CONCOURS 2000

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques (toutes filières)

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Analyse

Partie I : Etude de la fonction réciproque de la fonction tanh.

On notera respectivement cosh, sinh et tanh les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer, en étudiant ses variations, que tanh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser. On note artanh « argument tangente hyperbolique » sa réciproque.
2. Exprimer la dérivée de tanh en fonction de tanh.
3. Démontrer que artanh est impaire.
4. Démontrer que artanh est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. Exprimer artanh à l'aide de fonctions usuelles.
6. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 de artanh en 0.

Partie II : Etude d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle (E) : $x\,y' + 3\,y = \dfrac{1}{1-x^2}$.

7 Résoudre (E) sur l'intervalle $J =]0,1[$.

Partie III : Etude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :
déterminer les fonctions f <u>définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en 0</u> qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$$

8 Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.

9 Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.

10 Montrer que, si f est solution, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. (on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.)

11 Montrer que si f est solution, $-f$ est aussi solution.

13 Montrer que tanh est solution du problème posé.

Dans les questions **13.** à **17.**, on suppose que f **est une solution du problème posé, que** $f(0) = 1$ **et que** f **n'est pas constante.**

On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.

14 Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

15 Etablir une relation entre u_n et u_{n+1} ; en déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0.

16 En utilisant les résultats des questions **13.** et **14.**, aboutir à une contradiction.

17 Que peut-on dire si l'hypothèse « $f(0) = 1$ » est remplacée par l'hypothèse « $f(0) = -1$ » ?

18 Conclusion ?

Dans les questions **18.** à **22.**, on suppose que f **est une solution du problème posé et que** $f(0) = 0$.

19 En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que celle des questions **13.** à **17.**, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq -1 \quad \text{et} \quad f(x) \neq -1.$$

On définit alors la fonction g par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \operatorname{artanh}(f(x))$.

20 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(2x) = 2\,g(x)$.

21 Montrer que g est dérivable en zéro.

22 Soit $x \in \mathbb{R}^{\times}$; on définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\dfrac{x}{2^n}}$.

Montrer que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

23 En déduire que g est linéaire.

24 Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.

Algèbre

Les parties I, II et III sont, dans une large mesure, indépendantes.
Soit n un entier naturel non nul.

Partie I

On pose : $A = (X+1)^{2n} - 1$, polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que l'on peut écrire $A = X \times B$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté b_0.

2. Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0 = 0$ et les autres racines $z_1, z_2, ..., z_{2n-1}$ seront mises sous forme trigonométrique.

   On pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

3. Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n = \displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

   En déduire que, si $Q_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.

4. Calculer de deux façons : $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. Puis, en déduire Q_n et enfin, P_n.

5. On pose $F = \dfrac{1}{A}$. Déterminer la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

Partie II :

On travaille dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E supposé non réduit au vecteur nul. $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E, I_E est l'application identité de E et θ désigne l'application nulle. Par convention : $\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad f^0 = I_E$.
On étudie sur quelques cas particuliers, l'équation : $(f + I_E)^{2n} - I_E = \theta$ où $f \in \mathcal{L}(E)$ est l'inconnue.

6 Déterminer les homothéties vectorielles qui sont solutions de l'équation proposée.

7 En développant $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$ déterminer les sommes $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ et $S' = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$
(la notation $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial : $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.)

8 Si s est une symétrie de E, exprimer $(s + I_E)^{2n} - I_E$ en fonction de s et I_E.
En déduire les symétries de E solutions de l'équation proposée.

Partie III :

On travaille dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$.
I désigne la matrice identité et O la matrice nulle.

On pose $G = \left\{ M_{a,b} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C}) \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ où $M_{a,b}$ désigne la matrice $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

9 Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ dont on précisera la dimension et une base ; vérifier que G est stable pour le produit matriciel.

On cherche à résoudre l'équation matricielle $(*) \quad (M + I)^{2n} - I = O$, avec M, matrice inconnue, dans G.

On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.

Soient $M = M_{a,b}$ un élément de G tel que $b \neq 0$, u l'endomorphisme de E canoniquement associé à M et I_E, l'application identité de E.

10 Déterminer une base (e'_1) de $E_1 = \ker(u - (a+2b).I_E)$.

11 Déterminer une base (e'_2, e'_3) de $E_2 = \ker(u - (a-b).I_E)$.

12 Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E ; on la note $\mathcal{B}'$.

13 Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$.

14 On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Ecrire P et déterminer P^{-1} en précisant la méthode utilisée et en détaillant les calculs.

15 Exprimer M en fonction de P, D et P^{-1}.

16 Montrer que : M est solution de l'équation $(*)$ si et seulement si D est solution de l'équation $(*)$.

17 Déterminer toutes les matrices D solutions de l'équation $(*)$.

18 En déduire toutes les solutions de l'équation $(*)$ dans G.