

CONCOURS 2000

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve spécifique de Mathématiques (filiale MPSI)

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

PROBLEME D'ANALYSE

□ $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est la \mathbb{R} -algèbre des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

□ L'objectif du problème est d'étudier les ensembles \mathcal{E} et \mathcal{F} suivants :

$$\mathcal{E} = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)\}.$$

\mathcal{F} est la partie constituée des éléments f de \mathcal{E} tels que :

- f n'est pas la fonction identiquement nulle.
- f s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} .

Partie I

1. Montrer que la fonction cosinus est dans l'ensemble \mathcal{E} .
2. On note ch la fonction cosinus hyperbolique et sh la fonction sinus hyperbolique.
Démontrer la formule : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ch}(x+y) = \text{ch } x \text{ch } y + \text{sh } x \text{sh } y$.
En déduire que la fonction ch est dans l'ensemble \mathcal{E} .
3. Soit f dans \mathcal{E} ; montrer que pour tout réel α , la fonction f_α de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $x \mapsto f_\alpha(x) = f(\alpha x)$ est dans \mathcal{E} .
4. On fixe un élément f de \mathcal{E} .
En donnant à x et à y des valeurs particulières, prouver que :
 - (a) $f(0)$ vaut 0 ou 1.
 - (b) Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle.
 - (c) Si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.

Partie II

On fixe ici un élément f de \mathcal{E} tel que $f(0) = 1$.

1. Montrer que pour chaque réel $r > 0$, on a :

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \int_0^r f(x+y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du.$$

$$(b) \quad \forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) \int_0^r f(y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du + \int_{x-r}^x f(v)dv.$$

2. Montrer que l'on peut choisir $r > 0$ de façon à rendre strictement positive la constante $\int_0^r f(y)dy$.

Dans la suite de ce 2., on fixe un réel $r > 0$ qui vérifie : $\int_0^r f(y)dy > 0$.

- (a) En déduire que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
 (b) Montrer alors que f est en fait de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
 (c) Prouver l'existence d'une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad c f'(x) = f(x+r) - f(x-r).$$

3. En déduire l'existence d'une constante réelle λ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \lambda f(x).$$

Conclusion

4. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' = \mu y$, en séparant les cas : $\mu > 0$, $\mu < 0$ et $\mu = 0$.
 5. En déduire tous les éléments de \mathcal{E} en exploitant le I.4.c.
 6. Donner tous les éléments de \mathcal{F} .

Partie III

On se propose d'étudier l'ensemble \mathcal{F} par une méthode différente.

On pourra utiliser librement le résultat suivant :

Si a est un élément fixé de \mathbb{R}_+^\times et si $D_a = \left\{ a \frac{p}{2^q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$,

tout réel est limite d'une suite d'éléments de D_a .

Soit f un élément de \mathcal{F} . On pose $E = \{x > 0 \mid f(x) = 0\}$.

1. Montrer que $f(0) = 1$, et que f s'annule au moins une fois sur \mathbb{R}_+^\times .
 2. Montrer que E admet une borne inférieure que l'on note a .
 3. Prouver que $f(a) = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde). En déduire que : $a > 0$.
 4. Montrer que : $\forall x \in [0, a[$, $f(x) > 0$.

On pose $\omega = \frac{\pi}{2a}$, et on note g la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} : $x \mapsto \cos(\omega x)$.

5. (a) Soit $q \in \mathbb{N}$; montrer que $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2 \left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) \right]^2$.
 (b) En déduire, en raisonnant par récurrence sur q , que :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right).$$

On démontrerait de même le résultat suivant que le candidat pourra utiliser librement :

$$\text{si } q \in \mathbb{N} \text{ est fixé : } \forall p \in \mathbb{N}, \quad f\left(p \frac{a}{2^q}\right) = g\left(p \frac{a}{2^q}\right).$$

6. Prouver que : $\forall x \in D_a$, $f(x) = g(x)$.
 7. En déduire que $f = g$.

En déduire tous les éléments de \mathcal{F} .

PROBLEME D'ALGEBRE

Notations et objectifs :

□ Soit n un entier, $n \geq 2$; on note $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la \mathbb{R} -algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ la \mathbb{R} algèbre des formes linéaires sur E .

On rappelle que : $\dim(E) = \dim(E^*)$.

Les éléments de E sont notés $M = (m_{ij})$, la matrice élémentaire E_{ij} est la matrice de E dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la i -ème ligne et sur la j -ème colonne, qui vaut 1.

Lorsque A et B sont des éléments de E , on note $A.B$ leur produit.

Si $M \in E$, on note $\text{Vect}(M)$ le sous-espace vectoriel engendré par M

□ L'objectif du problème est de montrer que chaque hyperplan vectoriel de E possède au moins une matrice inversible.

□ Si $M = (m_{ij}) \in E$, on note $T(M)$ le réel $\sum_{k=1}^n m_{kk}$.

On définit ainsi une application T de E vers \mathbb{R} : $M \mapsto T(M)$.

A chaque matrice U de E , on associe :

- L'application T_U de E vers \mathbb{R} : $M \mapsto T_U(M) = T(U.M)$.
- L'ensemble $H_U = \{M \in E \mid T(U.M) = 0\}$.

Partie I : Généralités, exemples.

1. Quelques propriétés.

(a) Montrer que T est une application linéaire.

(b) Pour $U \in E$, prouver que l'application T_U est dans E^* .

(c) Soit $U \in E$; reconnaître $\ker T_U$, et montrer que H_U est un sous-espace vectoriel de E .

2. Dans cette question seulement, on prend $n = 2$, et on pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Ecrire les quatre matrices élémentaires E_{ij} ; que peut-on dire de la famille $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $E = \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$?

(b) Montrer que H_U est l'ensemble des matrices de E dont la somme des quatre coefficients vaut 0.

(c) Trouver une matrice M de E telle que $T(U.M) \neq 0$, et en déduire la dimension de $\text{Im } T_U$ puis la dimension de H_U .

(d) Montrer que H_U possède une matrice inversible.

La partie III propose une généralisation de ce résultat.

Partie II : Quelques résultats utiles pour la suite

1. Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ des éléments de E .

(a) Montrer que $T(A.B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} b_{ij}$.

(b) En déduire les identités suivantes :

$$(I_1) \quad T({}^t A.B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} b_{ij}$$

$$(I_2) \quad T(B.A) = T(A.B)$$

2. Soit U dans E .
 - (a) Si U est la matrice nulle, déterminer $\dim H_U$.
 - (b) Si U n'est pas la matrice nulle, montrer que l'on peut trouver un couple d'entiers (i_0, j_0) tel que $T_U(E_{i_0 j_0}) \neq 0$.
En déduire $\dim H_U$.
3. Pour $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, on note $T_{ij} = T_{E_{ji}}$.
 - (a) Les indices k et l étant fixés, calculer $T_{ij}(E_{kl})$ en utilisant (I_1) .
 - (b) En déduire que les n^2 éléments T_{ij} de E^* permettent de définir une base de E^* .
4. Montrer que l'application φ de E vers $E^* : U \mapsto \varphi(U) = T_U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
5. On considère un hyperplan vectoriel H de E .
 - (a) Quelle est sa dimension ?
 - (b) Soit A une matrice non nulle de E qui n'appartient pas à H , montrer que : $E = H \oplus \text{Vect}(A)$.
 - (c) Construire alors un élément l de E^* tel que $H = \ker l$.
 - (d) Prouver l'existence d'un élément U de E tel que $H = H_U$.

Partie III : Le résultat général

Pour $1 \leq r \leq n$, on note $R_r = \sum_{i=1}^r E_{ii}$.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $P = (p_{ij})$ avec

$$\begin{cases} p_{i+1 i} = 1 & 1 \leq i \leq n-1 \\ p_{1 n} = 1 \\ p_{ij} = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- (a) Montrer que P est inversible.
 - (b) Prouver que P appartient à l'hyperplan H_{R_r} .
2. En déduire que chaque hyperplan vectoriel H de E possède au moins une matrice inversible.
Indication : lorsque $H = H_U$, avec U de rang r , on rappelle l'existence de matrices S_1 et S_2 inversibles telles que $S_1 \cdot U \cdot S_2 = R_r$.