CONCOURS 1998

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

PREMIER PROBLEME

I – Solutions d'une équation différentielle

Dans toute la suite, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

On considère l'équation différentielle (E) : $\left(1+x^2\right)y'+2xy=\dfrac{1}{x}$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^\times$.

2. Pour tout réel λ, on définit la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^\times$ par : $\forall x>0 \quad f_\lambda(x)=\dfrac{\ln x+\lambda}{1+x^2}$ et on note (C_λ) sa courbe représentative dans $\left(O\,,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

   (a) Soit $M(\alpha,\beta)$ un point du plan avec $\alpha>0$.

   Montrer que par M passe une et une seule courbe (C_λ).

   (b) Montrer que pour tout réel λ, la fonction f_λ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^\times$.

   (c) Montrer que pour tout $x>0$, $f'_\lambda(x)$ est du signe de $g_\lambda(x)=1+x^2-2x^2(\ln x+\lambda)$.

   (d) Etudier les variations de g_λ.

   On montrera en particulier que l'équation $g_\lambda(x)=0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+^\times$; cette solution sera notée m_λ.

   (e) Dresser le tableau de variations de f_λ. On calculera les limites de f_λ en 0 et $+\infty$, et on montrera que $f_\lambda(m_\lambda)=\dfrac{1}{2m_\lambda^2}$.

   (f) Représenter sur un même graphique les courbes (C_{-1}), (C_0) et (C_1).
   On donnera des valeurs approchées de m_{-1} et m_0 à 10^{-2} près en précisant la méthode utilisée, ainsi que la valeur *exacte* de m_1.

3. Dans cette question, on cherche un équivalent de m_λ lorsque λ tend vers $+\infty$.

   (a) Montrer que pour λ assez grand, on a : $\dfrac{1}{\lambda}\leqslant m_\lambda\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

   (b) En déduire, à l'aide des questions précédentes, que $m_\lambda \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$.

II – Etude d'une fonction intégrale

On étudie dans cette partie la fonction F définie par :

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_1^x f_0(t)\,dt = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt.$$

La courbe représentative de F sera notée Γ.

1. (a) Déterminer le signe de F sur $\mathbb{R}_+^\times$.
   (b) Justifier la continuité et la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+^\times$.
   (c) Calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
   (d) Ecrire le développement limité de F à l'ordre 3 au voisinage de $x = 1$.

2. Montrer que : $\forall x > 0 \quad F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par : $\forall x > 0 \quad \phi(x) = \dfrac{\arctan x}{x}$.

   Montrer que ϕ est prolongeable par continuité en 0.

   (a) Montrer que : $\forall x > 0 \quad F(x) = \arctan x \ln x - \displaystyle\int_1^x \phi(t)\,dt$.
   (b) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.
   La nouvelle fonction ainsi obtenue sera encore notée F.
   Que peut-on dire de F au voisinage de $+\infty$?
   (c) Montrer que F n'est pas dérivable à droite en 0.
   Que peut-on dire de Γ au point d'abscisse 0 ?

4. Dans cette question, on cherche à calculer une valeur approchée de $F(0)$.

   (a) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, calculer $I_k(x) = \displaystyle\int_1^x t^k \ln t\,dt$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0 \quad \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.
   (c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$, une majoration de $\left| F(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) \right|$.
   (d) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |F(0) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(2n+3)^2}$.
   (e) Donner, en *détaillant la méthode utilisée*, une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(0)$.

5. Tracer l'allure de la courbe Γ. On précisera le point d'inflexion.

DEUXIÈME PROBLEME

Dans tout le problème, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée usuelle et rapporté à sa base canonique (orthonormée directe) notée (e_1, e_2, e_3).

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices d'ordre 3 à coefficients réels et I_3 la matrice identité.

Il est demandé de faire figurer tous les calculs sur la copie.

Partie I

Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $S = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Montrer que s est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $e'_1 = (1,1,1)$, $e'_2 = (1,-1,0)$ et $e'_3 = (1,1,-2)$.
   - (a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   - (b) Déterminer la matrice S' de s dans la base (e'_1, e'_2, e'_3).
   - (c) Calculer $(S')^n$ et donner une méthode de calcul de S^n (on ne demande pas d'effectuer lesdits calculs).
   - (d) La famille (I_3, S) est-elle libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
   - (e) Montrer que S^2 peut s'exprimer sous forme de combinaison linéaire de I_3 et S.
   - (f) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tel que $S^n = a_n I_3 + b_n S$ (on convient que : $\forall M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \quad M^0 = I_3$).
   - (g) Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1, et exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   - (h) Montrer que la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, puis que la suite $(b_n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   - (i) En déduire l'expression de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $B = S - 2I_3$.
   - (a) Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
   - (b) En déduire l'expression de S^n en fonction de I_3 et B pour $n \in \mathbb{N}$ (on pourra, après justification, utiliser la formule du bin me de Newton).
   - (c) Comparer avec le résultat de la question 3).
4. L'expression de S^n obtenue aux questions 3) et 4) est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Partie II

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

On pose : $u = f \circ s^{-1}$ et on note U la matrice de u dans la base canonique.

1. Calculer U ; vérifier que u est une rotation vectorielle et que $u \circ s = s \circ u = f$.
2. Soit (e''_1, e''_2, e''_3) la famille obtenue en normant les vecteurs e'_1, e'_2 et e'_3 de la question 2) de la première partie.
   - (a) Montrer que (e''_1, e''_2, e''_3) est une base orthonormale directe.
   - (b) Ecrire la matrice U' de u dans cette base et caractériser géométriquement u.
   - (c) Exprimer la matrice de s dans la base (e''_1, e''_2, e''_3) en fonction de S'.

(d) En déduire la matrice de f dans la base (e''_1, e''_2, e''_3).

(e) Quel est l'ensemble des vecteurs invariants par f ?

(f) Soit $P = \text{Vect}(e''_2, e''_3)$.

i. Montrer que $f(P) = P$.

ii. Soit g l'endomorphisme de P tel que pour tout x de P, $g(x) = f(x)$.

Montrer que g est la composée de deux applications linéaires simples que l'on reconna tra.

3. On note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ commutant avec f, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes g tels que $f \circ g = g \circ f$.

(a) Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

(b) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.

i. Montrer que le vecteur $g(e''_1)$ est invariant par f. Que peut-on en déduire ?

ii. Soit M la matrice de g dans la base (e''_1, e''_2, e''_3). Montrer que M commute avec $(S')^3$.

iii. En déduire la forme générale de la matrice d'un endomorphisme de $\mathcal{C}(f)$ dans la base (e''_1, e''_2, e''_3).

(c) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(f)$?