CONCOURS 2002

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve spécifique de Mathématiques (filière MPSI)

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

PROBLEME I : Exemples de matrices semblables à leur inverse

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u$ (n fois).

On note $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice unité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on dira que la matrice A est **semblable** à la matrice B s'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$. On rappelle que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, si u est un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}'$ et de matrice B dans la base $\mathcal{B}$ alors $A = P^{-1}BP$ (c'est-à-dire, la matrice A est semblable à la matrice B).

Partie A

1. On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B.

   Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

   On pourra désormais dire que les matrices A et B **sont** semblables.

2. Démontrer que deux matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de déterminants différents ne sont pas semblables.

3. Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.
   On considère l'application w de $\ker u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.

   (a) Montrer que $\operatorname{Im} w \subset \ker u^i$.

   (b) En déduire que $\dim(\ker u^{i+j}) \leqslant \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j)$.

4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\operatorname{rg} u = 2$.

   (a) Montrer que $\dim(\ker u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question **3b**.).

   (b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.

   (c) Ecrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

5. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\operatorname{rg} u = 1$.

   (a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.

   (b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E.

   (c) Ecrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}.

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

1. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.

2. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

3. On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

4. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

   (a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire, en utilisant la question **A.4.**, une matrice semblable à la matrice M.

   (b) Calculer M^3 et déterminer $\mathrm{rg}(M)$.

   (c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.

   (d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

5. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
   Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

6. **Exemple** : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

   (a) Montrer que $\ker(u - id_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2).

   (b) Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E, et écrire la matrice de u dans cette base.

   (c) Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

7. Réciproquement, toute matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

PROBLEME II : Calculer et irrationalité de $\zeta(2) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$

Dans ce problème, pour une fonction f et un entier naturel k, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de la fonction f avec : $f^{(0)} = f$.
Remarque : sauf s'il est précisé entier naturel, un entier peut être positif ou négatif.

Partie A : Convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}\right)_{n\geqslant 1}$

Dans cette partie, p et n sont deux entiers naturels non nuls et on pose $S_n(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, $\frac{1}{(k+1)^p} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\,dx \leqslant \frac{1}{k^p}$.

2. Montrer que pour $n \geqslant 2$, $S_n(p) - 1 \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx \leqslant S_{n-1}(p)$.

3. Démontrer, par un calcul d'intégrales, que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^p}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $p \geqslant 2$.

4. Montrer que la suite $(S_n(p))_{n\geqslant 1}$ converge si et seulement si $p \geqslant 2$.

   On note alors $\zeta(p) = \lim_{n\to+\infty} S_n(p)$.

Partie B : Calcul de $\zeta(2)$

Dans cette partie on pose, pour t réel : $h(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$, et on définit la fonction φ sur $[0, \pi]$ par :

$$\varphi(0) = -1 \text{ et } \varphi(t) = \frac{h(t)}{2\sin\frac{t}{2}} \text{ pour } t \in]0, \pi].$$

1. Montrer que la fonction φ est de classe C^1 sur l'intervalle $[0, \pi]$.

2. Calculer, pour tout k entier naturel non nul, $\int_0^{\pi} h(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t$.

3. Calculer, pour $t \in]0, \pi]$, $\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$, puis déterminer une constante λ telle que,

$$\forall t \in]0, \pi], \quad \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\,t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} - \lambda.$$

4. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour toute fonction ψ de classe C^1 sur l'intervalle $[0, \pi]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \psi(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})\,t\right) dt = 0.$$

5. Montrer que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie C : $\zeta(2)$ est irrationnel

Dans cette partie, pour n entier naturel non nul et x réel, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n\,(1-x)^n}{n\,!}$.

1. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.

   (a) Montrer qu'il existe $n+1$ entiers $e_n, e_{n+1}, ..., e_{2n}$ tels que $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} e_i\,x^i$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel k, $f_n^{(k)}(0)$ et $f_n^{(k)}(1)$ sont des entiers.
   (On pourra remarquer que $f_n(x) = f_n(1-x)$).

On veut montrer que π^2 est un irrationnel, et on va raisonner par l'absurde : on suppose que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers naturels non nuls.

2. On pose, pour n entier naturel non nul et x réel :

$$F_n(x) = b^n(\pi^{2n}\,f_n(x) - \pi^{2n-2}\,f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4}\,f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n\,f_n^{(2n)}(x)).$$

   (a) Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

   (b) On pose, pour n entier naturel non nul et x réel :

$$g_n(x) = F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi\,F_n(x)\cos(\pi x), \quad \text{et} \quad A_n = \pi\int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

   Montrer que, pour n entier naturel non nul et x réel : $g_n'(x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x)$, et montrer que A_n est un entier.

3. On pose, toujours pour le même entier a, $u_n = \dfrac{a^n}{n\,!}$.

   (a) En considérant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   (b) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\dfrac{a^n}{n\,!} < \dfrac{1}{2}$.

   (c) Montrer que pour tout réel $x \in [0,1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n\,!}$.

   (d) Montrer alors que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $A_n \in]0,1[$, et conclure que π^2 est irrationnel.

   (e) Comment peut-on déduire de ce qui vient d'être fait que π est irrationnel ?

Pour information

Il a été prouvé depuis le 18-ième siècle, que $\zeta(p)$ est irrationnel pour tout entier pair $p \geqslant 2$, récemment (1979) il vient d'être découvert que $\zeta(3)$ est irrationnel et le mystère demeure encore quant à l'irrationnalité des $\zeta(p)$ pour les entiers impairs $p \geqslant 3$ ...