CONCOURS 2004

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques (toutes filières)

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

L'emploi d'une calculatrice est interdit.

ANALYSE :

PREMIERE PARTIE :

Soit (E) l'équation différentielle : $(1 - x)^2 y' = (2 - x) y$.

On note I l'intervalle $] -\infty, 1[$.

1. Calculer une primitive A de la fonction a définie sur I par : $a(x) = \frac{2 - x}{(1 - x)^2}$.

2. Intégrer (E) sur I .

Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{1}{1 - x} e^{\frac{1}{1-x}}$.

3. Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.

DEUXIEME PARTIE :

1. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n , il existe un polynôme P_n tel que :

$$f^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}} \text{ pour tout réel } x \text{ appartenant à } I.$$

La démonstration permet d'exprimer $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P'_n(X)$ et X . Expliciter cette relation.

2. Préciser P_0, P_1, P_2 et P_3 .

3. En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E) , prouver que pour tout entier positif n :

$$P_{n+1}(X) = [(2n + 1)X + X^2] P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$$

TROISIEME PARTIE :

Le but de cette partie est d'établir quelques propriétés des nombres $a_n = f^{(n)}(0)$.

1. Pour tout entier positif n , exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1} .

2. (a) Préciser, sans nouveau calcul : a_0, a_1, a_2, a_3 . En déduire a_4 .

(b) Préciser le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4.

3. On désigne par (u_p) la suite définie pour tout entier naturel p par : $u_p = \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!}$.

En appliquant une formule de Taylor à la fonction exponentielle, prouver que la suite (u_p) converge vers e .
 p et n désignant des entiers naturels quelconques, on pose :

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^p \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$$

4. (a) Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ à l'aide de u_p et u_{p-1} pour $p \geq 1$.
 (b) Prouver que les suites $p \rightarrow S_p(0)$ et $p \rightarrow S_p(1)$ convergent et préciser leur limite en fonction de e .
5. Prouver que quels que soient les entiers p et n supérieurs ou égaux à 1 :

$$S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

6. En déduire que pour tout entier naturel n , la suite $p \rightarrow S_p(n)$ converge.

7. Prouver que : $a_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^p \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \lim_{p \rightarrow +\infty} n! \sum_{i=0}^p \binom{n+i}{n} \cdot \frac{1}{i!}$

ALGEBRE ET GEOMETRIE

PREMIERE PARTIE :

Soient I et J les matrices définies par : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\vec{E}$ désigne l'espace vectoriel usuel orienté muni d'une base orthonormée directe $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit : f l'endomorphisme de $\vec{E}$ défini par sa matrice J relativement à la base B et $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

- Calculer $f(\vec{u})$ et prouver que le plan Q d'équation $x + y + z = 0$ est stable par f (c'est-à-dire que l'image par f de tout vecteur de Q appartient à Q).
- On pose $\vec{v} = \vec{i} + \frac{1}{2}(-\vec{j} - \vec{k})$ et $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
 - Vérifier que $(\vec{v}, \vec{w})$ est une base du plan Q .
 - $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle une base orthonormée directe de $\vec{E}$?
 - Trouver un réel θ tel que : $f(\vec{v}) = \cos(\theta)\vec{v} + \sin(\theta)\vec{w}$ et $f(\vec{w}) = -\sin(\theta)\vec{v} + \cos(\theta)\vec{w}$.
 - Que pensez-vous de la nature géométrique de la restriction de f à Q ?

DEUXIEME PARTIE :

Pour tout vecteur $\vec{t} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, on note $[\vec{t}] = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice de $\vec{t}$ relativement à la base B .

On définit ainsi les matrices colonnes à coefficients complexes $X_1 = \sqrt{3}[\vec{u}]$, $X_2 = [\vec{v}] + i[\vec{w}]$ et $X_3 = [\vec{v}] - i[\vec{w}]$ et on désigne par P la matrice carrée d'ordre 3 : $P = [X_1 \ X_2 \ X_3]$.

- (a) Exprimer les coefficients non réels de P en fonction de j et j^2 . (On rappelle que j désigne le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$).

- (b) Soit $\bar{P}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P . Exprimer le produit $P\bar{P}$ en fonction de la matrice I .
2. (a) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer JX_i en fonction de X_i .
 (b) En déduire une matrice diagonale Δ telle que : $P\Delta = JP$.
3. (a) Prouver que l'ensemble $C(J) = \{M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C}) \mid MJ = JM\}$ des matrices M qui commutent avec J est le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ engendré par I, J et J^2 .
 (b) Donner une base et la dimension de $C(J)$.
4. a, b et c désignant des nombres complexes quelconques, on note : $M(a, b, c) = aI + bJ + cJ^2$.
- (a) Calculer la matrice $D(a, b, c) = P^{-1}M(a, b, c)P$, en utilisant le résultat de la question 4.b).
 (b) Calculer de façon indépendante les déterminants de $M(a, b, c)$ et $D(a, b, c)$.
 (c) En déduire que l'expression : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, est le produit de trois expressions de la forme $\alpha a + \beta b + \gamma c$ où α, β et γ représentent des nombres complexes à préciser.
 (d) On suppose que a, b, c sont distincts et on considère ces nombres comme les affixes respectives des sommets A, B, C d'un triangle (T) dans un plan complexe d'origine O .
 (e) Prouver que la matrice $M(a, b, c)$ est singulière (autrement dit : non inversible) si et seulement si (T) est équilatéral ou si O est son centre de gravité.

TROISIEME PARTIE :

On reprend les notations de la question précédente et on construit par récurrence une suite (T_n) de triangles de sommets A_n, B_n et C_n en posant :

- $(T_0) = (T)$.
- λ désignant un nombre réel, pour tout entier naturel n , (T_{n+1}) est le triangle dont les sommets $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}$ sont tels que :

A_{n+1} est le barycentre des points pondérés (B_n, λ) et $(C_n, 1 - \lambda)$

B_{n+1} est le barycentre des points pondérés (C_n, λ) et $(A_n, 1 - \lambda)$

C_{n+1} est le barycentre des points pondérés (A_n, λ) et $(B_n, 1 - \lambda)$

On note : a_n, b_n et c_n les affixes respectives des sommets A_n, B_n et C_n .

$$Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \text{ et } Z_n = P^{-1}Y_n$$

1. Prouver que pour tout entier n : $Z_{n+1} = D(0, \lambda, 1 - \lambda) \cdot Z_n$.
2. Expliciter les coefficients de la matrice $(D(0, \lambda, 1 - \lambda))^n$.
3. (a) On admet qu'une suite géométrique non nulle de raison complexe q converge si et seulement si $q = 1$ ou $|q| < 1$.
 Prouver que la suite définie pour tout entier n par $(\lambda j + (1 - \lambda)j^2)^n$ converge si et seulement si λ appartient à un intervalle à préciser.
 (b) Prouver que si cette condition est réalisée, les suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) convergent.
4. (a) Exprimer $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1}$ en fonction de $a_n + b_n + c_n$.
 (b) Prouver que les suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) ont même limite.
 (c) Exprimer cette limite en fonction de a, b et c .