CONCOURS 1996

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve commune de Mathématiques (Sup MPSI, PCSI, PTSI et Spés)

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Problème 1

1. Soit la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$
Calculer $B = A^2, C = A^3, A + C$ et $U = A^4$.

2. Montrer que $(\{U, A, B, C\}, \times)$, où $\times$ est le produit matriciel, forme un groupe commutatif.

3. E désigne un espace vectoriel euclidien orienté, sur le corps des réels, de dimension 3, rapporté à la base orthonormale directe $\mathcal{H} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On appelle a, b, c et u les endomorphismes de E associés respectivement à A, B, C et U.

   (a) Montrer que le noyau de u, noté $\ker(u)$, est une droite vectorielle, dont on donnera une base normée $(\vec{e_1})$, la première coordonnée de $\vec{e_1}$ étant positive.

   (b) Déterminer une équation cartésienne de l'image de u, notée $\mathrm{Im}(u)$. Vérifier que $\mathrm{Im}(u)$ est un plan vectoriel orthogonal à $\ker(u)$.

   (c) Donner la nature géométrique de u.

   (d) Déterminer un vecteur normé $\vec{e_2}$ de $Im(u)$, puis $\vec{e_3}$ tel que $\mathcal{H}' = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ soit une nouvelle base orthonormale directe de E. Donner alors la matrice U' de u dans la base $\mathcal{H}'$.

4. (a) Déterminer les matrices A', B', C' respectivement de a, b, c dans la base $\mathcal{H}'$.

   (b) Montrer que a, b, c peuvent se décomposer chacun en deux endomorphismes usuels que l'on précisera.

5. On rappelle que l'ensemble $\mathcal{C}_1$ des fonctions numériques à variable réelle, continûment dérivables sur l'ensemble des réels, muni de l'addition et de la multiplication par des réels, est un espace vectoriel sur le corps des réels.

   Soit $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ les éléments de $\mathcal{C}_1$ tels que $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = \sin(x), \varphi_2(x) = \cos(x)$.

   (a) Montrer que $\phi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ est une famille libre de $\mathcal{C}_1$.

   (b) $\mathcal{E}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_1$ de base ϕ. A chaque élément φ de $\mathcal{E}$, on associe sa fonction dérivée $d(\varphi)$.

   Montrer que d est un endomorphisme de $\mathcal{E}$; en donner la matrice D dans la base ϕ. Comparer D et A'.

Problème 2

Dans ce problème, m, n, p et q désignent des entiers naturels.

1. Pour $n \geqslant 1$, on considère les suites (u_n), (u'_n), (u''_n) définies par:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad u'_n = u_{2n}, : \quad u''_n = u_{2n-1}.$$

   (a) Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u'_1, u'_2, u'_3, u''_1, u''_2, u''_3.

   (b) Calculer, en fonction de n, $u'_{n+1} - u'_n$, $u''_{n+1} - u''_n$, $u''_n - u'_n$. Qu'en déduit-on pour les suites (u'_n) et (u''_n) ?

   (c) Montrer que la suite (u_n) converge.

2. Etudier la suite (v_n) définie pour $n \geqslant 1$ par:

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$

3. On considère, pour tout $p \geqslant 0$ les intégrales $I_p = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2} dx$.

   (a) Calculer I_0 et I_1.

   (b) Calculer $I_p + I_{p+2}$ en fonction de p. En déduire I_2 et I_3.

4. Montrer que, pour $q \geqslant 1$:

   (a) $u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} = \ln 2$.

   (b) $v_q + (-1)^q I_{2q} = \dfrac{\pi}{4}$.

5. (a) Déterminer $\lim\limits_{p \to +\infty} I_p$.

   (b) Préciser les limites des suites (u_n) et (v_n).

6. Au moyen d'une intégration par parties, déterminer $\lim\limits_{p \to +\infty} (pI_p)$.

7. Soit $J_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{(1+x^2)^q} dx$.

   (a) Calculer $J_{1,q}$ en fonction de q.

   (b) Donner les valeurs de $J_{0,q}$ pour $0 \leqslant q \leqslant 3$.

   (c) On dit que $J_{m,n}$ précède $J_{p,q}$ si et seulement si $(m \leqslant p \quad \text{et} \quad n < q)$ ou $(m < p \quad \text{et} \quad n \leqslant q)$.

   Pour $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 1$, donner $J_{p,q}$ en fonction de deux intégrales qui la précèdent.

   (d) Donner toutes les valeurs des $J_{p,q}$ pour $0 \leqslant p \leqslant 3$ et $0 \leqslant q \leqslant 3$.