CONCOURS COMMUN SUP 2003

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques (toutes filières)

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

$\boxed{\text{L'emploi d'une calculatrice est interdit.}}$

PROBLEME 1

Partie I

Notons $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{e^t}{1+t^2}$. Il est clair que f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et que cette fonction est de classe C^∞. Nous noterons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$?
2. Qu'en déduisez-vous au sujet de $\mathcal{C}_f$?
3. Complétez chacune des phrases suivantes au moyen de l'une des locutions « est équivalent à », « est négligeable devant », « est dominé par »

   $f(t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ e^t$ lorsque t tend vers $+\infty$

   $f(t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ \dfrac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$

   $f(t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ \dfrac{e^t}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$

   Lorsque plusieurs réponses sont acceptables, vous donnerez la plus précise. Bien entendu, vous justifierez votre réponse.
4. Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?
5. Expliciter $f'(t)$.
6. Dressez le tableau des variations de f.
7. Expliciter $f''(t)$.
8. Montrer que l'équation $f''(t) = 0$ possède deux solutions réelles : l'une est évidente, l'autre sera notée α. Vous ne chercherez pas à calculer α.
9. Expliciter le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

   Que pouvez-vous en déduire concernant $\mathcal{C}_f$?
10. Tracez la courbe représentative de f. Vous préciserez son allure a voisinage du point d'abscisse .

Partie II

Au vu des expressions de $f(t)$, $f'(t)$ et $f''(t)$, nous nous proposons d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\text{Il existe un polynôme } P_n \text{ tel que } f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{n+1}}.}$$

Vous allez raisonnez par récurrence sur n.

1. Il est clair que $\mathcal{A}(\backslash)$ est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$;

   Vous dresserez simplement un tableau donnant l'expression de P_n pour ces valeurs de n.

2. Fixons $n \in \mathbb{N}$, et supposons l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise. Etablissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$;

   Vous déterminerez l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.

   Il résulte donc des questions **II.1 et II.2** que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que P_n a tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.

4. Précisez le degré et le coefficient dominant de P_n.

5. Donner une expression simple de $c_n = P_n(i)$, où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Partie III

Notons $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Ainsi F est la primitive de f qui s'annule en 0.

1. Quel est le sens de variation de F ?

2. Montrer que $F(x)$ possède une limite ℓ finie lorsque x tend vers $-\infty$. Vous ne chercherez pas à expliciter cette limite.

3. Prouver l'encadrement $-1 \leqslant \ell \leqslant 0$.

4. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de F, au point d'abscisse 0.

   Nous nous proposons d'étudier le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   Nous noterons $J(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{te^t}{(1+t^2)^2}dt$, $K(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^3}dt$ et $L(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^4}dt$.

5. Prouver l'existence d'une constante A *telle* que $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$ pour tout réel x.

6. Pour $x \geqslant 1$, placer les uns par rapport aux autres les réels 0, $J(x)$ et $K(x)$.

7. Avec une intégration par partie soigneusement justifiée, montrer que $K(x) - 3L(x)$ est négligeable devant $\dfrac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

8. En découpant l'intervalle $[1?x]$ sous la forme $[1, x^{3/4}] \cup [x^{3/4}, x]$, montrer que $L(x)$ est négligeable devant $\dfrac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

9. En déduire un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

10. Exploiter les résultats des questions **III.1**, **III.3**, **III.4 et III.9** pour donner l'allure de la courbe représentative de F.

PROBLEME 2

Partie I

Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ et $D : f \in E \mapsto f'$. Il est clair que D est un endomorphisme de E.

1. Déterminer le noyau et l'image de D.

   Soient $f_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t$, $f_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \sin\left(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ et $f_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \cos\left(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right)$.

   Nous noterons $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et G le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{B}$.

   Nous allons montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre de vecteurs de E.

   Soient a, b et c des réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ soit la fonction nulle.

2. L'étudiant Antoinette observe que $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ pour tout réel t. Elle choisit (adroitement) trois valeurs de t, obtient un système de trois équations à trois inconnues a, b et c, qu'elle résout; ik ne lui reste plus qu'à conclure.

   Faites comme elle !

3. L'étudiante Lucie propose d'exploiter le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0.

   Faites comme elle !

4. L'étudiante Nicole décide de s'intéresser au comportement de $af_1(t)+bf_2(t)+cf_3(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

   Faites comme elle !

   La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de G, et ce sous-espace est de dimension 3.

5. Montrer que G est stable par D.

   Nous noterons $\widehat{D}$ l'endomorphisme de G induit par D.

6. Déterminer la matrice M de $\widehat{D}$ dans la base $\mathcal{B}$.

7. Calculer M^2.

8. Montrer que M est inversible, et, explicitez son inverse M^{-1}.

9. Montrer que $\widehat{D}$ est un automorphisme de G.

10. Exprimer $(\widehat{D})^{-1}$ en fonction de $\widehat{D}$.

Partie II

Soient g et h deux éléments de G. Définissions $\varphi(g, h) = g(0)h(0) + g'(0)h'(0) + g''(0)h''(0)$.

1. Donner un tableau à trois lignes et quatre colonnes; pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, la i-ième ligne présentera les valeurs de i, $f_i(0)$, $f_i'(0)$ et $f_i''(0)$ dans cet ordre.Vous ne ferez pas apparaitre le détail des calculs sur votre copie.

2. Montrer que φ est un produit scalaire sur G.

3. La base $\mathcal{B}$ est-elle orthogonale ?

4. La base $\mathcal{B}$ est-elle orthonormée ?

Partie III

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation différentielle $y''' = y$, que nous noterons $(\mathcal{E})$. Une solutions sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{E})$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f'''(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que toute solution f de $(\mathcal{E})$ est C^∞.
2. Montrer que la fonction nulle est la seule solution polynomiale de $(\mathcal{E})$.

   Notons $T = D^3 - \mathrm{Id}$, où Id est l'identité de E, et $D^3 = D \circ D \circ D$.

   Le noyau de T est donc l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$
3. Montrer que G est contenu dans le noyau de D.

   Nous allons établir l'inclusion inverse; ainsi, G sera exactement l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

   Soit f une solution de $(\mathcal{E})$; nous noterons $g = f'' + f' + f$.
4. Montrer que g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.
5. Décrivez rapidement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$.
6. Résolvez l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$; vous donnerez une base de l'ensemble des solutions.
7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Décrivez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$.
8. Et maintenant, concluez !