CONCOURS COMMUN SUP 1996

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve spécifique de Mathématiques

Classements SUP (MPSI, PCSI, PTSI) et SPE (MP, PC, PTSI)

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

PROBLEME 1

Soit (u_n) une suite de réels non nuls, on lui associe la suite (p_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \prod_{p=1}^{n} u_p = u_1 u_2 \cdots u_n$$

On dit que le produit (p_n) converge si et seulement si la suite (p_n) admet une limite finie non nulle. Sinon on dit que le produit (p_n) diverge.

PREMIERE PARTIE

1. En considérant le quotient $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ montrer que, pour que le produit (p_n) converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 1.

2. Soit $p_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$.

   Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ p_n = n+1$. Quelle est la nature du produit (p_n) ?

3. Soient un réel a différent de $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $p_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} \cos \frac{a}{2^p}$.

   Pour tout entier naturel n non nul, calculer $p_n \sin \dfrac{a}{2^n}$; en déduire que le produit (p_n) converge et donner la limite de la suite (p_n).

DEUXIEME PARTIE

1. Soit (p_n) un produit associé à une suite (u_n) qui converge vers 1.

   (a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n > 0$.

   (b) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{p=n_0}^{n} \ln(u_p)$.

   Montrer que la convergence de la suite (S_n) équivaut à la convergence du produit (p_n).

   Lorsque (S_n) converge vers ℓ donner la limite de la suite (p_n) en fonction de ℓ.

2. Soit $p_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} \sqrt[p]{p}$ et soit $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p}$.

(a) Montrer que : $\forall p \geqslant 3,\ \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\ln x}{x}\, dx \leqslant \frac{\ln p}{p}$.

(b) En déduire la nature de la suite (S_n) et du produit (p_n).

TROISIEME PARTIE

1. Soit $p_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n}(1 + v_p)$ où (v_n) est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

   On pose $S'_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} v_p$.

   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(1 + x) < x$.

   (b) Montrer que la suite (S'_n) est croissante.

   (c) Montrer que si la suite (S'_n) converge, alors le produit (p_n) converge.

2. Déduire de la question I - 2 la limite de la suite (S'_n) définie par $S'_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

3. Soit $p_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n}(1 + a^{2^p})$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

   (a) Que dire de la nature du produit (p_n) lorsque $a \geqslant 1$?

   (b) On suppose $a \in]0, 1[$.

      i. Montrer que le produit (p_n) converge.

      ii. Pour tout entier naturel n non nul, calculer $(1 - a^2)p_n$ et en déduire la limite de la suite (p_n).

PROBLEME 2

Soit E un K espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et u un endomorphisme de E. On désigne par $\ker u$ le noyau de u et $\operatorname{Im} u$ l'image de u.

Pour tout entier k strictement positif, u^k désigne l'endomorphisme $u \circ u \circ u \cdots \circ u$ (k fois) et u^0 désigne l'application identique de E.

PREMIERE PARTIE

A -

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Soit u l'endomorphisme de E tel que la matrice de u par rapport à cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de u et donner une base de $\operatorname{Im} u$, une base de $\ker u$ en fonction des vecteurs de la base B.

2. Calculer M^2, M^3 et montrer que pour tout entier $p \geqslant 2$, il existe un réel α_p et une matrice A telle que : $M^p = \alpha_p A$.

   Expliciter alors M^p.

3. (a) Donner une base, en fonction des vecteurs de la base B, de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

$$\operatorname{Im} u^2, \quad \ker u^2, \quad \operatorname{Im} u^3, \quad \ker u^3.$$

   (b) Déterminer : $\forall k \geqslant 2$, $\ker u^k$, $\operatorname{Im} u^k$.

   (c) Montrer que $E = \ker u^2 \oplus \operatorname{Im} u^2$.

B -

Soit $K[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans le corps K et d l'endomorphisme de $K[X]$ qui à un polynôme P associe son polynôme dérivé P'.

1. d est-il injectif ? d est-il surjectif ? Comment peut-on en déduire que $K[X]$ n'est pas de dimension finie ?
2. Déterminer : $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ \ker d^q$.

DEUXIEME PARTIE

Soit u un endomorphisme de E, pour tout entier naturel p, on notera $I_p = \operatorname{Im} u^p$ et $K_p = \ker u^p$.

1. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.
2. On suppose que E est de dimension finie et u injectif. Déterminer : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_p$ et K_p.
3. On suppose que E est de dimension finie n non nulle et u non injectif.
   (a) Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leqslant n$ tel que : $K_r = K_{r+1}$.
   (b) Montrer qu'alors : $I_r = I_{r+1}$ et que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad K_r = K_{r+p}$ et $I_r = I_{r+p}$.
   (c) Montrer que : $E = K_r \oplus I_r$.
4. Lorsque E n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel r tel que $K_r = K_{r+1}$?