CONCOURS 1999

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve spécifique de Mathématiques (filière MPSI))

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

PREMIER PROBLEME

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Si P est un polynôme on notera P' son polynôme dérivé.

Si P est un polynôme on notera également P sa fonction polynôme associée.

I. Etudes d'endomorphismes donnés par leur matrice

1. Soit u et v deux réels. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant pour matrice sur la base canonique $(1, X, X^2)$ la matrice A suivante :
$$A = \begin{pmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{pmatrix}$$
   (a) Calculer le déterminant de f en justifiant votre réponse.

   (b) Déterminer une base du noyau de f.

   (c) Déterminer une base de l'image de f.

2. Soit w un réel. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ ayant pour matrice sur la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ la matrice B suivante :
$$B = \begin{pmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
   (a) Calculer le déterminant de g en justifiant votre réponse.

   On notera w_0 la valeur qui annule ce déterminant.

   (b) Déterminer lorsque $w = w_0$ une base du noyau de g.

II. Définition d'une application linéaire, exemples et propriétés

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, Q un polynôme de degré 2 et φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\varphi(P) = 2P'Q - nPQ'.$$

A - Etude de cas particuliers

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit u et v deux réels. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que : $Q = X^2 + uX + v$.
   (a) Déterminer la matrice de φ sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer le noyau de φ en fonction de Q.
3. Soit w un réel. On suppose dans cette question que $n = 3$ et que : $Q = X^2 + 2X + w$.
   (a) Déterminer la matrice de φ sur la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Déterminer suivant les valeurs de w le noyau de φ.

B - Etude du cas général

1. On suppose que Q n'admet pas de racine double.
   (a) Que peut-on dire du pgcd de Q et de Q' ?
   (b) Déduire de la question précédente que si P est un polynôme non nul appartenant au noyau de φ alors Q divise P.
   (c) Montrer que si P est un polynôme non nul appartenant au noyau de φ, il existe un entier k non nul et un polynôme R non nul, tels que $P = RQ^k$ et tels que Q ne divise par R.
   (d) Déduire de la question précédente que si le noyau de φ n'est pas réduit au polynôme nul alors n est pair.
   (e) Déterminer suivant les valeurs de n le noyau de φ.
2. On suppose que Q possède une racine double α.
   (a) Montrer que si P est un polynôme non nul appartenant au noyau de φ alors α est racine de P.
   (b) Donner le noyau de φ.
   (On pourra utiliser l'ordre de multiplicité de la racine α).
3. Dans cette question, on supposera n **impair**.
   Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{R}_n[X]$ unique tel que :
   $$P = (X^2 + 1)R' - nXR.$$
   Justifier que l'application : $\psi : P \mapsto R$ ainsi définie est linéaire.

DEUXIEME PROBLEME

I.

Soit la fonction φ définie par : $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de φ.
2. Montrer que φ est dérivable sur son ensemble de définition et déterminer sa dérivée.
3. Etudier le signe de $\varphi'(x)$.
4. Déterminer les limites de φ aux bornes de son ensemble de définition.
5. Montrer que φ peut être prolongée par continuité en 0 en une fonction que l'on notera également φ.
   Montrer que cette fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.
6. Déterminer le tableau de variation de φ et tracer sa courbe représentative.

II.

Soit f une fonction définie continue et **positive** sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soit la fonction g définie par : $g(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1 + x\sin t} dt$.

1. Montrer que g est définie sur $]-1, +\infty[$.
2. On suppose dans cette question que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(t) = \cos t$.

   Calculer $g(x)$.
3. On suppose dans cette question que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(t) = \sin(2t)$.

   Calculer $g(x)$.
4. Soit a un réel supérieur strictement à -1.

   Montrer qu'on peut trouver un réel K tel que :

   $$\forall\, (x, y) \in \left]a, +\infty\right[^2, \qquad |g(x) - g(y)| \leqslant K\,|x - y|\,.$$

   En déduire que la fonction g est continue sur $]-1, +\infty[$.
5. Montrer, sans utiliser la dérivabilité, que g est décroissante sur $]-1, +\infty[$.
6. (a) Montrer que la fonction f est majorée sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (b) Soit M un majorant de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Montrer que : $\forall x > 0, \quad g(x) \leqslant Mb + \dfrac{M\pi}{2(1 + x\sin b)}$.

   (c) En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.
7. La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos t}{1 - \sin t}$ est-elle intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$?
8. (a) Montrer que g admet une limite L finie ou infinie en -1.

   (b) On admettra que si la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1 - \sin t}$ est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1 - \sin t} dt$ et sinon $L = +\infty$.

   Retrouver le résultat de la question 7.

   (c) Donner le tableau de variations de g.