CONCOURS 2005

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques (toutes filières)

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

L'emploi d'une calculatrice est interdit.

PROBLÈME D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE

Les quatre parties A, B, C, D de ce problème sont totalement indépendantes entre elles.

Dans tout ce problème, on se place dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé direct

$\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note E l'ensemble des points de l'espace et E l'ensemble des vecteurs de l'espace. Les différentes coordonnées et équations qui apparaissent dans l'énoncé sont relatives au repère $\mathcal{R}$.

Si $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, on pourra aussi noter $\vec{X} = (x, y, z)$.

Si α, β et δ sont trois réels fixés et si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs fixés de E, on note f l'application linéaire de E dans E définie pour tout vecteur $\vec{X}$ de E par :

$$f(\vec{X}) = \alpha(\vec{X} \cdot \vec{u})\vec{v} + \beta\vec{X} + \delta\vec{X} \wedge \vec{w}$$

A - Etude de l'intersection de deux plans mobiles et d'un plan fixe

On note $\mathcal{D}'$ la droite passant par O dirigée par $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\mathcal{D}$ la droite d'équations $\begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$, Q le plan d'équation $y + z = 0$ et enfin, pour tout réel m, $\mathcal{P}_m$ est le plan d'équation $x + my - mz = 1$.

1. Donner un vecteur normal $\vec{n}_m$ de $\mathcal{P}_m$ ainsi qu'un point et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
   Vérifier que tous les plans $\mathcal{P}_m$ contiennent la droite $\mathcal{D}$.
2. Calculer $\vec{r}_m = \vec{n}_m \wedge \vec{a}$. En déduire que $\mathcal{D}'$ n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}_m$.

   On appelle alors R_m l'unique plan contenant $\mathcal{D}'$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$. Obtenir une équation cartésienne de R_m.
3. Déterminer, pour tout réel m, les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de I_m point d'intersection des plans $\mathcal{P}_m, Q$ et R_m.
4. On note (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x$ et Ω le point de Q de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$.
   Préciser la nature géométrique de (S) ainsi que les éléments géométriques qui le caractérisent.
5. Vérifier que I_m appartient à (S) puis que I_m appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.
6. Déterminer l'ensemble F des points M de $\mathcal{E}$ par lesquels passe un et un seul plan $\mathcal{P}_m$.

   Quelle est la réunion des plans $\mathcal{P}_m$ lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

B - Etude d'un exemple d'application f

Dans cette partie **B**, on prend $\vec{u}=\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\quad \vec{w}=\vec{j}+\vec{k}-5\vec{i}$, $\quad \alpha=3$, $\quad \beta=-3$ et $\delta=1$.

1. Vérifier que $f(x,y,z)=(4y+2z,d,e)$ où l'on exprimera d et e en fonction de x,y et z.

2. Déterminer une base et la dimension du noyau de f. f est-il un automorphisme de E ?

3. Enoncer complètement le théorème du rang. Obtenir le rang de f.

4. Montrer, dans le cas général, que si φ est une application linéaire définie sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel G où G est engendré par les vecteurs $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$, alors l'image de φ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\varphi(\vec{e}_1),\varphi(\vec{e}_2)$ et $\varphi(\vec{e}_3)$.

5. Déterminer une base de l'image de f.

6. Montrer que $\mathcal{B}'=\Big(f(f(\vec{i})),f(\vec{i}),\vec{i}\Big)$ est une base de E. Obtenir ensuite la matrice A' de f dans $\mathcal{B}'$.

7. Sachant que la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est l'une des deux matrices suivantes :
$$P_1=\begin{pmatrix}16&0&1\\-8&2&0\\16&4&0\end{pmatrix} \quad ; \quad P_2=\frac{1}{32}\begin{pmatrix}0&-2&1\\0&8&4\\32&32&-16\end{pmatrix}$$
préciser, en argumentant votre choix, laquelle est P.
Donner le lien matriciel reliant $A=mat_{\mathcal{B}}(f)$ à $A'=mat_{\mathcal{B}'}(f)$.

C - Etude d'un deuxième exemple

Dans cette partie **C**, on prend $\vec{u}=\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\alpha=-3,\beta=5$ et $\delta=0$.

On admet qu' alors $M=\begin{pmatrix}2&-3&-3\\-3&2&-3\\-3&-3&2\end{pmatrix}$ est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On rappelle que, par convention, $M^0=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$.

1. Prouver, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n, on peut trouver deux réels (qu'on notera a_n et b_n) tels que
$$M^n=\begin{pmatrix}a_n&b_n&b_n\\b_n&a_n&b_n\\b_n&b_n&a_n\end{pmatrix}$$
On obtiendra ainsi les relations définissant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

2. En utilisant les relations précédemment trouvées, vérifier que pour tout entier naturel n, $b_{n+2}-b_{n+1}-20b_n=0$.

3. En déduire la valeur de b_n puis celle de a_n en fonction de n.

4. Vérifier que M^2 est combinaison linéaire de M et de la matrice I_3.
En déduire que M est inversible et expliciter les coefficients de la matrice M^{-1}.

D - Etude d'un troisième cas

Dans cette partie **D**, on prend $\beta = \delta = 0$. On renomme alors g l'application f de l'introduction, soit :

$$\forall \vec{X} \in E, \quad g(\vec{X}) = \alpha(\vec{X} \cdot \vec{u})\vec{v}$$

où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls fixés de E et où α est un réel non nul.

1. Vérifier que si $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 1$ alors g est un projecteur.

   Démontrer ensuite que si g est un projecteur, alors $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 1$.

2. On suppose que $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 1$. On note $F_1 = \left\{\vec{X} \in E : | : \vec{u} \cdot \vec{X} = 0\right\}$ et $F_2 = \{\lambda\vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

   Vérifier que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E (l'écriture $\vec{x} = (\vec{x} - g(\vec{x})) + g(\vec{x})$ pourra être utile).

   Sur quel espace vectoriel parallèlement à quel autre g est-elle alors la projection ?

3. A l'aide des deux questions précédentes, trouver la matrice $\Pi_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de la projection p sur $P = \left\{\vec{X} = (x, y, z) \in E : | : x + y + z = 0\right\}$ parallèlement à la droite D engendré par $\vec{\jmath} + \vec{k} - 5\vec{\imath}$.

PROBLEME D'ANALYSE

A - Etude de la fonction f telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ sinon

1. Obtenir l'ensemble de définition D de f.
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1[$.
4. Dresser le tableau de variations de f. On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(e)$.

B - Etude de la suite v telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geqslant e$.
2. Justifier que la suite v converge et déterminer sa limite.
3. Montrer que $\forall x \geqslant e, \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
4. Enoncer l'inégalité des accroissements finis.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - e| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
6. Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

C - Etude de la fonction g telle que $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x\ln(x)}$

1. On admet que, sur $D\backslash\{0\}$, $g'(x) = \dfrac{1 + x^2}{x^2 \ln^2(x)} h(x)$ où $h(x) = \ln(x) + \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

   Etudier les variations de g.

2. Déterminer la limite de g en 1.

3. Déterminer la position relative de la courbe représentative de g par rapport à celle de f.

   Déterminer l'aire du domaine plan délimité par les courbes représentatives de f et de g ainsi que par les droites d'équation $x = 2$ et $x = e$.

D - Tracé d'une courbe paramétrée

On considère (Γ) la courbe donnée par le paramétrage $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$ pour t décrivant $D \backslash \{0\}$.

1. Déterminer les asymptotes de (Γ) ainsi que la position relative de (Γ) par rapport à celles-ci.

2. Tracer la courbe (Γ) en précisant la tangente au point de paramètre $t = \mathrm{e}$.

E - Solutions d'une équation différentielle

On note (E_1) l'équation différentielle $-x^2 z'(x) + xz(x) = z^2(x)$.

On recherche les fonctions z solutions de (E_1) sur $K =]1; +\infty[$ et qui ne s'annulent pas sur K.

1. On pose $y = \dfrac{1}{z}$. Vérifier que y est solution sur K d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2).

2. Résoudre (E_2) sur K. On vérifiera ensuite que ces solutions sont de la forme $g_a : x \mapsto \dfrac{\ln(ax)}{x}$.

   Vérifier que, pour $a > 1$, g_a ne s'annule pas sur K. On a donc ainsi $z(x) = \dfrac{x}{\ln(ax)}$.

3. Pour $a > 0$, on note (C_a) la courbe représentative de la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(ax)}$.

   Montrer que (C_a) est l'image de (C_1) par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

F - Etude d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale

On pose $H(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition J de H.

2. Etudier la limite de H en 0.

3. Justifier qu'il existe un réel a dans $]0; 1]$ tel que

$$\forall x \in [a; 1[, \quad \frac{3}{2}(x-1) \leqslant \ln(x) \leqslant \frac{1}{2}(x-1)$$

   En déduire la limite de H à gauche en 1.