal (par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt), on en déduit qu'il y a au plus C^2 vecteurs libres dans H. Par conséquent, $\dim H \leqslant C^2$ par définition de la dimension.

Correction de l'exercice 3.2.11 :

1. La fonction $t \mapsto \left|\sin\frac{t}{2}\right|$ est 2π-périodique, paire, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc le théorème de Dirichlet montre que $t \mapsto \left|\sin\frac{t}{2}\right|$ est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ et que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin\frac{t}{2}\right| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nt$$
où a_n désigne le coefficient de Fourier de $t \mapsto \left|\sin\frac{t}{2}\right|$ (les coefficients b_n étant nuls car il s'agit d'une fonction pair).
En remarquant que si $t \in [0,\pi]$ alors $\frac{t}{2} \in [0,\frac{\pi}{2}]$ donc $\sin\frac{t}{2} \geqslant 0$) et en se souvenant de la formule trigonométrique
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)),$$
on en déduit le calcul des coefficients a_n
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| \cos nt dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| \cos nt dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin\frac{t}{2}\cos nt dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(\frac{t}{2}+nt) + \sin(\frac{t}{2}-nt)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin((\frac{1}{2}+n)t) - \sin((n-\frac{1}{2})t)dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((\frac{1}{2}+n)t)}{\frac{1}{2}+n} + \frac{\cos((n-\frac{1}{2})t)}{n-\frac{1}{2}}\right]_{t=0}^{t=\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((\frac{1}{2}+n)\pi)}{\frac{1}{2}+n} + \frac{\cos((n-\frac{1}{2})\pi)}{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}+n} - \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right] \end{aligned}$$
Puisque $(\frac{1}{2}+n)\pi = (-\frac{1}{2}+n)\pi = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$, on en déduit que
$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+n} - \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)}.$$
Ainsi,
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin\frac{t}{2}\right| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nt}{(4n^2-1)}$$

2. Soit $f \in E$ un vecteur propre de Φ, c'est-à-dire $f \neq 0$ et $\Phi(f) = \lambda f$. On a bien envie, par analogie avec les séries entières, d'utiliser le développement en série de Fourier ci-dessus ainsi que de développer en série de Fourier f afin d'expliciter les coefficients de Fourier de f. Malheureusement, nous ne sommes pas en mesure d'appliquer le théorème de Dirichlet car, bien que f soit 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$, nous ne savons pas si f est C^1 par morceaux. Pour contourner cet obstacle, nous allons évaluer les coefficients de Fourier de $\Phi(f)$. La fonction Φ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des coefficients de Fourier.

Coefficients de Fourier a_p de $\Phi(f)$
$$a_p(\Phi(f)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(f)(x)\cos pxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin(\frac{x-t}{2})\right| f(t)\ dt.\cos pxdx.$$

La fonction $(x,t) \mapsto \left|\sin(\frac{x-t}{2})\right| f(t)\cos px$ étant continue sur le compact $[-\pi,\pi]^2$, nous pouvons appliquer Fubini, donc

$$a_p(\Phi(f)) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(\frac{x-t}{2})\right|\cos pxdx\right) f(t)\ dt.$$

Le noyau $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(\frac{x-t}{2})\right|\cos pxdx$ se calcule simplement lorsque $p=0$ (en se rappelant que $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} g(t)dt = \int_b^{b+T} g(t)dt$ si -g est T-périodique)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(\frac{x-t}{2})\right|\cos pxdx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(\frac{x-t}{2})\right|dx \underset{x\leftarrow x-t}{=} \int_{-\pi-t}^{\pi-t}\left|\sin(\frac{x}{2})\right|dx = 2\int_0^{\pi}\left|\sin(\frac{x}{2})\right|dx\\ &= 2\int_0^{\pi}\sin(\frac{x}{2})dx = 2\left[-2\cos(\frac{x}{2})\right]_{x=0}^{x=\pi} = 4 \qquad (67)\end{aligned}$$

Traitons le cas $p\in\mathbb{N}^{\times}$, Pour cela, on utilise le théorème de développement en série de Fourier de la question 1.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(\frac{x-t}{2})\right|\cos pxdx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n(x-t)}{(4n^2-1)}\right)\cos pxdx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos pxdx - \frac{4}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n(x-t}{(4n^2-1)}$$

Puisque que $p\geqslant 1$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(\frac{x-t}{2})\right|\cos pxdx = -\frac{4}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n(x-t)}{(4n^2-1)}\cos pxdx \qquad (68)$$

Fixons provisoirement $t\in[-\pi,\pi]$. Pour tout entier $n\geqslant 1$, la fonction $t\mapsto \frac{\cos n(x-t)}{(4n^2-1)}\cos px$ est continue sur $[-\pi,\pi]$ donc elle est intégrable sur cet intervalle et l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\cos n(x-t)}{(4n^2-1)}\cos px\right|dx \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(4n^2-1)}dx = 2\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)} < +\infty,$$

ce qui nous permet d'utiliser d'appliquer le théorème de permutation série-intégrale de Lebesgue. On en déduit que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n(x-t)}{(4n^2-1)}\cos pxdx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n(x-t)}{(4n^2-1)}\cos pxdx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)}\int_{-\pi}^{\pi}\cos n(x-t)\cos pxdx.$$

Calculons l'intégrale $I = \int_{-\pi}^{\pi}\cos n(x-t)\cos pxdx$. On utilise pour cela la formule

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b)).$$

$$2I = \int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n(x-t)+px)+\cos(n(x-t)-px))\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}(\cos((n+p)x-nt)+\cos((n-p)x-nt))\,dx$$

Nous sommes obliger de distinguer les cas où $n=p$ et et $n\neq p$.
Si $n\neq p$, en utilisant que $\sin(x+k\pi)=(-1)^k\sin x$, on obtient :

$$\begin{aligned}2I &= \left[\frac{\sin((n+p)x-nt)}{n+p}+\frac{\sin((n-p)x-nt)}{n-p}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}\\ &= \frac{\sin((n+p)\pi-nt)}{n+p}+\frac{\sin((n-p)\pi-nt)}{n-p}+\frac{\sin((n+p)\pi+nt)}{n+p}+\frac{\sin((n-p)\pi+nt)}{n-p}\\ &= \frac{-(-1)^{n+p}\sin(nt)}{n+p}+\frac{-(-1)^{n-p}\sin(nt)}{n-p}+\frac{(-1)^{n+p}\sin(nt)}{n+p}+\frac{(-1)^{n-p}\sin(nt)}{n-p}=0\end{aligned}$$

Si $n=p\geqslant 1$

$$\begin{aligned}2I &= \int_{-\pi}^{\pi}(\cos(2px-pt)+\cos(pt))\,dx=\left[\frac{\sin(2px-pt)}{2p}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}+2\pi\cos(pt)\\ &= \frac{\sin(2p\pi-pt)}{2p}+\frac{\sin(2p\pi+pt)}{2p}+2\pi\cos(pt)=-\frac{\sin(pt)}{2p}+\frac{\sin(pt)}{2p}+2\pi\cos(pt)=2\pi\cos(pt)\end{aligned}$$

En résumé :

$$I=\left\{\begin{array}{cc}0 & \text{si } n\neq p \text{ et } p\geqslant 1\\ \pi\cos(pt) & \text{si } n=p \text{ et } p\geqslant 1\end{array}\right.$$

donc

$$\forall p\in\mathbb{N}^{\times},\quad \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(\frac{x-t}{2})\right|\cos pxdx=-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)}\int_{-\pi}^{\pi}\cos n(x-t)\cos pxdx=-\frac{4}{4p^2-1}\cos(pt).$$

Par conséquent, on obtient que

$$a_p(\Phi(f))=\left\{\begin{array}{cc}\dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt=\frac{2}{\pi}a_0(f) & \text{si } p=0\\ -\dfrac{2}{\pi^2(4p^2-1)}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(pt)f(t)\,dt=-\frac{2}{\pi(4p^2-1)}a_p(f) & \text{si } p\in\mathbb{N}^{\times}.\end{array}\right.$$

ce que l'on peut résumer par

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad a_p(\Phi(f))=-\frac{2}{\pi(4p^2-1)}a_p(f)\tag{69}$$

Calcul des coefficients de Fourier b_p de $\Phi(f)$ Les méthodes étant identique au cas des coefficients a_n, je laisse le soin au lecteur d'apporter la justification des calculs suivants

$$b_p(\Phi(f))=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(f)(x)\sin pxdx=\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(\frac{x-t}{2})\right|\sin pxdx\right)f(t)\,dt$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(\frac{x-t}{2})\right|\sin pxdx=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin pxdx-\frac{4}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n(x-t)}{(4n^2-1)}\sin pxdx=-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)}\int_{-\pi}^{\pi}\cos n(x-$$

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\cos n(x-t)\sin pxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(px+n(x-t))+\sin(px-n(x-t))dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin((n+p)x-nt)+\sin((p-n)x+$$

La formule $\cos(x+k\pi)=(-1)^k\cos x$ nous fourni l'égalité :

$$\forall p\in\mathbb{N}^{\times},\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos n(x-t)\sin pxdx=\left\{\begin{array}{cc}0 & \text{si } n\neq p\\ \pi\sin(pt) & \text{si } n=p\end{array}\right.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(\frac{x-t}{2})\right|\sin pxdx=-\frac{4}{(4p^2-1)}\sin(pt)$$

$$\forall p\in\mathbb{N}^{\times},\quad b_p(\Phi(f))=-\frac{2}{\pi^2(4p^2-1)}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(pt)f(t)\ dt=-\frac{2}{\pi(4p^2-1)}b_p(f). \tag{70}$$

Détermination des valeurs propres éventuelles Les égalités (69) et (70) montrent que si f est un vecteur propre associé à λ alors

$$\Phi(f)=\lambda f\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}\forall p\in\mathbb{N}, & a_p(\Phi(f))=\lambda a_p(f)\\ \forall p\in\mathbb{N}^{\times}, & b_p(\Phi(f))=\lambda b_p(f)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}\forall p\in\mathbb{N}, & -\frac{2}{\pi(4p^2-1)}a_p(f)=\lambda a_p(f)\\ \forall p\in\mathbb{N}^{\times}, & -\frac{2}{\pi(4p^2-1)}b_p(f)=\lambda b_p(f)\end{array}\right.$$

Puisque f est non nul, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $a_n(f)$ ou $b_n(f)\neq 0$. Dans ce cas, $\lambda=-\frac{2}{\pi(4n^2-1)}$ et

$$\mathrm{Sp}(\Phi)\subset\{-\frac{2}{\pi(4n^2-1)},\quad n\in\mathbb{N}\}.$$

Détermination des vecteurs propres associés Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\lambda=-\frac{2}{\pi(4n^2-1)}$. Soit $f\in E_\lambda(\Phi)$, l'application $p\mapsto-\frac{2}{\pi(4p^2-1)}$ est injective sur $\mathbb{N}$ donc on a

$$\left\{\begin{array}{ll}\forall p\in\mathbb{N}, & -\frac{2}{\pi(4p^2-1)}a_p(f)=-\frac{2}{\pi(4n^2-1)}a_p(f)\\ \forall p\in\mathbb{N}^{\times}, & -\frac{2}{\pi(4p^2-1)}b_p(f)=-\frac{2}{\pi(4n^2-1)}b_p(f)\end{array}\right.\Leftrightarrow\forall p\neq n,\quad a_p(f)=0\text{ et }b_p(f)=0$$

donc $f\in\mathrm{Vect}(x\mapsto\cos nx,x\mapsto\sin nx)\subset E$. Montrons que $e_n:x\mapsto\cos nx$ et $f_n:x\mapsto\sin nx$ sont bien des vecteurs propres de Φ.

$$\Phi(e_n)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(\frac{x-t}{2})\right|\cos nt\ dt\underset{t\leftarrow x-t}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}\left|\sin(\frac{t}{2})\right|\cos n(x-t)\ dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(\frac{t}{2})\right|\cos n(x-$$

$$=\frac{\cos nx}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(\frac{t}{2})\right|\cos nt\ dt+\frac{\sin nx}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(\frac{t}{2})\right|\sin nt\ dt$$

Par l'argument de parité usuel et en utilisant que $\frac{t}{2}\in[0,\frac{\pi}{2}]$ si $t\in[0,\pi]$, on a

$$\Phi(e_n)(x)=\frac{\cos nx}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sin(\frac{t}{2})\right|\cos nt\ dt=\frac{\cos nx}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(\frac{t}{2})\cos nt\ dt.$$

Il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale :

$$2\int_0^{\pi}\sin(\frac{t}{2})\cos nt\ dt=\int_0^{\pi}\sin((\frac{1}{2}+n)t)\ dt+\int_0^{\pi}\sin((\frac{1}{2}-n)t)\ dt=\left[-\frac{\cos((\frac{1}{2}+n)t}{\frac{1}{2}+n}-\frac{\cos((\frac{1}{2}-n)t)}{\frac{1}{2}-n}\right.$$

$$=-\frac{2\cos((\frac{1}{2}+n)\pi)}{2n+1}+\frac{\cos((\frac{1}{2}-n)\pi)}{2n-1}+\frac{2}{2n+1}-\frac{2}{2n-1}=\frac{4}{4n^2-1}$$

donc

$$\int_0^\pi \sin(\frac{t}{2})\cos nt\ dt = \frac{2}{4n^2-1} \Rightarrow \Phi(e_n)(x) = \frac{2}{\pi(4n^2-1)}\cos nx,$$

ce qui démontre que e_n est bien un vecteur propre associé à $\frac{2}{\pi(4n^2-1)}$. Je laisse le lecteur vérifier que f_n est également un vecteur propre associé à $\frac{2}{\pi(4n^2-1)}$.

Nous venons de démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E_{\frac{2}{\pi(4n^2-1)}}(\Phi) = \text{Vect}(e_n, f_n).$$

Si $n = 0$, $\text{Vect}(e_n, f_n) = \text{Vect}\, e_n$ *(car* $f_n = 0$*) et* $\dim E_{\frac{2}{\pi(4n^2-1)}}(\Phi) = 1$ *(car* $e_0 = 1$ *est une fonction non nulle)*

Si $n \geqslant 1$, *la famille* (e_n, f_n) *est libre (elle est orthogonale pour le produit scalaire* $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$*) donc* $\dim E_{\frac{2}{\pi(4n^2-1)}}(\Phi) = 2$. *On remarque également que la famille des vecteurs propres de* Φ *est totale dans* $L^2([-\pi,\pi])$, *ce qui nous fournit une sorte de diagonalisation de* Φ *en base orthonormale de* $L^2([-\pi,\pi])$ *pour le produit scalaire usuel sur cet espace (si on normalise les* e_n *et les* f_n*).*

Correction de l'exercice 3.2.12 :

1. On pose $f(x) = e^{-x^2}$. La fonction f est clairement C^∞ sur $\mathbb{R}$. Une récurrence simple montre que pour tout entier k, il existe un polynôme P_k tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(x) = P_k(x)f(x)$. Soit $r(k)$ le degré de P_k et $a(k)$ son coefficient dominant. Puisque pour tout réel α, $x^\alpha \underset{x\to\pm\infty}{=} o(e^{-|x|})$, le changement de variable $x = t^2$ montre que $\forall \beta \in \mathbb{R}, \quad x^\beta \underset{x\to\pm\infty}{=} o(e^{-x^2})$. On en déduit que

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, \quad x^n f^{(k)}(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a(k)x^{r(k)+n}f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$$

donc $x^n f^{(k)}$ est bornée au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$. Il existe donc deux réels $A(k)$ et $B(k)$ tels que $x^n f^{(k)}$ soit bornée sur $]-\infty, A(k)]$ et $[B(k), +\infty[$ (définition de la limite en $+\infty$,et $-\infty$ avec $\varepsilon = 1$). La fonction $x^n f^{(k)}$ est continue sur $[A(k), B(k)]$ donc elle est bornée sur ce segment donc elle est bornée sur $\mathbb{R}$ quels que soient k, n appartenant à $\mathbb{N}$ donc $f \in \mathcal{S}$.

2. Pour tout entier k, i, la fonction $x \mapsto x^i f^{(k)}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ donc pour tout entier k, i la fonction $(1+x^2)^i f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ (il suffit de développer $(1+x^2)^i$). Il existe donc une constante $C_{k,n}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{C_{k,n}}{(1+x^2)^n}.$$

En particulier, si l'on pose $C = C_{0,1}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x+n)| \leqslant \frac{C}{1+(x+n)^2}.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+(x+n)^2}$ est sommable car son terme général est positif et $\frac{1}{1+(x+n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Donc F est définie sur $\mathbb{R}$.

Montrons que F est C^1 sur $\mathbb{R}$. Soit $a > 0$, et $x \in [-a, a]$. La fonction $x \mapsto f(x+n)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, si l'on pose $D = C_{1,1}$, on a

$$\forall x \in [-a,a], \quad \forall n \text{ tel que } |n| > a, \quad \left|f'(x+n)\right| \leqslant \frac{D}{1+(x+n)^2} = \frac{D}{1+\underbrace{x^2}_{\geqslant 0} + 2\underbrace{nx}_{\geqslant -|n|a} + n^2} \leqslant \frac{D}{1-2|n|a+n^2}$$

La série $\sum_{|n|>a} \frac{1}{1-2|n|a+n^2}$ est sommable car son terme général est positif et est équivalent à $\frac{1}{n^2}$, ce qui démontre que la série $\sum_{|n|>a} f'(x+n)$ est normalement convergente sur $[-a,a]$. La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ étant simplement convergente sur $[-a,a]$, on en déduit que $x\mapsto \sum_{|n|>a} f(x+n)$ est de classe C^1 sur $[-a,a]$. La fonction $x\mapsto \sum_{|n|\leqslant a} f(x+n)$ étant la somme d'un nombre fini de fonctions de classe C^1, elle est bien entendu C^1 sur $[-a,a]$ donc F est C^1 sur $[-a,a]$. Comme a est quelconque, on en déduit que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Le changement de variable $j=n+1$, qui est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$, montre l'égalité suivante

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x+1)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+\underbrace{1+n}_{=j})=\sum_{j\in\mathbb{Z}} f(x+j)=F(x)$$

donc F est 1-périodique.

3. La fonction F étant C^1 sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique, le théorème de Dirichlet montre que F est développable en série de Fourier et elle est égale à la somme de sa série de Fourier.

$$\forall np\in\mathbb{Z},\quad c_p(F)=\int_0^1 F(x)e^{-2\pi ipx}dx=\int_0^1\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)e^{-2\pi ipx}dx.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)e^{-2\pi inx}$ étant normalement convergente sur $[0,1]$ ($\left|f(x+n)e^{-2\pi inx}\right|=|f(x+n)|$) et chacun de ses termes étant continue, on peut permuter les symboles série-intégrale donc

$$\forall p\in\mathbb{Z},\quad c_p(F)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^1 f(x+n)e^{-2\pi ipx}dx\underset{t=x+n}{=}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_n^{n+1} f(t)e^{-2\pi ip(t-n)}dt=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_n^{n+1} f(t)e^{-2\pi ipt}dt.$$

La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ car

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad |f(x)|\leqslant\frac{C}{1+x^2}$$

et $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons donc appliquer la relation de Chasles sur la partition de $\mathbb{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n,n+1]$, ce qui nous donne

$$\forall p\in\mathbb{Z},\quad c_p(F)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi ipt}dt=\widehat{f}(p).$$

La fonction F étant la somme de sa série de Fourier, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)=F(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(n)e^{2\pi inx}\underset{x=0}{\Rightarrow}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(n).$$

4. On pose $g(x)=\exp(-ax^2)$ et $f(x)=\exp(-x^2)$ alors

$$\widehat{g}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-ax^2)\exp(2\pi ixy)dx\underset{t=\sqrt{a}x}{=}\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-t^2)\exp(2\pi it\frac{y}{\sqrt{a}})dt=\frac{1}{\sqrt{a}}\widehat{f}(\frac{y}{\sqrt{a}})=\frac{1}{\sqrt{a}}\exp(-\frac{y^2}{a})$$

donc

$$\forall a>0,\quad\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(-an^2)=\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{n^2}{a}).$$

Correction de l'exercice 3.2.13 :

1. La fonction f est 2π-périodique, continue sur $]-\pi,\pi[$ mais en pas en π car

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x)=e^{ia\pi} \text{ et } \lim_{x\to\pi^+} f(x)=\lim_{x\to\pi^+} f(x-2\pi)=\lim_{x\to-\pi^-} f(x)=e^{-ia\pi}\neq e^{ia\pi}$$

puisque $a\notin\mathbb{Z}$ donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (par périodicité). Elle est également C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Dirichlet montre que la série de Fourier de f converge et que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in]-\pi,\pi[\\ \dfrac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\cos(\pi a) & \text{si } x=\pi \end{cases}$$

Calculons les maintenant les coefficients de Fourier complexe de f. Puisque a n'est pas un entier, l'expression $n-a$ n'est jamais nulle pour tous les entiers relatifs n, ce qui nous donne les calculs suivants

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z},\quad c_n(f)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(a-n)x}dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(a-n)x}}{i(a-n)}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} \\ &=\frac{1}{\pi(a-n)}\frac{e^{i(a-n)\pi}-e^{-i(a-n)\pi}}{2i}=\frac{\sin(a-n)\pi}{\pi(a-n)}=\frac{\sin a\pi\cos n\pi}{\pi(a-n)}=(-1)^n\frac{\sin a\pi}{\pi(a-n)}. \end{aligned}$$

L'application du théorème de Dirichlet montre que

$$\forall x\in]-\pi,\pi[,\quad e^{iax}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin a\pi}{\pi(a-n)}e^{inx}$$

ainsi que l'égalité (en $x=\pi$, $e^{inx}=(-1)^n$)

$$\cos(\pi a)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin a\pi}{\pi(a-n)}$$

2. L'égalité précédente montre que

$$\cos(\pi a)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin a\pi}{\pi(a-n)}=\frac{\sin a\pi}{\pi a}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin a\pi}{\pi(a-n)}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{\sin a\pi}{\pi(a-n)}$$

En effectuant le changement de variable $j=-n$ dans la seconde somme, nous obtenons

$$\begin{aligned} \cos(\pi a) &= \frac{\sin a\pi}{\pi a}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin a\pi}{\pi(a-n)}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin a\pi}{\pi(a+n)}=\frac{1}{\pi a}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a-n}+\frac{1}{a+n}\right)=\frac{\sin a\pi}{\pi a}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin a}{\pi} \\ \Leftrightarrow\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{2a}{n^2-a^2}\right)&=\frac{\sin a\pi}{\pi a}-\cos(\pi a)\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-a^2}=\frac{1}{2a^2}-\frac{\pi\cos(\pi a)}{2a\sin a\pi} \end{aligned}$$

3. Faisons une analyse préliminaire purement formelle. Si toutes les fonctions u_n sont positives sur $]0,1[$, on a

$$\ln(\sin\pi a)-\ln(\pi a)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln u_n(a)$$

et si nous avons le droit de dériver, on obtient

$$\frac{\pi\cos\pi a}{\sin\pi a}-\frac{1}{a}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n'(a)}{u_n(a)}.$$

L'expression $\dfrac{\pi\cos\pi a}{\sin\pi a}$ intervient dans la formule (71) et nous avons

$$\frac{\pi\cos(\pi a)}{\sin a\pi}=\frac{1}{a}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2a}{n^2-a^2}.$$

Ainsi, nous obtenons l'équation différentielle satisfaite par chaque fonction u_n

$$\frac{u_n'(a)}{u_n(a)}=-\frac{2a}{n^2-a^2}\Leftrightarrow(\ln u_n(a))'=\ln(n^2-a^2)\Rightarrow u_n(a)=C_n(n^2-a^2)$$

La fonction $u_n(a)=C_n(n^2-a^2)$ est donc un candidat potentiel mais on souhaite que tous les u_n soient positifs, ce qui n'est jamais le cas de n^2-a^2. En outre, pour que le produit $\prod\limits_{n\geqslant 1}u_n(a)$ puisse converger, il est indispensable d'exiger que

$$\lim_{n\to+\infty}u_n(a)=1\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}C_nn^2=1\Leftrightarrow C_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}.$$

On choisit simplement $C_n=\dfrac{1}{n^2}$ donc

$$u_n(a)=1-\frac{a^2}{n^2}.$$

Synthèse : On pose $\forall a\in[0,1],\quad\forall n\geqslant 1,\quad u_n(a)=1-\dfrac{a^2}{n^2}>0$. Nous allons montrer que la fonction $a\mapsto\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\ln(u_n(a))$ est définie et de classe C^1 sur $[0,1]$ (on considère $n\geqslant 2$ pour que la série soit bien définie sur $[0,1]$ et invoquer la convergence normale sur le segment) .
Lorsque $a\in]0,1]$, on a

$$|\ln u_n(a)|=\left|\ln(1-\frac{a^2}{n^2})\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}\left|-\frac{a^2}{n^2}\right|=\frac{a^2}{n^2}$$

qui est une série convergente, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\ln u_n(a)$ est absolument convergente donc convergente sur $]0,1]$. Lorsque $a=0$, $\ln u_n(a)=\ln 1=0$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\ln u_n(0)$ est convergente. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 2}\ln u_n(a)$ est simplement convergente sur $[0,1]$.
Chaque terme de la série est une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$. La série dérivée $\sum\limits_{n\geqslant 2}(\ln u_n(a))'=\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{-2a}{n^2-a^2}$ est normalement convergente sur $[0,1]$ car nous disposons de la majoration

$$\forall a\in[0,1],\quad\forall n\geqslant 2,\quad\left|\frac{-2a}{n^2-a^2}\right|\leqslant\frac{2}{n^2-1}$$

et la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{2}{n^2-1}$ est convergente. Par conséquent, la fonction $a\mapsto\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\ln(u_n(a))$ est C^1 sur $[0,1]$ et sa dérivée est

$$\forall a\in[0,1],\quad\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(u_n(a))\right)'=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{-2a}{n^2-a^2}.$$

L'égalité (71) montre que l'on a

$$\forall a\in]0,1[,\quad\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(u_n(a))\right)'=\frac{\pi\cos(\pi a)}{\sin a\pi}-\frac{1}{a}-\frac{-2a}{1^2-a^2}$$

et l'égalité

$$\forall a \in]0,1[, \quad \left(\ln(\sin \pi a) - \ln a - \ln(1-\frac{a^2}{1^2})\right)' = \frac{\pi \cos(\pi a)}{\sin a\pi} - \frac{1}{a} - \frac{-2a}{1^2-a^2}$$

montre que

$$\forall a \in]0,1[, \quad \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \ln(u_n(a))\right)' = \left(\ln(\sin \pi a) - \ln a - \ln(1-\frac{a^2}{1^2})\right)'.$$

Il existe donc une constante C telle que

$$\forall a \in]0,1[, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(u_n(a)) = \ln(\sin \pi a) - \ln a - \ln(1-\frac{a^2}{1^2}) + C$$

Nous allons expliciter la constante en effectuant un passage à la limite lorsque a tend vers 0. La continuité de la fonction $a \mapsto \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \ln(u_n(a))$ montre que

$$\lim_{a\to 0} \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(u_n(a)) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(u_n(0)) = 0.$$

D'autre part, la limite classique $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ nous donne

$$\ln(\sin \pi a) - \ln a - \ln(1-\frac{a^2}{1^2}) = \ln(\frac{\sin \pi a}{\pi a}) - \ln(1-\frac{a^2}{1^2}) \underset{a\to 0}{\to} \ln 1 - \ln 1 = 0.$$

Par conséquent, nous obtenir l'identité remarquable

$$\begin{aligned}
\forall a \in]0,1[, \quad & \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(u_n(a)) = \ln(\sin \pi a) - \ln a - \ln(1-\frac{a^2}{1^2}) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(u_n(a)) = \ln(\frac{\sin \pi a}{\pi a}) \\
\Leftrightarrow & \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \ln(u_n(a)) = \ln(\frac{\sin \pi a}{\pi a}) \Leftrightarrow \lim_{N\to+\infty} \ln\left(\prod_{n=1}^{N} u_n(a)\right) = \ln(\frac{\sin \pi a}{\pi a}) \\
\Leftrightarrow & \ln\left[\lim_{N\to+\infty} \left(\prod_{n=1}^{N} u_n(a)\right)\right] = \ln(\frac{\sin \pi a}{\pi a}) \Leftrightarrow \ln\left[\prod_{n=1}^{+\infty} u_n(a)\right] = \ln(\frac{\sin \pi a}{\pi a}) \Leftrightarrow \prod_{n=1}^{+\infty} u_n(a) = \frac{\sin \pi a}{\pi a}
\end{aligned}$$

donc, nous obtenons l'égalité tant recherchée

$$\forall a \in]0,1[, \quad \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{a^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi a}{\pi a}.$$

Remarque : la formule précédente permet de donner la forme des valeurs de $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^s}$ *sur les entiers pairs.*

La fonction $x \mapsto \ln(1-\dfrac{x^2}{n^2})$ *est développable en série entière sur* $]0,1[$ *et*

$$\ln(1-\frac{x^2}{n^2}) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k \times n^{2k}}.$$

En permutant les symboles de sommation (dont je laisse la justification au lecteur à l'aide des familles sommables), on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-\frac{x^2}{n^2}) = -\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k \times n^{2k}} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k} \zeta(2k).$$

D'autre part, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x} - 1$ *étant développable en série entière sur* $\mathbb{R}$*, elle se prolonge en une fonction est* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *Son développement en série entière étant à coefficients rationnels, on en déduit que pour tout entier* n*, il existe un polynôme* $P_n \in \mathbb{Q}[X]$ *tel que* $\dfrac{\sin x}{x} = P_n(x) + o(x^n)$*. Tous les* $DL_n(0)$ *de la fonction* $x \mapsto \ln(1+x)$ *sont à coefficients rationnels, ce qui montre que pour tout entier* n*, il existe un polynôme* $Q_n \in \mathbb{Q}[X]$ *tel que* $\ln(1+x) = Q_n(x) + o(x^n)$*. Le théorème de composition des* $DL_n(0)$ *montre que pour tout entier* n*,*

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln(1 + \frac{\sin x}{x} - 1) = Q_n(P_n(x)) + o(x^n).$$

Le polynôme $Q_n \circ P_n$ *appartient à* $\mathbb{Q}[X]$ *donc le* $DL_n(0)$ *de* $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ *est à coefficients rationnels. Cette fonction étant paire, il existe une suite* $(a_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ *telle que*

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{2k} + o(x^{2n}) \Rightarrow \ln\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pi^{2k} x^{2k} + o(x^{2n})$$

Or, nous avons montrer que $\ln\left(\dfrac{\sin \pi x}{\pi x}\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - \dfrac{x^2}{n^2})$ *donc*

$$\ln\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{k}\zeta(2k) + o(x^{2n}).$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que pour tout entier k *non nul, il existe un rationnel* $b_k = -ka_k$ *tel que*

$$\zeta(2k) = b_k \pi^{2k}.$$

Application : avec un calculateur (Mupad, Mapple, Mathematica), on obtient que le $DL_{12}(0)$ *de* $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ *est*

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 - \frac{1}{2835}x^6 - \frac{1}{37\,800}x^8 - \frac{1}{467\,775}x^{10} - \frac{691}{3831\,077\,250}x^{12} + o\left(x^{12}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = 2 \times \frac{1}{180} \times \pi^4 = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = 3 \times \frac{1}{2835} \times \pi^6 = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = 4 \times \frac{1}{37\,800} \times \pi^8 = \frac{\pi^8}{945} \\
\zeta(10) &= 5 \times \frac{1}{467\,775} \times \pi^{10} = \frac{\pi^{10}}{93\,555}, \quad \zeta(12) = 6 \times \frac{691}{3831\,077\,250} \times \pi^{12} = \frac{691\pi^{12}}{638\,512\,875}.
\end{aligned}$$

(je ne vais pas plus loin pour ne pas planter ma machine :-))