CONCOURS 2001

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve spécifique de Mathématiques (filière MPSI)

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

PROBLEME 1

Dans tout ce problème, a désigne un réel.
On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où P est un polynôme.
Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u.

La partie I étudie le cas où P est constant.
La partie II étudie le cas où $a \neq 1$.
La partie III étudie le cas où $a = 1$.

Partie I

Dans cette partie, on pose $E_a^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\quad \exists b \in \mathbb{R};\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = au_n + b\}$.

1. Soit $u \in E_a^{(0)}$. Il existe donc b réel tel que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = au_n + b$.
   Montrer l'unicité de b. On notera $b = b_u$ pour $u \in E_a^{(0)}$.

2. (a) Déterminer $E_1^{(0)}$.
   (b) Déterminer $E_0^{(0)}$.

   Dans le reste de cette partie, a est supposé différent de 1.

3. Montrer que $E_a^{(0)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4. Soit x la suite constante égale à 1 (pour tout n de $\mathbb{N}$, $x_n = 1$) et soit y la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $y_n = a^n$.
   Montrer que (x, y) est une famille libre de $E_a^{(0)}$. On précisera les valeurs de b_x et b_y.

5. Soit $u \in E_a^{(0)}$.

   (a) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que

   $$\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$$

   (b) Montrer que, pour λ et μ définis à la question précédente, pour tout n de $\mathbb{N}$,

   $$u_n = \lambda x_n + \mu y_n$$

   (c) Que peut-on en conclure ?

6. Déterminer $E_a^{(0)}$. On donnera en particulier la dimension de $E_a^{(0)}$.

Partie II

Dans cette partie, on suppose que $a \neq 1$.
On fixe un entier naturel p. On note $\mathbb{R}_p[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale.
On pose $E_a^{(p)} = \big\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\quad \exists P \in \mathbb{R}_p[X];\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)\big\}$.

1. Soit $u \in E_a^{(p)}$. Il existe donc $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

   Montrer l'unicité de P (on pourra étudier l'application φ de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$ définie par : $\varphi(P) = (P(0), P(1), ..., P(p))$).
   On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.

2. Montrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. Montrer que l'application θ définie sur $E_a^{(p)}$ par $\theta(u) = P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.

4. Déterminer $\ker\theta$ (noyau de θ).

5. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.
   (a) Quel est le degré de Q_k ?
   (b) Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, ..., Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

6. (a) Montrer que pour tout k dans $\{0, 1, ..., p\}$, Q_k est dans l'image de θ, notée $\operatorname{Im}\theta$.
   (b) Que peut-on en conclure ?

7. Déduire des questions précédentes la dimension de $E_a^{(p)}$.

8. Pour $k \in \{0, 1, ..., p\}$, on pose $x^{(k)}$ la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $x_n^{(k)} = n^k$.
   On rappelle que y est la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $y_n = a^n$.
   Montrer que $(x^{(0)}, ..., x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.

9. *Application :* déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$

Partie III

Dans cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. En adaptant les résultats obtenus à la partie précédente, déterminer :

$$E_1^{(p)} = \Big\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\quad \exists P \in \mathbb{R}_p[X];\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = u_n + P(n)\Big\}$$

2. *Application :* déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = u_n - 6n + 1 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$

PROBLEME 2

Dans ce problème φ désigne une fonction continue strictement positive sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.
On suppose par ailleurs que φ possède une limite ℓ (finie ou infinie) en $+\infty$.

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f où $f(x)$ est défini, pour x réel, comme étant l'unique solution de l'équation (E_x) d'inconnue y :

$$(E_x) \qquad \int_x^y \varphi(t)\,dt = 1$$

La partie I est consacrée à un exemple où l'on détermine explicitement f.
La partie II permet d'aboutir à l'existence de f si $\ell \neq 0$.
La partie III étudie des propriétés de la fonction f.
La partie IV illustre les parties II et III sans calcul explicite de f.

Partie I

Dans cette partie, la fonction φ est la fonction exponentielle exp.

1. Prouver que pour tout x réel l'équation (E_x) possède une unique solution notée $f(x)$.
   On montrera que $f(x) = \ln(1 + e^x)$.
2. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude.
3. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentant f. Préciser la position de celle-ci par rapport à l'asymptote.
4. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 pour la fonction f au voisinage de 0.
   En déduire l'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}$ et la position locale de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à celle-ci.
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé, en utilisant les résultats des questions précédentes.

Partie II

Pour x réel, on pose $\Phi_x(u) = \displaystyle\int_x^u \varphi(t)\,dt$.

On rappelle que Φ_x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour u réel, $\Phi_x'(u) = \varphi(u)$.

1. Dans cetet question seulement, φ est définie, pour tout t réel, par : $\varphi(t) = \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$.
   (a) Montrer que pour x et y réels, $\displaystyle\int_x^y \varphi(t)\,dt < 1$.
   (b) En déduire que pour tout x réel, l'équation (E_x) n'a pas de solution.
   (c) Que vaut ℓ ? *Dans tout le reste de ce problème, on suppose que $\ell \neq 0$.*
2. Exprimer l'équation (E_x) à l'aide de la fonction Φ_x.
3. (a) Montrer que Φ_x est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en conclure ?
   (b) Montrer qu'il existe t_0 réel et $A > 0$ tels que pour tout $t \geqslant t_0$, $\varphi(t) \geqslant A$.
   On pourra distinguer les cas $\ell = +\infty$ et ℓ réel.
   (c) En déduire que pour tout x réel, il existe $u \geqslant x$ tel que $\Phi_x(u) > 1$.
   (d) En remarquant que $\Phi_x(x) = 0$, montrer que l'équation (E_x) possède une solution unique.
   Jusqu'à la fin de ce problème, $f(x)$ désigne pour x réel, l'unique solution de l'équation (E_x).

Partie III

1. Montrer, en justifiant l'écriture, que pour tout x réel, $f(x) = \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1)$ (on pourra admettre les résultats de la question **II.3**).

2. En déduire que f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. (a) On suppose dans cette question **a)**, que φ ne s'annule pas. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour x réel, montrer que :
$$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}.$$
   (b) On suppose dans cette question **b)**, qu'il existe x_0 réel tel que $\varphi(x_0) \neq 0$ et tel que φ reste strictement positive sur un voisinage de $f(x_0)$ sauf en $f(x_0)$ où φ s'annule.
   Montrer que f n'est pas dérivable en x_0 mais que la courbe représentant f possède au point d'abscisse x_0 une tangente verticale.

4. On se propose d'étudier la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell = +\infty$.
   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times$.
   (a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \geqslant a$, $\varphi(t) \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.
   (b) En déduire que si $x \geqslant a$, $|f(x) - x| \leqslant \varepsilon$. Que peut-on en conclure ?

5. Etudier de même la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}_+^\times$.

6. Dans cette question, on suppose φ paire. On note Γ le graphe de f.
   (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(x, y) \in \Gamma$ si et seulement si $(-y, -x) \in \Gamma$.
   (b) En déduire que la courbe représentant f possède un axe de symétrie à déterminer.

Partie IV

Dans cette partie, φ est la fonction définie, pour tout x réel, par $\varphi(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

1. Justifier que φ vérifie les hypothèses du problème.

2. Sans calculer $f(x)$ et en utilisant les résultats des parties précédentes, esquisser le graphe de la fonction f, en précisant les éléments remarquables (asymptotes, axe de symétrie, points à tangentes horizontales ou verticales).