

CONCOURS 1999

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques (toutes filières)

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

PROBLEME 1

Partie I

Soit ℓ un réel. On note f l'application de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = \ell$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note \mathcal{I}_n l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$.

1. Quelle valeur faut-il donner à ℓ pour que f soit continue à droite en 0 ?
On suppose désormais que ℓ a cette valeur.
2. Montrez que f est de classe \mathcal{C}^1 (c'est-à-dire : dérivable, et à dérivée continue) sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et explicitez la dérivée de f à droite en 0.
3. Soit $n \geq 1$. Montrez que, dans l'intervalle \mathcal{I}_n , l'équation $x \cos x = \sin x$ possède une et une seule solution, que l'on notera x_n .
4. Déterminez un équivalent *très simple* de x_n , lorsque n tend vers l'infini.
5. Décrivez rapidement les variations de f dans l'intervalle \mathcal{I}_0 , puis dans les intervalles \mathcal{I}_{2n-1} et \mathcal{I}_{2n} pour $n \geq 1$.
6. Déterminer l'allure de la courbe représentative de f .

Partie II

1. Justifier l'existence de l'application F définie sur \mathbb{R}_+ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = F((n+1)\pi) - F(n\pi) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) dt$.

2. Quel est le signe de u_n ?
3. Montrer que la suite de terme général $|u_n|$ est décroissante et converge vers 0.
4. Que pouvez-vous dire des suites de termes généraux respectifs $F(2n\pi)$ et $F((2n+1)\pi)$?
5. Montrer que la suite de terme général $F(n\pi)$ converge vers une limite μ (que l'on ne cherchera pas à déterminer).
6. Justifier l'encadrement $0 \leq \mu \leq \pi$.
7. Préciser la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, si toutefois cette limite existe.

Partie III

Il est clair que la restriction g de f à l'intervalle $]0, +\infty[$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur cet intervalle;

on pourrait d'ailleurs prouver que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ mais ce n'est pas notre objectif.

On se propose simplement d'établir quelques résultats concernant la dérivée n -ième de g , notée $g^{(n)}$. En particulier, $g^{(0)}$ désigne g elle-même.

On identifie un polynôme P et la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ qui lui est naturellement associée.

Chaque polynôme sera écrit selon les puissances décroissantes de X .

1. Explicitez $g''(x)$ pour $x > 0$.

Au vu des expressions de $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$, on se propose d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{Il existe deux polynômes } P_n \text{ et } Q_n \text{ tels que, pour tout } x > 0 : g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x) \sin^{(n)} x + Q_n(x) \sin^{(n+1)} x}{x^{n+1}}$$

Vous allez raisonner par récurrence sur n .

2. Il est clair que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$;

vous dresserez simplement un tableau donnant les expressions de P_n pour ces valeurs de n .

Voyez-vous apparaître une relation *simple* entre P_n et Q_n ?

3. On fixe $n \in \mathbb{N}$, et on suppose l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise.

Etablissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$; vous déterminerez des expressions de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n .

Il résulte donc des questions **III.2** et **III.3** que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Montrez que P_n et Q_n ont tous leurs coefficients dans \mathbb{Z} ; précisez le degré, la parité, et le coefficient dominant de ces polynômes.

5. Utilisez les formules établies à la question **III.3** pour expliciter P_3 et Q_3 .

6. Deux polynômes U et V vérifient $U(x) \sin x + V(x) \cos x = 0$ pour tout $x > 0$.

Montrez que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.

7. En partant de la relation $xg(x) = \sin x$ et en appliquant la formule de Leibniz, ainsi que le résultat de la question précédente, mettez en évidence deux nouvelles relations liant P_n , Q_n , P_{n+1} et Q_{n+1} .

8. Justifiez alors la relation $P'_n = Q_n$, et montrez que P_n est solution d'une équation différentielle du second ordre *très simple*, que l'on notera \mathcal{E}_n .

9. Il est clair que l'application $\Psi : T \mapsto T + T''$ est un endomorphisme de \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.

Montrez que Ψ induit un automorphisme Ψ_n du sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes de degré n au plus;

montrez ensuite que Ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Il résulte de ceci que P_n est l'unique solution polynomiale de l'équation différentielle \mathcal{E}_n .

10. $n \in \mathbb{N}$ est fixé, et p désigne la partie entière de $n/2$.

Justifiez l'existence d'une famille $(a_k)_{0 \leq k \leq p}$ de réels vérifiant $P_n = \sum_{0 \leq k \leq p} a_k X^{n-2k}$ et déterminez une expression de a_k faisant intervenir des factorielles et/ou des puissances, mais débarassées de tout signe \prod .

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y = x^n$.

PROBLEME 2

On note $p : x \mapsto e^x = \exp(x)$, $q : x \mapsto e^{2x} = \exp(2x)$ et $r : x \mapsto e^{x^2} = \exp(x^2)$.

On note $\mathcal{B} = (p, q, r)$ et \mathcal{E} le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par la famille \mathcal{B} .

Partie I

On se propose de prouver que \mathcal{B} est une base de \mathcal{E} , au moyen de diverses méthodes. De par la définition de \mathcal{E} , il nous suffit de montrer que la famille \mathcal{B} est libre ; soit donc a, b et c trois réels tels que $ap + bq + cr = \mathbf{0}$ (où $\mathbf{0}$ désigne la fonction nulle).

1. L'étudiant Antoine a évalué l'expression $(ap + bq + cr)(x)$ pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$.

Suivez sa démarche en l'expliquant, et concluez.

2. Antoine a utilisé une propriété du nombre e ; laquelle ?

Sauriez-vous justifier cette propriété autrement que par un argument du genre « tout le monde sait bien que $e \simeq 2.71828$ » ?

3. L'étudiant Nicolas a observé le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de l'application $ap + bq + cr$.

Faites comme lui et concluez.

4. L'étudiant Luc a eu une autre idée : il s'est intéressé au comportement de chacune des trois fonctions p, q, r au voisinage de $+\infty$.

Reconstituez sa méthode et concluez.

5. Au fait : quelle est la dimension de \mathcal{E} ?

On note ψ l'application qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe le triplet de réels $(f(0), f'(0), f(1))$.

6. Prouvez que ψ est un isomorphisme du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathcal{E} sur le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 .

7. Soit $f = ap + bq + cr$ un élément de \mathcal{E} .

Exprimez a, b et c en fonction de $f(0), f'(0)$ et $f(1)$.

Partie II

On note φ l'application de \mathcal{E} dans lui-même qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe $\varphi(f) = Ap + Bq + Cr$ où

$$\begin{cases} A = \frac{2}{e-1}f(0) + f'(0) + \frac{2}{e(e-1)}f(1) \\ B = -\frac{1}{e-1}f(0) - \frac{1}{e(e-1)}f(1) \\ C = \frac{e-2}{e-1}f(0) - f'(0) - \frac{1}{e(e-1)}f(1) \end{cases}$$

1. On note θ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par $\theta(a, b, c) = (a, b, -c)$.

Montrez que $\varphi = \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi$. En déduire que φ est un automorphisme de l'espace vectoriel \mathcal{E} .

2. Exprimez $\varphi(p), \varphi(q)$ et $\varphi(r)$ en fonction de p, q et r .

3. Ecrivez la matrice M de φ dans la base \mathcal{B} .

4. Déterminez $\varphi \circ \varphi$ et M^2 . Que pouvez-vous dire de φ ?

Partie III

1. On note $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = f\}$ l'ensemble des vecteurs de \mathcal{E} invariants par f .
Montrez que $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : f(1) = 0\}$. En déduire que \mathcal{P} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{E} ;
déterminer une équation de \mathcal{P} dans la base \mathcal{B} ; prouver que \mathcal{P} est de dimension deux;
exhibez une base (e_1, e_2) de \mathcal{P} .
2. On note $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = -f\}$ l'ensemble des vecteurs de \mathcal{E} transformés en leur opposé par f .
Montrez que \mathcal{D} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{E} ;
prouvez que \mathcal{D} est de dimension un, et déterminez des équations de \mathcal{D} dans la base \mathcal{B} .
Exhibez une base (e_3) de \mathcal{D} , et donnez une caractérisation des éléments de \mathcal{D} .
3. Montrez que $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.
4. Justifiez l'affirmation suivante : $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de \mathcal{E} .
5. Quelle est la matrice de φ dans la base \mathcal{C} ? Caractérisez géométriquement φ .

Partie IV

On se propose de développer ici l'idée suivie par l'étudiant Luc dans la première partie (question 4).

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels, \mathcal{F} l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont le terme constant est nul;

pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n .

On identifie un polynôme P et la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ qui lui est naturellement associée.

1. Montrez que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Quelle est la dimension de $\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n[X]$?
2. Soit $(P_k)_{1 \leq k \leq q}$ une famille d'éléments de \mathcal{F} vérifiant la condition suivante :

pour $1 \leq k < q$, $P_{k+1}(x) - P_k(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

On note $f_k = \exp \circ P_k$ l'application qui, à $x \in \mathbb{R}$, associe $f_k(x) = e^{P_k(x)} = \exp(P_k(x))$.

Montrez que la famille $(f_k)_{1 \leq k \leq q}$ est libre.