CONCOURS 2005

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve spécifique de Mathématiques (filière MPSI))

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

$\boxed{\text{L'emploi d'une calculatrice est interdit.}}$

PREMIER PROBLEME

Partie A

On se propose dans cette partie d'étudier la fonction définie pour tout nombre réel t par :

$$f(t) = e^{-t}\cos(t)$$

et de donner une allure de sa courbe représentative.

1. Etudier, sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, les variations de la fonction f.

2. Exprimer $f(t+2k\pi)$ en fonction de $f(t)$ pour $k \in \mathbb{Z}$, et $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

   En déduire les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$.

3. Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -e^{-t}$.

   (C_1) et (C_2) leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

   Soit encore (C) la courbe représentative de f dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

   Déterminer les points d'intersection de (C) et (C_1) puis de (C) et (C_2); que dire alors de la limite de la fonction f en $-\infty$.

4. Comparer les tangentes à (C) et (C_1) aux points d'intersection trouvés à la question précédente;

   Faire de même pour (C) et (C_2).

5. Etudier la limite de f en $+\infty$.

6. Utiliser ce qui précède pour représenter graphiquement (C), (C_1) et (C_2) sr $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

   On pourra utiliser les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{array}{llllll} e^{-\pi/4} & \simeq & 0,46 & e^{\pi/4} = 2,19 & e^{-3\pi/4} \simeq 0,09 & e^{-\pi} \simeq 0,04 \\ e^{-\pi/2} & \simeq & 0,21 & e^{\pi/2} \simeq 4,81 & e^{-3\pi/2} \simeq 0,01 & \sqrt{2} \simeq 1,41 \end{array}$$

7. Pour tout entier naturel k, on pose :

$$a_k = \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+k\pi} e^{-t}\cos(t)dt$$

   Calculer cette intégrale (on pourra utiliser deux intégrations par parties)

8. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

9. On pose : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = |a_k|$;

   calculer $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$ en fonction de n, puis étudier la limite de s_n quand n tend vers $+\infty$.

   Interpréter géométriquement ce résultat.

Partie B

On se propose maintenant de tracer la courbe paramétrée définie pour $t \in [0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos(t) \\ y = e^{-t}\sin(t) \end{cases}$$

1. Déterminer les vecteurs vitesses $\overrightarrow{V}(t)$ et accélération $\overrightarrow{A}(t)$ à la date t.

2. Exprimer $\left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\|$ en fonction de t.

3. Démontrer que l'angle $\varphi = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{V}\right)$ que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ avec le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(t)$ à la date t est constant et en donner une mesure.

4. Donner une équation polaire de la courbe puis la représenter pour $t \in [0, 2\pi[$.

Partie C

Soit $E = \mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique. Pour tout réel t, on appelle F_t l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est :

$$M_t = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos(t) & -e^{-t}\sin(t) \\ e^{-t}\sin(t) & e^{-t}\cos(t) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la nature de F_n.

2. Montrer que F_t est la composée de deux endomorphismes simples de E, dont on donnera les éléments caractéristiques. (On peut utiliser soit le cours d'algèbre linéaire, soit les complexes)

3. Soit $F = \{F_t, \quad t \in \mathbb{R}\}$: ensemble des endomorphismes F_t, quand t décrit $\mathbb{R}$.

   Montrer que la compositions des applications, notée o, est interne sur F, puis montrer que (F, o) est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{R}, +)$.

DEUXIEME PROBLEME

On note $\mathfrak{M}_2$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On note $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle, et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ .0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unité.

On rappelle que $(\mathfrak{M}_2, +, \times)$ est un espace vectoriel et que $(\mathfrak{M}_2, +, \times)$ est un anneau.

Partie A

A est une matrice fixée de $\mathfrak{M}_2$, différente de I et θ, on considère f de $\mathfrak{M}_2$ vers lui-même définie par

$$f : M \mapsto f(M) = M \times A - A \times M$$

1. Quelle est la dimension de $\mathfrak{M}_2$? (on ne demande pas de justifier la réponse).

2. Montrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_2$.

3. Soit $K = \{M \in \mathfrak{M}_2 \quad / \quad A \times M = M \times A\}$.

   Montrer que K est un sous-espace vectoriel de $(\mathfrak{M}_2, +, \times)$.

4. Montrer que I et A appartiennent à $\ker f$.

5. Montrer que $\ker f$ est stable pour la multiplication des matrices, c'est-à-dire $A \in \ker f$ et $B \in \ker f \Rightarrow A \times B \in \ker f$ (la démonstration sera détaillée).

6. Montrer que $(\ker f, +, \times)$ est un anneau.

Partie B

On pose maintenant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathfrak{M}_2$.

1. Calculer $f(M)$.

2. (a) Montrer que $\ker f$ est le sous-espace vectoriel engendré par I et A.

   (b) Trouver une base de $\ker f$ et préciser la dimension de $\ker f$ ainsi que le rang de f.

3. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$.

4. Soit $N = x.I + y.A$ un élément de $\ker f$; déterminer N^n pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$.

5. Résoudre dans $\ker f$ l'équation : $N^2 = I$.

Partie C

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On désigne par s l'application de $\mathcal{P}$ vers lui-même qui au point m de coordonnées (x, y) fait correspondre le pont m' de coordonnées (x', y'), définies par :

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = y \end{cases}$$

1. Calculer $s \circ s$, puis reconnaitre s et préciser ses éléments propres.

2. Soit A le projeté orthogonal de m sur Oy;

   trouver l'équation $y = F(x)$ de l'ensemble des points m du plan vérifiant la relation :

   $$\overrightarrow{Am}.\overrightarrow{Om'} = 4$$

   Etudier la fonction trouvée, construire cet ensemble, avec ses asymptotes.

3. Soit Γ le cercle de centre O et de rayon 1 du plan $\mathcal{P}$.

   Déterminer une équation de son image $\Gamma' = s(\Gamma)$.

4. Soit $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ un nouveau repère orthonormé direct tel qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{I})$ soit le réel α.

   Ecrire les formules de changement de passag de $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ à $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$, c'est-à-dire exprimer les coordonnées (x, y) d'un point dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ en fonction des coordonnées (X, Y) de ce même point dans $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.

5. Trouver une équation de Γ' dans $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ en fonction de $\cos 2\alpha$ et de $\sin 2\alpha$.

6. On suppose maintenant $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$, donner une équation de Γ' dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$; en déduire la nature de la conique Γ' et préciser ses paramètres a et b. Tracer Γ' dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

   On pourra utiliser : $3 + 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} + 1\right)^2$; $\quad 3 - 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$ et $\sqrt{2} \simeq 1,4$